

О СОУДАРЕНИИ ГАЗОВЫХ СТРУЙ

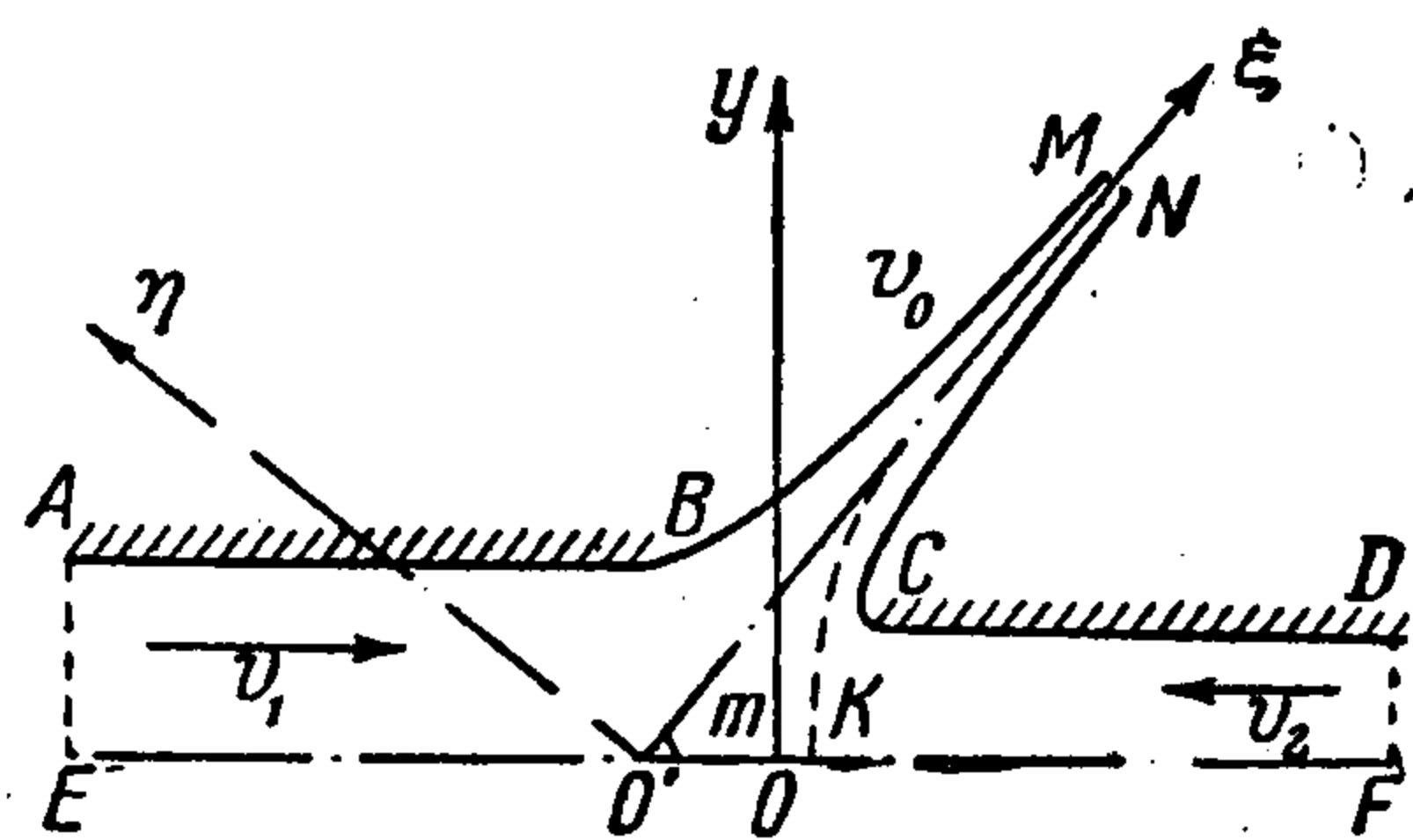
Н. Н. Макеев

(Пермь)

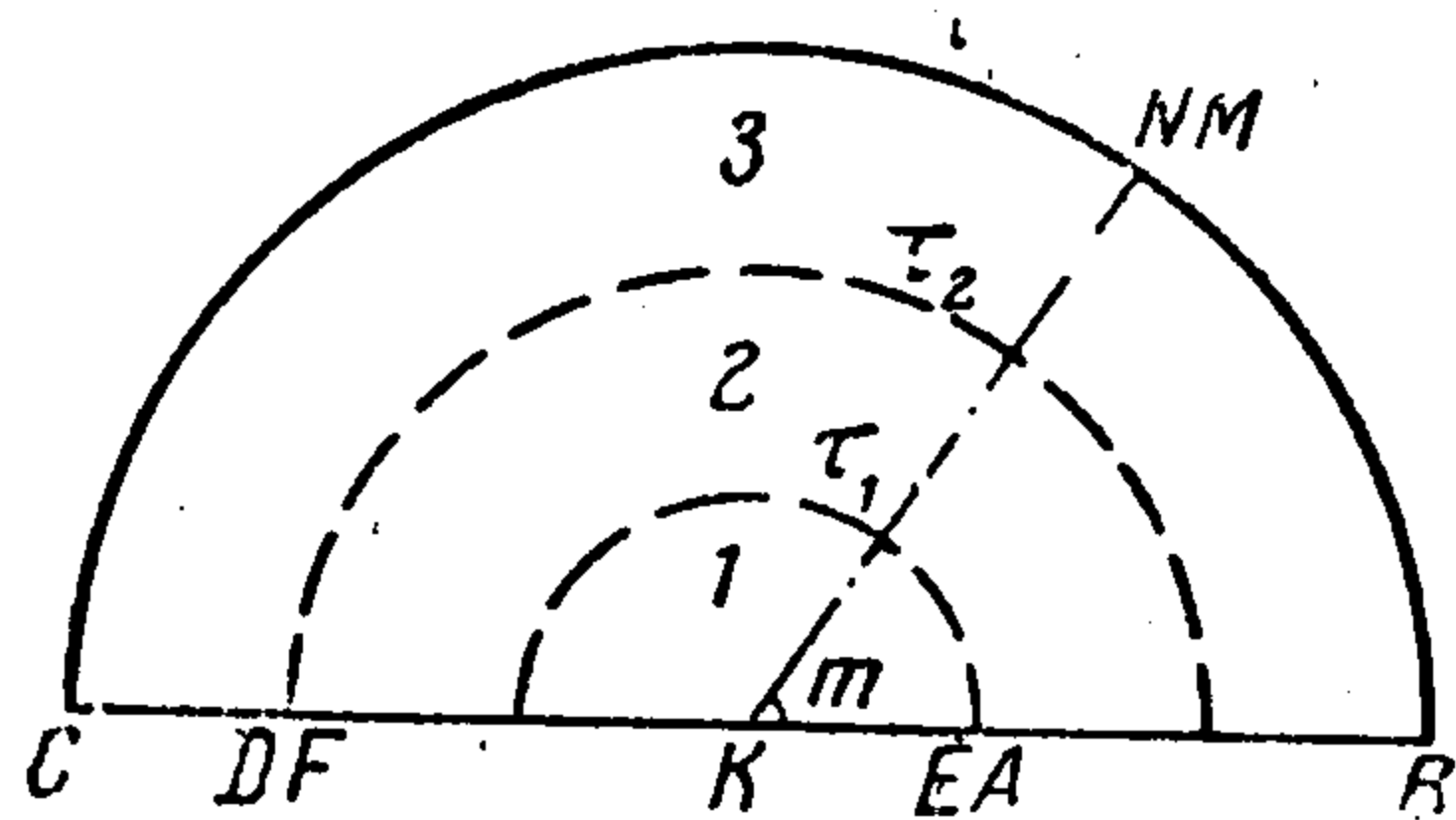
Приводится точное решение плоской задачи о соударении газовых струй, вытекающих из соосных каналов конечной ширины с параллельными стенками. При помощи теории газовых струй при дозвуковых скоростях задача сводится к краевой задаче для уравнения Чаплыгина, решение которой представляется в форме рядов Фурье.

С. А. Чаплыгиным [1] был предложен метод решения задач о дозвуковом струйном течении в случае, когда имеется только одна заданная характерная скорость. Метод Чаплыгина был усовершенствован С. В. Фальковичем [2] на класс задач с более чем одной характерной скоростью. Это усовершенствование позволяет исследовать ряд вопросов теории соударения струй, которые представляют интерес в связи с уточнением теории кумулятивной струи, разработанной в первом приближении М. А. Лаврентьевым [3].

§ 1. Рассмотрим соударение газовых струй, вытекающих из соосных каналов конечной ширины с параллельными стенками при наличии



Фиг. 1



Фиг. 2

дозвуковой скорости v_0 на свободной поверхности в покоящуюся газовую среду. Ввиду симметрии задачи достаточно рассмотреть лишь половину области течения (фиг. 1) с одной ветвью струи.

Здесь AB и CD — стенки каналов, BM и CN — свободные поверхности ветви, δ — граница раздела струйных течений с точкой ветвления K . Пусть v_1 и v_2 — скорости газа в бесконечно удаленных сечениях AE и DF каналов, d_1 и d_2 — диаметры каналов, d_0 — ширина ветви струи на бесконечности, m — угол наклона вектора скорости струи на бесконечности к оси x , $2h$ — расстояние между выходными срезами каналов.

Примем, что на линии тока EOF функция тока $\psi = 0$. Тогда, если расходы газа в сечениях AE и DF обозначить $\frac{1}{2} Q_1$ и $\frac{1}{2} Q_2$ соответственно, расход газа в сечении MN — через $\frac{1}{2} Q_0$, то $\psi = \frac{1}{2} Q_1$ на линии тока ABM и $\psi = -\frac{1}{2} Q_2$ на линии тока DCN .

Обозначим через v скорость, v_{\max} — максимальную скорость истечения, θ — угол, образуемый вектором скорости с осью x , тогда, переходя к переменным θ и $\tau = v^2/v_{\max}^2$, получим на плоскости годографа скорости область течения, представленную на (фиг. 2), где полуокружности CB соответствует $\tau = \tau_0$.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \psi &= 0 & \text{при } \theta &= 0, & 0 < \tau < \tau_1 \\ \psi &= \frac{1}{2} Q_1 & \text{при } \theta &= 0, & \tau_1 < \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \psi &= 0 & \text{при } \theta &= \pi, & 0 < \tau < \tau_2 \\ \psi &= -\frac{1}{2} Q_2 & \text{при } \theta &= \pi, & \tau_2 < \tau < \tau_0 \\ \psi &= \frac{1}{2} Q_1 & \text{при } \tau &= \tau_0, & 0 < \theta < m \\ \psi &= -\frac{1}{2} Q_2 & \text{при } \tau &= \tau_0, & m < \theta < \pi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к нахождению решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Чаплыгина

$$4\tau^2(1-\tau)\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + 4\tau[1+(\beta-1)\tau]\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + [1-(2\beta+1)\tau]\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0 \quad (1.3)$$

в областях полукруга. Здесь $\beta = 1/(\kappa - 1)$, $\kappa = c_p/c_v$.

Решение задачи будем искать в виде

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_{n/2}(\tau) \sin n\theta \quad (1.4)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} Q_1 \frac{\pi - \theta}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n Z_{n/2}(\tau) + B_n \zeta_{n/2}(\tau)\} \sin n\theta \quad (1.5)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2} \left(Q_1 - Q_0 \frac{\theta}{\pi} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n Z_{n/2}(\tau) + D_n \zeta_{n/2}(\tau)\} \sin n\theta \quad (1.6)$$

Здесь индекс при ψ соответствует номеру подобласти полукруга, в которой ищется данное решение, $Z_{n/2}(\tau)$ — интеграл уравнения

$$4\tau^2(1-\tau)Z''_{n/2} + 4\tau[1+(\beta-1)\tau]Z'_{n/2} - n^2[1-(2\beta+1)\tau]Z_{n/2} = 0 \quad (1.7)$$

регулярный при $\tau = 0$, рассмотренный Чаплыгиным [1]; $\zeta_{n/2}(\tau)$ — функция Черри [4] — второй линейно независимый интеграл уравнения (1.7), рассмотренный С. В. Фальковичем [2]. Коэффициенты a_n, A_n, B_n, C_n, D_n подлежат определению.

Функции тока, определяемые посредством (1.4) — (1.6), удовлетворяют граничным условиям (1.1). Потребуем теперь, чтобы выполнялись условия.

1. Функция ψ_3 удовлетворяет условиям (1.2);

2. Функция ψ_2 является аналитическим продолжением ψ_1 из области (1) в область (2), а ψ_3 — аналитическим продолжением ψ_2 из области (2) в область (3)

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_2, & \frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} &= \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} & \text{при } \tau &= \tau_1 \\ \psi_2 &= \psi_3, & \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} &= \frac{\partial\psi_3}{\partial\tau} & \text{при } \tau &= \tau_2 \end{aligned} \quad (0 < \theta < \pi) \quad (1.8)$$

Условия (1.2) и (1.8) приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned} C_n Z_{n/2}(\tau_0) + D_n \zeta_{n/2}(\tau_0) &= -\frac{Q_0}{n\pi} \cos nm \\ (A_n - a_n) Z_{n/2}(\tau_1) + B_n \zeta_{n/2}(\tau_1) &= -\frac{Q_1}{n\pi} \\ (A_n - a_n) Z'_{n/2}(\tau_1) + B_n \zeta'_{n/2}(\tau_1) &= 0 \\ (A_n - C_n) Z_{n/2}(\tau_2) + (B_n - D_n) \zeta_{n/2}(\tau_2) &= (-1)^n \frac{Q_2}{n\pi} \\ (A_n - C_n) Z'_{n/2}(\tau_2) + (B_n - D_n) \zeta'_{n/2}(\tau_2) &= 0 \end{aligned}$$

Так как вронскиан равен

$$W_{n/2}(\tau) = W\{Z_{n/2}(\tau), \zeta_{n/2}(\tau)\} = \frac{n}{2\tau} (1 - \tau)^\beta$$

то окончательное решение задачи будет иметь вид

$$\psi_1 = \frac{Q_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_{n/2}^{(1)}(\tau) \sin n\theta \quad (1.9)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} Q_1 \frac{\pi - \theta}{\pi} + \frac{Q_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_{n/2}^{(2)}(\tau) \sin n\theta \quad (1.10)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2} \left(Q_1 - Q_0 \frac{\theta}{\pi} \right) + \frac{Q_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_{n/2}(\tau) \sin n\theta \quad (1.11)$$

Здесь

$$f_{n/2}^{(1)}(\tau) = \left[-\cos nm + \frac{2\sigma_1\tau_1}{n(1-\tau_1)^\beta} T'_{n/2}(\tau_1, \tau_0) + \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{2\sigma_2\tau_2}{n(1-\tau_2)^\beta} T'_{n/2}(\tau_2, \tau_0) \right] \frac{Z_{n/2}(\tau)}{Z_{n/2}(\tau_0)}$$

$$f_{n/2}^{(2)}(\tau) = \frac{\sigma_1}{(1-\tau_1)^\beta} \frac{Z_{n/2}(\tau_1)}{Z_{n/2}(\tau_0)} x_{n/2}(\tau_1) T_{n/2}(\tau, \tau_0) + \\ + \left[-\cos nm + (-1)^n \frac{2\sigma_2\tau_2}{n(1-\tau_2)^\beta} T'_{n/2}(\tau_2, \tau_0) \right] \frac{Z_{n/2}(\tau)}{Z_{n/2}(\tau_0)}$$

$$f_{n/2}(\tau) = -\frac{Z_{n/2}(\tau)}{Z_{n/2}(\tau_0)} \cos nm + \left[\frac{\sigma_1}{(1-\tau_1)^\beta} \frac{Z_{n/2}(\tau_1)}{Z_{n/2}(\tau_0)} x_{n/2}(\tau_1) + \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{\sigma_2}{(1-\tau_2)^\beta} \frac{Z_{n/2}(\tau_2)}{Z_{n/2}(\tau_0)} x_{n/2}(\tau_2) \right] T_{n/2}(\tau, \tau_0)$$

где

$$T_{n/2}(\tau, \tau_0) = Z_{n/2}(\tau) \zeta_{n/2}(\tau_0) - \zeta_{n/2}(\tau) Z_{n/2}(\tau_0)$$

$$T'_{n/2}(\tau_\nu, \tau_0) = [T'_{n/2}(\tau, \tau_0)]_{\tau=\tau_\nu}, \quad \sigma_1 = Q_1/Q_0, \quad \sigma_2 = Q_2/Q_0$$

$$x_{n/2}(\tau) = x_{n/2}(\tau) = \frac{2\tau}{n} \frac{Z'_{n/2}(\tau)}{Z_{n/2}(\tau)} - \text{функция Чаплыгина}$$

Для дальнейшего заметим, что

$$T'_{n/2}(\tau_\nu, \tau_\nu) = W_{n/2}(\tau_\nu), \quad f_{n/2}(\tau_0) = -\cos nm$$

$$f'_{n/2}(\tau_0) = \frac{n}{2\tau_0} \left\{ -x_{n/2}(\tau_0) \cos nm + \sigma_1 \left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_1} \right)^\beta \frac{Z_{n/2}(\tau_1)}{Z_{n/2}(\tau_0)} x_{n/2}(\tau_1) + \right. \\ \left. + (-1)^n \sigma_2 \left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_2} \right)^\beta \frac{Z_{n/2}(\tau_2)}{Z_{n/2}(\tau_0)} x_{n/2}(\tau_2) \right\} \quad (1.12)$$

Из решения (1.9) — (1.12), как частные случаи, следует ряд известных результатов. Например, из (1.9) при $m = \pi/2$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$, $d_1 = d_2$ следует результат Н. А. Слезкина [5]. Можно также получить результаты В. И. Трошина [6,7] и Чаплыгина [1].

§ 2. Введем систему координат ξ, η с центром в точке $O'(-a, 0)$; ось ξ направим под углом m к оси x и вместо угла θ будем рассматривать угол $\vartheta = \theta - m$. В дальнейшем нас будет интересовать функция тока ψ_3 . В выбранной системе координат имеем [2]

$$\eta = \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{\nu} \int \left(2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sin \vartheta + \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \cos \vartheta \right) d\vartheta + \eta_0(\tau) \quad (2.1)$$

где $\eta_0(\tau)$ — произвольная функция.

Определим коэффициент сжатия струи. Под коэффициентом сжатия K несимметричной струи будем понимать отношение наименьшей ширины ветви к величине проекции ширины отверстия BC на ось η

$$K = \frac{d_0}{2h \sin m} \quad (2.2)$$

Непосредственно из фиг. 1 получим координаты η_B и η_C точек B и C

$$\eta_B = (a+h) \sin m + \frac{1}{2} d_1 \cos m, \quad \eta_C = (a-h) \sin m + \frac{1}{2} d_2 \cos m \quad (2.3)$$

С другой стороны, координаты точек B и C можно определить посредством (2.1). Полагая $\tau = \tau_0$ и интегрируя (2.1) на отрезках $[0, -m]$ и $[0, \pi - m]$ с учетом (1.12), получим η_B и η_C соответственно. Так как при $\vartheta = 0$ должно быть $\eta = 0$, то $\eta_0(\tau) = 0$.

Определяя из (2.3) величину $2h \sin m$ и используя соотношение

$$\eta_B - \eta_C = \frac{Q_0 \sin m}{2\nu_0 (1-\tau_0)^\beta} \left(\frac{8\tau_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} f'_n(\tau_0) + \sin m \right)$$

получим при помощи (2.2) формулу для коэффициента сжатия струи

$$\frac{1}{K} = \sin m \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n^2-1} \chi'_n(\tau_0) + \sin m \right) - \frac{d_1 - d_2}{2d_0} \cos m \quad (2.4)$$

где

$$\chi'_n(\tau_0) = -x_n(\tau_0) \cos 2nm + \sigma_1 \left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_1} \right)^\beta \frac{Z_n(\tau_1)}{Z_n(\tau_0)} x_n(\tau_1) + \sigma_2 \left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_2} \right)^\beta \frac{Z_n(\tau_2)}{Z_n(\tau_0)} x_n(\tau_2)$$

К этой формуле необходимо добавить уравнение неразрывности

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

которое можно привести к виду

$$2d_0 = \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_0} \right)^\beta d_1 + \left(\frac{\tau_2}{\tau_0} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_0} \right)^\beta d_2 \quad (2.5)$$

Рассмотрим ряд частных случаев, вытекающих из формулы (2.4). В случае бесконечно широких каналов ($\tau_1 = \tau_2 = 0$) имеем

$$\frac{1}{K} = \sin m \left(\sin m - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n^2-1} x_n(\tau_0) \cos 2nm \right) \left(1 + \frac{d_1 - d_2}{4h} \operatorname{ctg} m \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Здесь разность $d_1 - d_2$ следует понимать как расстояние между точками B и C по оси y .

При $m = \pi/2$ из (2.6) следует формула Чаплыгина [1]

$$\frac{1}{K} = 1 - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^2 - 1} x_n(\tau_0)$$

При $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$ получим случай соударения свободных струй. В этом случае (2.4) принимает вид

$$\frac{1}{K} = \sin m \left(\sin m + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n^2 - 1} (1 - \cos 2nm) x_n(\tau_0) \right) - \frac{1-k}{1+k} \cos m \quad \left(k = \frac{d_2}{d_1} \right)$$

При $m = \pi/2$, $\tau_2 = \tau_1$, $d_2 = d_1$ получим коэффициент K для задачи об истечении газа из сосуда, рассмотренной В. И. Трошиным [7]. Формула в этом случае будет

$$\frac{1}{K} = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4n}{4n^2 - 1} x_n(\tau_0) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - \tau_0}{1 - \tau_1} \right)^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n^2 - 1} \frac{Z_n(\tau_1)}{Z_n(\tau_0)} x_n(\tau_1)$$

Случай, когда $m = \pi/2$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0 < \tau_* = 1/(2\beta + 1)$, $d_1 = d_2$ соответствует задаче о лобовом соударении двух газовых струй одинаковой ширины, рассмотренной Н. А. Слезкиным [5].

В случае несжимаемой жидкости (2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} = \sin m \left\{ \sin m + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{1 + k\lambda} \left(\frac{v_1}{v_0} + \frac{v_0}{v_1} \right) \operatorname{ar th} \frac{v_1}{v_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k\lambda}{1 + k\lambda} \left(\frac{v_2}{v_0} + \frac{v_0}{v_2} \right) \operatorname{ar th} \frac{v_2}{v_0} + \cos m \ln \operatorname{tg} \frac{m}{2} \right] \right\} - \frac{d_1 - d_2}{2d_0} \cos m \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $\lambda = v_2/v_1$, а d_0 определяется из уравнения неразрывности

$$v_1 d_1 + v_2 d_2 = 2v_0 d_0.$$

При $m = \pi/2$, $k = \lambda = 1$ из (2.7) получим выражение [7]

$$\frac{1}{K} = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{v_1}{v_0} + \frac{v_0}{v_1} \right) \operatorname{ar th} \frac{v_1}{v_0} \quad (2.8)$$

При $1/\lambda = \operatorname{tg}(v/2)$ это выражение приводится к виду, указанному Жуковским [8]. При $v_0 \rightarrow \infty$ из (2.8) получим формулу Кирхгофа

$$\frac{1}{K} = 1 + \frac{2}{\pi}$$

Вернемся к рассмотрению формулы (2.6). В случае, когда $\tau_0 = \tau_*$, можно использовать асимптотическое разложение Ф. И. Франкля [9] для функции Чаплыгина

$$x_n(\tau_*) = \frac{C_0}{(2n)^{1/3}} + \frac{C_1}{2n} + \frac{C_2}{(2n)^{5/3}} + \frac{C_3}{(2n)^{7/3}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (2.9)$$

Полученные после подстановки (2.9) в (2.6) ряды нуждаются в усилении сходимости. Для этого воспользуемся формулой Линделефа [10]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s} = \Gamma(1-s) (-\ln x)^{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(s-n) \frac{(\ln x)^n}{n!} \quad (2.10)$$

справедливой на комплексной плоскости x с разрезом вдоль действительной оси от 1 до ∞ , при $\text{Re}S > 1$ и S не являющимися целыми. Здесь $\Gamma(t)$ — функция Эйлера, $\zeta(t)$ — функция Римана.

В частном случае, когда $|x| = 1$, формула Линделефа имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^s} = + \Gamma(1-s) \theta^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(s-2n)}{(2n)!} \theta^{2n} \quad (2.11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^s} = \Gamma(1-s) \theta^{s-1} \cos \frac{s\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(s-2n-1)}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \quad (2.12)$$

Главные члены этих разложений совпадают с точностью до знака с выражениями, приведенными А. Зигмундом [1] и С. В. Фальковичем [12]. Ряды в (2.11) и (2.12) сходятся абсолютно при $|\theta| < 2\pi$.

Используя тождество

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{16n^4} + \frac{1}{16n^4(4n^2-1)} \quad (2.13)$$

и подставляя (2.11) и (2.13) в (2.6), получим приближенно

$$\begin{aligned} -\frac{1}{K} = \sin m \left\{ (1+c_1) \sin m + 2^{-4/3} \left(c_0 + c_2 2^{-4/3} + \frac{1}{4} c_3 \right) \frac{\cos 2m}{3\pi} - \right. \\ \left. - 2\varphi(m) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u_n}{(2n)!} (2m)^{2n} \right\} \left[1 + \frac{d_1-d_2}{4h} \text{ctg } m \right]^{-1} \quad (2.14) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(m) = -\frac{1}{\pi} c_1 + c_0 \frac{m^{1/3}}{\Gamma(4/3)} + c_2 \frac{m^{5/3}}{\Gamma(8/3)} - (c_0 + c_3) \frac{m^{7/3}}{\Gamma(10/3)} - c_2 \frac{m^{11/3}}{\Gamma(14/3)} + c_3 \frac{m^{13/3}}{\Gamma(16/3)} \\ u_n = c_0 2^{-1/3} \zeta\left(\frac{4}{3} - 2n\right) + c_2 2^{-5/3} \zeta\left(\frac{8}{3} - 2n\right) + (c_0 + c_3) 2^{-7/3} \times \\ \times \zeta\left(\frac{10}{3} - 2n\right) + c_2 2^{-11/3} \zeta\left(\frac{14}{3} - 2n\right) + c_3 2^{-13/3} \zeta\left(\frac{16}{3} - 2n\right) \end{aligned}$$

Коэффициенты в (2.9) определены С. В. Фальковичем [13]

$$c_0 = -(\kappa + 1)^{1/3} \mu'(0), \quad c_1 = -\frac{2\kappa + 5}{10}, \quad c_2 = \frac{24\kappa^2 + 70\kappa + 85}{140(\kappa + 1)^{1/3}} [\mu'(0)]^2$$

причем для коэффициента c_3 расчеты дают следующее значение:

$$c_3 = -\frac{1343\kappa^3 - 19530\kappa^2 + 3990\kappa + 17150}{18900(\kappa + 1)^{2/3}} \mu'(0)$$

где

$$\mu'(0) = -3^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} = -0.72898$$

Остается определить угол выброса струи m , входящий в формулы для коэффициента сжатия. Взяв за контрольную поверхность контур, ограничивающий область течения (фиг. 1), и применяя известную теорему Эйлера, получим соотношение

$$d_1(p_1 + \rho_1 v_1^2) - d_2(p_2 + \rho_2 v_2^2) = 2d_0(p_0 + \rho_0 v_0^2) \cos m \quad (2.15)$$

выражающее закон количеств движения.

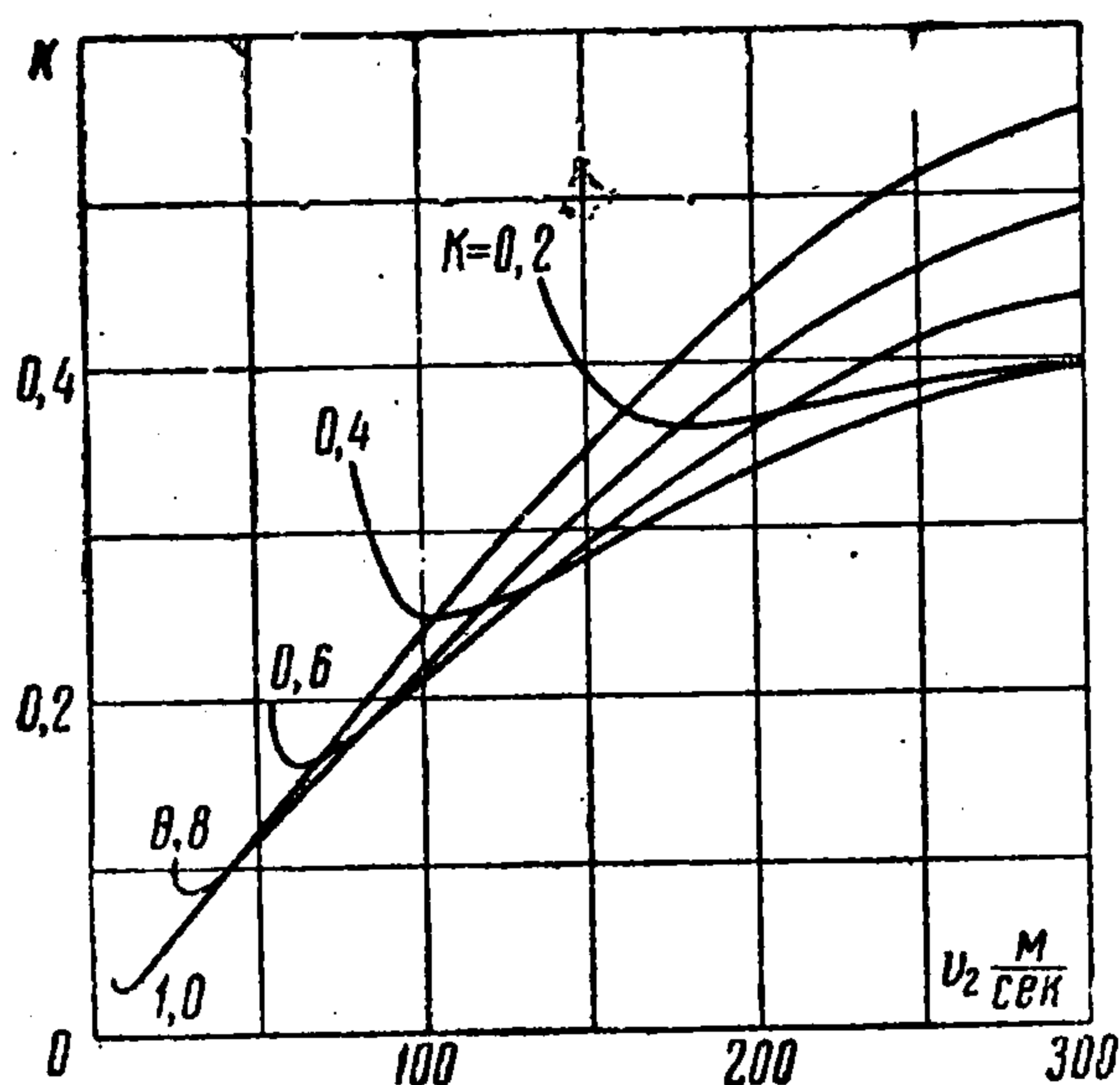
Здесь индексы 1, 2 и 0 относятся к величинам в сечениях AE , DF , MN соответственно. Используя соотношения

$$p_n = p^0 (1 - \tau_n)^{\beta+1}, \quad \rho_n = \rho^0 (1 - \tau_n)^\beta \quad (n = 1, 2)$$

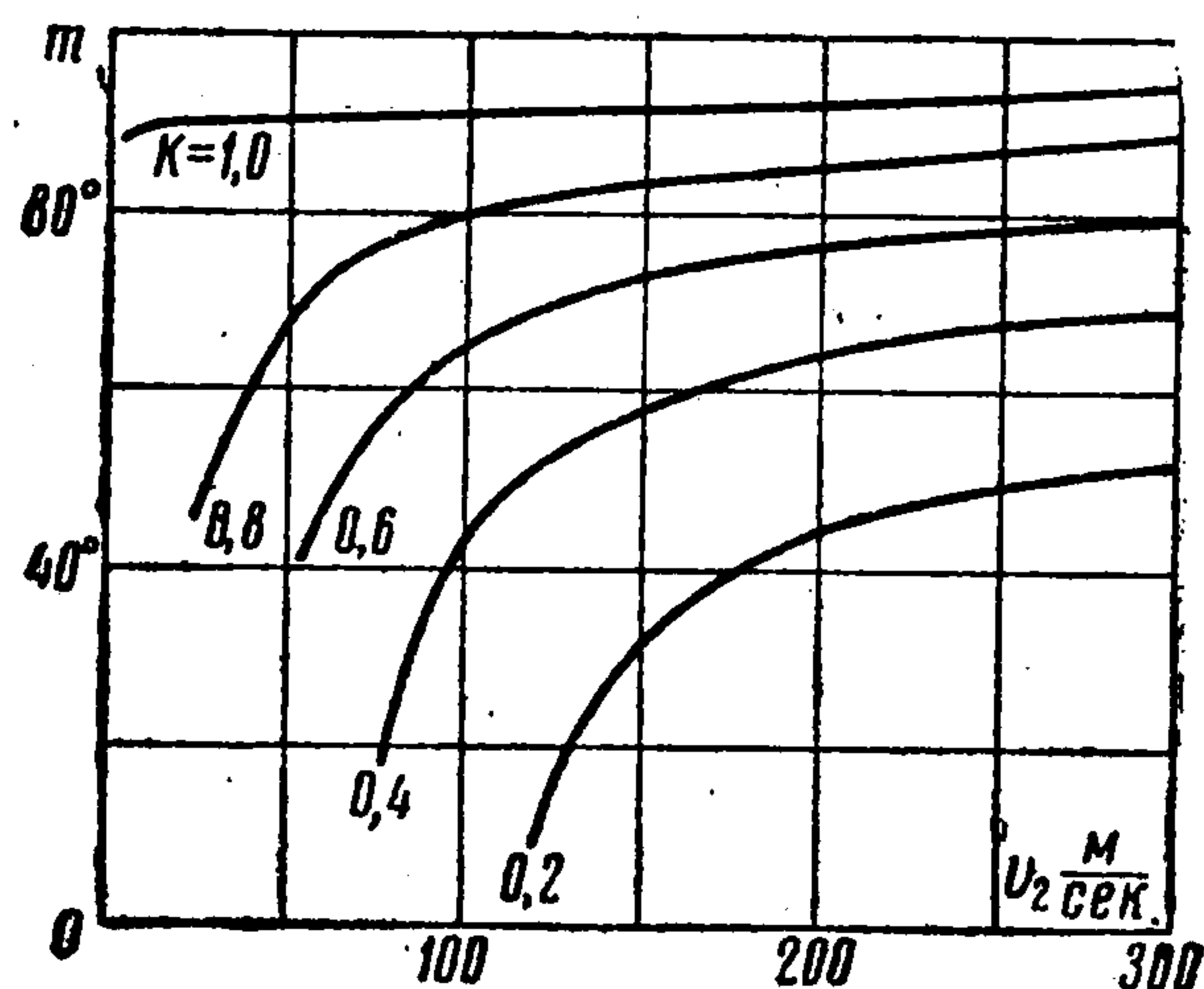
где p^0 , ρ^0 — параметры торможения газа, и уравнение неразрывности (2.5), приведем (2.15) к форме

$$\cos m = \left(\frac{\tau_0}{\tau_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 + (2\beta + 1)\tau_1}{1 + (2\beta + 1)\tau_0} \frac{1 - k \left(\frac{1 - \tau_2}{1 - \tau_1}\right)^\beta \frac{1 + (2\beta + 1)\tau_2}{1 + (2\beta + 1)\tau_1}}{1 - k \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{1/2} \left(\frac{1 - \tau_2}{1 - \tau_1}\right)^\beta} \quad (2.16)$$

По формулам (2.2), (2.5) и (2.16) были произведены численные расчеты при $h = 5$ м, $d_1 = 5$ м, $v_0 = a = 341,1$ м/сек, $x = 1.4$. Результаты представлены в виде графиков на фиг. 3 и 4, где $k = d_1/d_2$.



Фиг. 3



Фиг. 4

§ 3. Как было показано Л. И. Седовым [14], для любой несимметричной свободной струи при $\tau_0 = \tau_s$ на поверхности выравнивание скоростей происходит на конечном расстоянии от начала координат вдоль прямолинейного отрезка, за которым вниз по течению устанавливается однородный звуковой поток. Имея в виду уравнения Чаплыгина

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2\tau}{(1 - \tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = - \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1 - \tau)^{\beta+1}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

и дифференциальное соотношение

$$d\xi = \frac{\cos \vartheta}{v} d\varphi - \frac{\sin \vartheta}{(1 - \tau)^\beta} d\psi$$

где φ — потенциал скорости, получим на поверхности струи

$$d\xi = \frac{2\tau_s}{(1 - \tau_s)^\beta} \frac{\cos \vartheta}{a_*} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)_{\tau=\tau_s} d\vartheta \quad (3.1)$$

Интегрируя (3.1) на отрезке $[-m, \pi - m]$, получим формулу для длины участка, на котором происходит выравнивание скоростей

$$\xi_* = \frac{2d_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n^2 - 1} \chi_n'(\tau_s) \cos m \quad (3.2)$$

Здесь $2d_0$ определяется из (2.5).

Результаты, полученные выше при истечении из каналов с параллельными стенками, как было показано Чаплыгиным [1], можно обобщить на случай, когда стенки канала образуют между собой угол $q\pi$ ($q < 1$).

В этом случае, например, формула (2.6), которую для простоты рассмотрим при $d_1 = d_2$ и $m = \pi/2$, примет вид

$$\frac{1}{K} = \frac{2}{\pi} \sin \frac{1}{2} q\pi \left\{ \frac{1}{q} + \Phi(q/2) - q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4n}{4n^2 - q^2} x_{n/q}(\tau_0) \right\} \quad (3.3)$$

Здесь

$$\Phi\left(\frac{1}{2}q\right) = \frac{1}{2} \left[\beta\left(1 - \frac{1}{2}q\right) - \beta\left(1 + \frac{1}{2}q\right) \right]$$

$$\beta(x) = \frac{1}{2} \left[\psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \right] \quad \left(\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right)$$

Функция $\beta(x)$ затабулирована [15]. Для несжимаемой жидкости (3.3) будет иметь вид

$$\frac{1}{K} = \frac{2}{\pi} \sin \frac{1}{2} q\pi \left\{ \frac{1}{q} + \Phi\left(\frac{q}{2}\right) + q\Psi\left(\frac{q}{2}\right) \right\} \quad (3.4)$$

$$\Psi\left(\frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\beta\left(1 - \frac{q}{2}\right) + \beta\left(1 + \frac{q}{2}\right) \right]$$

В силу известных соотношений [15]

$$\beta(x+1) = \frac{1}{x} - \beta(x), \quad \beta(1/2) = \frac{\pi}{2}, \quad \beta(3/2) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

из (3.4) при $q = 1$ получим формулу Кирхгофа.

Поступила 26 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
2. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 4, стр. 459—464.
3. Лаврентьев М. А. Кумулятивный заряд и принципы его работы, УМН, 1957, т. XII, вып. 4, стр. 41—56.
4. Cheng T. M. Asymptotic Expansions for the Hypergeometric Functions Occuring in Gas-Flow Theory. Proc. Roy. Soc., 1950, ser. A, vol. 202, No. 1071.
5. Слезкин Н. А. Об ударе плоской газовой струи в безграничную стенку. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 2, стр. 227—230.
6. Трошин В. И. Обтекание пластинки струей газа, вытекающей из канала ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4, стр. 766—769.
7. Трошин В. И. Две задачи о дозвуковых газовых струях. ВМУ, сер. 1, 1960, № 2, стр. 63—64.
8. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа, Собр. соч., т. II, М., Гостехиздат, 1949.
9. Франкль Ф. И. Асимптотическое разложение функций С. А. Чаплыгина. ДАН СССР, 1947, т. LVIII, № 5.
10. Guedell C. On a function which occurs in the theory of the Structure of polymers, Annals of Mathematics, 1945, vol. 46, No. I, 144—157.
11. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939, 131.
12. Фалькович С. В. Околозвуковые плоские течения газа с особыми точками на звуковой линии, ПММ, 1961, т. LXXV, вып. 2, стр. 223—224.
13. Фалькович С. В. Асимптотическое разложение функции Чаплыгина. Изв. вузов, сер. математ., 1960, № 2(15), стр. 209—212.
14. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 436—439.
15. Zuzkowsk i M. Tablice funkcji Eulera i pokrewnych, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1954.