Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ЭНЕРГИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

О. С. Рыжов

(Москва)

1. Изменение энергии газа, движущегося в поле тяжести, определяется уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)+\operatorname{div}\rho\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\mathbf{v}-\rho\mathbf{v}\mathbf{g}=0 \tag{1.1}$$

Здесь t — время, $\mathbf{v}$ — скорость частиц, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, ρ — плотность, ε — удельная внутренняя энергия, w — удельная энтальпия. Величина w связана с ε и давлением газа p формулой

$$\rho w=\rho\varepsilon+p$$

Рассмотрим распространение звуковой волны в неоднородной среде. Будем считать, что в невозмущенном состоянии давление p_0, плотность ρ_0, внутренняя энергия ε_0 и удельная энтальпия w_0 не меняются со временем и заданы как функции координат. Что касается скорости, то для простоты в невозмущенном состоянии положим ее равной нулю

$$\mathbf{v}_0=0$$

Уравнение равновесия среды в этом случае имеет вид

$$\operatorname{grad}p_0=\rho_0\mathbf{g} \tag{1.2}$$

Упростим уравнение (1.1), используя малость амплитуды звуковой волны. Для этого разложим величину ρw в ряд, причем в качестве независимых термодинамических переменных выберем давление p и удельную энтропию s. Пусть T означает температуру вещества. Согласно первому началу термодинамики

$$dw=Tds+\frac{1}{\rho}dp$$

Используя это равенство, напишем искомое разложение для ρw в виде, в котором сохранены члены первого и второго порядков малости

$$\rho w=\rho_0w_0+\left(1+\frac{w_0}{a_0^2}\right)p'+\left[\rho_0T_0+w_0\left(\frac{\partial\rho}{\partial s_0}\right)_p\right]s'+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\rho_0a_0^2}+w_0\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial p_0^2}\right)_s\right]p'^2+\left(\frac{T_0}{a_0^2}+w_0\frac{\partial^2\rho}{\partial p_0\,\partial s_0}\right)p's'+$$
$$+\frac{1}{2}\left[2T_0\left(\frac{\partial\rho}{\partial s_0}\right)_p+\frac{\rho_0T_0}{c_{p_0}}+w_0\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial s_0^2}\right)_p\right]s'^2$$

Здесь a — скорость звука, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, p' и s' — отклонения давления и энтропии от их равновесных значений, нулевой индекс относится к величинам в состоянии покоя.

Подставим написанное равенство в уравнение (1.1). Для упрощения полученного выражения воспользуемся уравнением равновесия (1.2), а также уравнениями неразрывности Эйлера и сохранения энтропии в частице, в которых нужно оставить квадратичные члены. В результате приходим к уравнению, которое выражает закон сохранения энергии в звуковой волне

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\rho_0 v^2 + \frac{1}{\rho_0 a_0^2} p'^2\right) + \operatorname{div} p'\mathbf{v} + \frac{1}{a_0^2}\left(\frac{\partial p}{\partial s_0}\right)_\rho s'\mathbf{vg} = 0 \tag{1.3}$$

Если в состоянии равновесия энтропия среды постоянна по всему рассматриваемому объему

$$s_0 = \mathrm{const}$$

то легко видеть, что $s' = 0$. В этом случае последний член в уравнении (1.3) исчезает. Он обращается также в нуль, когда отсутствует поле тяжести.

При распространении звуковой волны в идеальном газе с $c_p = \mathrm{const}$ уравнению (1.3) можно придать вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\rho_0 v^2 + \frac{1}{\rho_0 a_0^2} p'^2\right) + \operatorname{div} p'\mathbf{v} + \frac{\rho_0}{c_p} s'\mathbf{vg} = 0$$

Рассмотрим теперь движение короткой звуковой волны, т. е. волны с узкой зоной возмущенного течения. Амплитуда и направление такой волны в каждом участке пространства почти не меняются на расстояниях порядка ширины возмущенной области λ_*. Когда $\lambda_* \to 0$, между параметрами газа в первом приближении справедливы зависимости, определяющие ударный фронт

$$\mathbf{v} = v\mathbf{n}, \qquad v = \frac{1}{\rho_0 a_0} p', \qquad s' = 0 \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — нормаль к фронту волны.

В короткой волне плотность звуковой энергии e и плотность потока звуковой энергии $\mathbf{q}$ связаны равенством, характеризующим плоский бегущий импульс малой амплитуды

$$\mathbf{q} = a_0 e\mathbf{n}, \qquad e = \frac{1}{2}\left(\rho_0 v^2 + \frac{1}{\rho_0 a_0^2} p'^2\right), \qquad \mathbf{q} = p'\mathbf{v} \tag{1.5}$$

Подставим формулы (1.4) и (1.5) в соотношение (1.3), в результате получим основное уравнение геометрической акустики

$$\frac{\partial a_0 e}{\partial t} + a_0\mathbf{n} \operatorname{grad} a_0 e + a_0^2 e \operatorname{div}\mathbf{n} = 0$$

Введем производную вдоль луча, по которому движется элемент волны

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + a_0(\mathbf{n}\nabla)$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$e = e_0 \frac{a_{00}}{a_0} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_0 \operatorname{div}\mathbf{n}\, dt\right) \tag{1.6}$$

Здесь e_0 и a_{00} означают плотность звуковой энергии и равновесную скорость звука в начальный момент времени $t = t_0$, взятые в начальной точке луча.

Уравнение (1.6) определяет изменение интенсивности звука вдоль пути элемента волны. Пусть p_0' и $\rho_{\theta 0}$ означают избыточное давление и равновесную плотность в начальный момент времени $t = t_0$. Из формулы (1.6) следует закон изменения амплитуды звуковой волны

$$p' = p_0' \sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00} a_{00}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a_0 \operatorname{div} \mathbf{n}\, dt\right) \tag{1.7}$$

Иным путем формула (1.7) выведена в работе Келлера [1], где она преобразована к виду

$$p' = p_0' \sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00} a_{00}}} \sqrt{\frac{f_0}{f}} \tag{1.8}$$

Здесь f — площадь поперечного сечения элементарной лучевой трубки в момент времени t, f_0 — площадь сечения трубки при $t = t_0$.

2. Рассмотрим теперь движение короткой волны малой амплитуды в следующем за геометрической акустикой приближении. В этом приближении скорость ударной волны отлична от скорости распространения звуковых волн, а ее амплитуда затухает по иному закону, чем (1.8). Предположим для простоты, что все избыточные величины в звуковом импульсе с ударной волной имеют трехугольные профили. Пусть p_*' означает амплитуду ударной волны в следующем за геометрической акустикой приближении, λ_0 — начальную длину звукового импульса, а V — удельный объем газа, равный $1/\rho$. Введем коэффициент

$$m_0 = \frac{1}{2\rho_0^3 a_0^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2}\right)_s$$

который для идеального газа равен $(\varkappa + 1)/2$, где $\varkappa$ — показатель адиабаты Пуассона. Используя полученные результаты, можно показать, что амплитуда ударной волны p_*' определяется формулой [2-4]

$$p_*' = p_0' \sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00} a_{00}}} \sqrt{\frac{f_0}{f}} \left(1 + \frac{p_0'}{\lambda_0} \sqrt{\frac{a_{00}}{\rho_{00}}} \int_{l_0}^{l} \frac{m_0}{\sqrt{\rho_0 a_0^5}} \sqrt{\frac{f_0}{f}}\, dl\right)^{-1/2} \tag{2.1}$$

Здесь dl — элемент длины луча, равный $a_0\, dt$.

Длина волны λ_* изменяется согласно равенству [3,4]

$$\lambda_* = \lambda_0 \frac{a_0}{a_{00}} \left(1 + \frac{p_0'}{\lambda_0} \sqrt{\frac{a_{00}}{\rho_{00}}} \int_{l_0}^{l} \frac{m_0}{\sqrt{\rho_0 a_0^5}} \sqrt{\frac{f_0}{f}}\, dl\right)^{1/2} \tag{2.2}$$

Вычислим изменение в единицу времени полной энергии E элементарного звукового импульса, заключенного внутри лучевой трубки с площадью поперечного сечения f. Полная энергия звукового импульса с трехугольным профилем избыточного давления, амплитуда и длина которого даются соответственно формулами (2.1) и (2.2), равна

$$E = \frac{1}{3} \frac{\lambda_0 f_0 p_0'}{\sqrt{\rho_{00} a_{00}^3}} \frac{1}{\sqrt{\rho_0 a_0}} \sqrt{\frac{f}{f_0}}\, p_*'$$

Изменение энергии рассматриваемого импульса определяется производной[1]

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{3} \frac{\lambda_0 f_0 p_0'}{\sqrt{\rho_{00} a_{00}^3}} a_0 \frac{d}{dl}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_0 a_0}} \sqrt{\frac{f}{f_0}}\, p_*'\right)$$

---

[1] Отметим, что в приближении геометрической акустики $E = {}^1/_3\, \lambda_0 f_0 e_0$ и $dE/dt = 0$.

Используя равенство (2.1), находим

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_0 a_0}}\sqrt{\frac{f}{f_0}}\,p_*'\right) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\rho_{00}a_{00}^3}}{\lambda_0 p_0'}\frac{m_0}{\rho_0^2 a_0^4}\frac{f}{f_0}p_*'^3$$

Отсюда следует выражение для искомого изменения полной энергии элементарного звукового импульса

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{6}\frac{m_0}{\rho_0^2 a_0^3} f p_*'^3 \tag{2.3}$$

Покажем, что найденное изменение величины E обусловлено диссипацией энергии в ударной волне. Значение этой диссипации, вызванной вязкостью и теплопроводностью, можно вычислить в рамках идеальной жидкости по тому изменению энтропии s_*', которое происходит на ударном фронте. Величина s_*' есть величина третьего порядка малости относительно избыточного давления p_*', она определяется формулой

$$s_*' = \frac{1}{6}\frac{m_0}{\rho_0^3 a_0^4 T_0} p_*'^3$$

Используя написанное соотношение, найдем энергию, которая в единицу времени рассеивается в виде тепла на элементе ударного фронта с площадью f. Пусть Q означает диссипированную энергию. Ее изменение в единицу времени на выделенном элементе ударного фронта

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{6}\frac{m_0}{\rho_0^2 a_0^3} f p_*'^3$$

которое совпадает с выражением (2.3), взятым с обратным знаком. Это обстоятельство позволяет непосредственно, минуя вычисления в приближении геометрической акустики, найти закон затухания ударной волны малой амплитуды, движущейся в неоднородной среде. Изменение энергии элементарного звукового импульса длины λ_*, заключенного внутри лучевой трубки с площадью поперечного сечения f и имеющего на фронте избыточное давление p_*', будет по изложенному:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho_0 a_0^2} f \lambda_* p_*'^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{m_0}{\rho_0^2 a_0^3} f p_*'^3 \tag{2.4}$$

Входящая сюда величина λ_* удовлетворяет соотношению [4]

$$\frac{d\lambda_*}{dt} = \frac{\lambda_*}{a_0}\frac{da_0}{dt} + \frac{1}{2} m_0 \frac{p_*'}{\rho_0 a_0} \tag{2.5}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4) и (2.5) должна быть проинтегрирована при начальном условии

$$\lambda_* = \lambda_0 \qquad p_*' = p_0' \qquad \text{при } t = t_0$$

Нетрудно убедиться, что решение системы уравнений (2.4) и (2.5), удовлетворяющее этому условию, дается формулами (2.1) и (2.2).

Автор благодарен С. А. Христиановичу за обсуждение работы.

Поступила 29 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Keller J. B. Geometrical Acoustics. 1. The Theory of Weak Shock Waves. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, № 8.
2. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
3. Полянский О. Ю. О затухании ударных волн в движущейся среде с переменными плотностью и температурой. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
4. Рыжов О. С. Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2.