Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК ОКОЛО НАКЛОНЕННОГО КРУГОВОГО КОНУСА

Б. М. Булах

(Саратов)

Невязкий сверхзвуковой поток около кругового конуса при нулевом угле атаки изучен в работах Тейлора [1] и Макколла [2]. Обтекание конуса под углом атаки α было рассмотрено Стоуном [3-5], который искал решение в виде степенных рядов по α и ограничивался членами $O(\alpha^2)$.

Ферри [6] показал, что решение Стоуна неверно в окрестности поверхности конуса. Он ввел концепцию вихревого слоя толщиной $O(\alpha)$, прилегающего к поверхности конуса, в котором параметры потока, кроме давления и нормальной компоненты скорости, могут существенно отличаться от значений, даваемых теорией Стоуна. Исходя из этих представлений, Ферри дал поправочные формулы для компонент скорости на поверхности конуса с точностью $O(\alpha)$. Недавно Виллетт [7] нашел компоненты скорости на поверхности конуса с точностью $O(\alpha^2)$. Он исходил из предположений, что теория Стоуна дает правильное распределение давления на поверхности конуса и правильно определяет скачок энтропии при переходе через ударную волну в плоскости симметрии потока. Свои предположения Виллетт обосновывает в основном тем, что эти величины, вычисленные по теории Стоуна, хорошо соответствуют экспериментальным данным.

Ниже вышеуказанные предположения Ферри и Виллетта обосновываются аналитически. Показано, что вне вихревого слоя толщиной $O(\alpha)$ решение представляется разложением Стоуна. Внутри вихревого слоя найдено решение с точностью $O(\alpha)$, которое вне этого слоя преобразуется в решение Стоуна, т. е. оно будет аналитическим продолжением решения Стоуна в вихревом слое. Таким образом, получено решение задачи с точностью $O(\alpha)$ во всей области между поверхностью конуса и ударной волной. Поведение линий постоянной энтропии в найденном решении соответствует качественному анализу Ферри [6]. Показано, что поверхность конуса является особой: на ней обращаются в бесконечность производные по нормали от энтропии S, радиальной u и окружной w, составляющих скорости (что нужно учитывать в численных методах). Установлено, что w дается теорией Стоуна правильно всюду (по крайней мере в членах $O(\alpha)$).

Выяснено, что логарифмические особенности на поверхности конуса в теории Стоуна появляются за счет обрыва рядов по α, представляющих решение, на членах $O(\alpha^2)$; при учете всех членов с α^n (n — натуральное число), этих особенностей не будет.

1. Рассмотрим стационарное обтекание кругового конуса с полураствором β однородным сверхзвуковым потоком газа под углом атаки α в сферической системе координат r, θ, φ с осью, совпадающей с осью конуса (фиг. 1).

Обозначим через u, v, w компоненты вектора скорости частиц газа в направлении увеличения соответственно r, θ, φ, через p, ρ — давление, плотность. Выражение для удельной энтропии S имеет вид

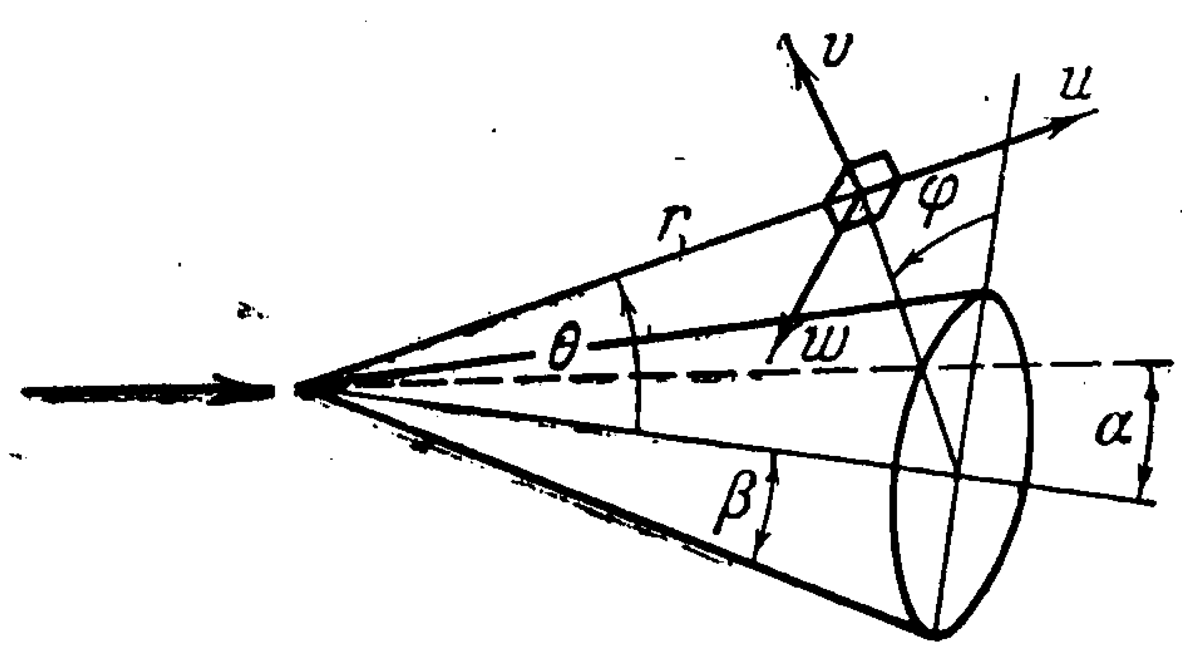
$$S = c_v \ln (\rho / \rho^\gamma) + S_0$$

Здесь c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, γ — адиабатический индекс, S_0 — начальное значение S. Задачу рассматриваем в рамках теории конических течений, когда u, v, w, p, ρ не зависят от r. Уравнения неразрывности, количества движения, энергии запишутся в этом случае в виде

$$\begin{gathered}
2\rho u \sin\theta + (\rho v \sin\theta)_\theta + (\rho w)_\varphi = 0 \\
v u_\theta + u_\varphi w \csc\theta - v^2 - w^2 = 0 \\
v v_\theta + v_\varphi w \csc\theta + \rho^{-1} p_\theta + uv - w^2 \operatorname{ctg}\theta = 0 \\
v w_\theta + w_\varphi w \csc\theta + \rho^{-1} p_\varphi \csc\theta + w(u + v \operatorname{ctg}\theta) = 0 \\
v(\rho / \rho^\gamma)_\theta + w \csc\theta (\rho / \rho^\gamma)_\varphi = 0
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Индексы θ и φ означают производные. Так как коническое течение образовалось из однородного потока, то имеет место интеграл Бернулл

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{V_m{}^2}{2} \tag{1.2}$$



Здесь V_m — максимальная скорость однородного потока. При помощи (1.2) можно исключить p или ρ и получить систему для четырех искомых функций. Однако в качестве термодинамической функции удобно ввести $s = S[\gamma(\gamma - 1)c_v]^{-1}$; тогда из (1.1.) получается [6] система уравнений для u, v, w, s

$$\begin{gathered}
L_1 = (a^2 - v^2)\sin\theta\, v_\theta - (w^2 - a^2) w_\varphi - vw(\sin\theta w_\theta + v_\varphi) - \\
- (v^2 + w^2 - 2a^2) u \sin\theta + a^2 v \sin\theta = 0 \\
L_2 = \sin\theta\, v u_\theta + w u_\varphi - \sin\theta (v^2 + w^2) = 0 \\
L_3 = \sin\theta v s_\theta + w s_\varphi = 0 \qquad \left(a^2 = \tfrac{\gamma-1}{2}(V_m{}^2 - u^2 - v^2 - w^2)\right) \\
L_4 = \sin\theta v w_\theta - a^2 s_\varphi - u u_\varphi - v v_\varphi + w(\sin\theta u + \cos\theta v) = 0
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь a — местная скорость звука.

2. Стоун [3-5] показал, что решение задачи о круговом конусе с точностью $O(\alpha^2)$ имеет вид

$$\begin{gathered}
u = u_0 + \alpha U_1 \cos\varphi + \alpha^2 (U_2 + U_3 \cos 2\varphi) \\
v = v_0 + \alpha V_1 \cos\varphi + \alpha^2 (V_2 + V_3 \cos 2\varphi) \\
w = \alpha W_1 \sin\varphi + \alpha^2 W_2 \sin 2\varphi \\
p / p_0 = 1 + \alpha P_1 \cos\varphi + \alpha^2 (P_2 + P_3 \cos 2\varphi) \\
\rho / \rho_0 = 1 + \alpha R_1 \cos\varphi + \alpha^2 (R_2 + R_3 \cos 2\varphi)
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $u_0, v_0, \ldots, \rho_0$ — параметры потока при $\alpha = 0$; функции $U_1, U_2, \ldots, R_3$ зависят только от θ. Кроме того [7],

$$s = s_0 + \alpha s_1 \cos\varphi + \alpha^2 (s_2 + s_3 \cos 2\varphi) \tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered}
s_1 = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}(P_1 - \gamma R_1), \qquad s_2 = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\left(\frac{\gamma}{4} R_1{}^2 - \frac{1}{4} P_1{}^2 + P_2 - \gamma R_2\right) \\
s_3 = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\left(\frac{\gamma}{4} R_1{}^2 - \frac{1}{4} P_1{}^2 + P_3 - \gamma R_3\right)
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.1), (2.2) в $L_3 = 0$, (1.3), получим

$$s_{0\theta} = 0, \qquad s_{1\theta} = 0, \qquad s_{2\theta} = -s_{3\theta} = \frac{W_1 s_1}{2v_0 \sin\theta} \tag{2.4}$$

Будем в дальнейшем обозначать значение функций при $\theta = \beta$ крестиком вверху: $f(\beta) = f^\times$.

В окрестности точки $\theta = \beta$ имеем $v_0 = -2u_0^\times(\theta - \beta) + \ldots$, поэтому из (2.4) получим в этой окрестности

$$s_1 = -s_3 = -\frac{W_1^\times s_1}{4u_0^\times \sin\beta} \ln(\theta - \beta) + \ldots. \tag{2.5}$$

Так как энтропия в потоке должна быть ограниченной функцией, то из (2.5) ясно видно, что теория Стоуна не годится в окрестности значения $\theta = \beta$.

3. Найдем решение системы (1.3) в окрестности $\theta = \beta$ и потребуем, чтобы вне этой окрестности оно преобразовывалось в решение Стоуна. При нахождении решения сделаем предположения, которые ниже оправданы.

1) Компоненты скорости в случае наклоненного конуса отличаются от таковых при $\alpha = 0$ на величины $O(\alpha)$.

2) Теория Стоуна правильно определяет w с точностью $O(\alpha)$ всюду. Из этих предположений и (2.1) следует, что в окрестности $\theta = \beta$ составляющую скорости w можно представить в виде

$$w = \alpha W_1^\times \sin\varphi + O[\alpha(\theta - \beta)^{1/2}] + o(\alpha) \tag{3.1}$$

а из уравнения $L_1 = 0$ (1.3) получим

$$v = -2u_0^\times(\theta - \beta) + O[(\theta - \beta)^2] + O(\alpha)(\theta - \beta) \tag{3.2}$$

Первые два члена (3.2) представляют v_0, последний член появляется за счет наклона конуса.

4. Найдем s в окрестности $\theta = \beta$. Подставляя (3.1), (3.2) в $L_3 = 0$, (1.3), получим уравнение

$$\sin\beta\{-2u_0^\times(\theta - \beta) + O[(\theta - \beta)^2] + O(\alpha)(\theta - \beta)\} s_\theta +$$
$$+ \{\alpha W_1^\times \sin\varphi + O[\alpha(\theta - \beta)^{1/2}] + o(\alpha)\} s_\varphi = 0$$

которое, после выбрасывания малых величин из коэффициентов, можно записать в виде

$$(\theta - \beta) s_\theta - \alpha h \sin\varphi\, s_\varphi = 0, \qquad h = -\frac{W_1^\times}{2u_0^\times \sin\beta} > 0 \tag{4.1}$$

Оценка влияния отброшенных членов будет дана ниже. Общее решение (4.1) имеет вид

$$s - s_0 = f(z), \qquad z = \frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}(\theta - \beta)^{2h\alpha} \tag{4.2}$$

Так как $\alpha \ln(\theta - \beta) = O(\alpha \ln \alpha)$ есть величина малая при малых α, то при $\theta - \beta = O(\alpha)$ для z имеем разложение в степенной ряд по α

$$z = \frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi} e^{2h\alpha \ln(\theta - \beta)} = \frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}[1 + 2h\alpha \ln(\theta - \beta) + \ldots] \tag{4.3}$$

Если теория Стоуна еще верна при $\theta-\beta=O(\alpha)$, то (4.2) должно преобразовываться при $\theta-\beta=O(\alpha)$ в решение Стоуна. Разлагая выражения разности (4.2) для $s-s_0$ в ряд α при $\theta-\beta=O(\alpha)$ с учетом (4.3)

$$s-s_0=f\left(\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right)+\ldots;$$

приравнивая первый член этого разложения первому члену представления для $s-s_0$ в решение Стоуна (2.1), получим

$$f\left(\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right)=\alpha s_1\cos\varphi, \quad \text{или} \quad f(z)=\alpha s_1\frac{z-1}{z+1} \tag{4.4}$$

Найдем теперь члены с α^2 в разложении $s-s_0$ по степеням α при $\theta-\beta=O(\alpha)$. Из (4.2)—(4.4) получим

$$s-s_0=\alpha s_1\cos\varphi+\alpha^2\left[\frac{s_1h}{2}\ln(\theta-\beta)-\frac{s_1h}{2}\ln(\theta-\beta)\cos 2\varphi\right]+\ldots \tag{4.5}$$

Если учесть выражение (4.1) для h, то из (2.2)—(2.5) следует, что (4.5) тождественно с выражением (2.2). (В расчет принимаются только первые члены функций в разложение их по $\theta-\beta$, так как следующие члены определяются величинами, отброшенными при выводе (4.1).)

5. Найдем u. Представим u в виде $u=u_0+u_1$. Из $L_4=0$, (1.3) и наших предположений следует, что

$$w=\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times}\sin\beta}s_\varphi+\frac{1}{\sin\beta}u_{1\varphi}+O[\alpha(\theta-\beta)^{1/2}]+o(\alpha) \tag{5.1}$$

Подставляя (5.1) в $L_2=0$, $L_3=0$, отбрасывая малые величины, получим

$$-\sin\beta 2u_0^{\times}(\theta-\beta)u_{1\theta}+\left(\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times}\sin\beta}s_\varphi+\frac{1}{\sin\beta}u_{1\varphi}\right)u_{1\varphi}=$$
$$=\sin\beta\left(\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times}\sin\beta}s_\varphi+\frac{1}{\sin\beta}u_{1\varphi}\right)^2 \tag{5.2}$$

$$-\sin\beta\, 2u_0^{\times}(\theta-\beta)s_\theta+\left(\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times}\sin\beta}s_\varphi+\frac{1}{\sin\beta}u_{1\varphi}\right)s_\varphi=0 \tag{5.3}$$

Умножая (5.3) на $a_0^{\times 2}/u_0^{\times}\sin\beta$, а (5.2) — на $\csc\beta$ и складывая, получим

$$-\sin\beta 2u_0^{\times}(\theta-\beta)\left(\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times}\sin\beta}s_\theta+\frac{1}{\sin\beta}u_{1\theta}\right)=0$$

Отсюда после приравнивания нулю выражения в скобке следует

$$u_1=-\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times}}(s-s_0)+\Phi(\varphi)$$

где $\Phi(\varphi)$ — произвольная функция φ. Определим ее из условия, что u при $\theta-\beta=O(\alpha)$ преобразуется в решение Стоуна. Положим

$$\Phi(\varphi)=\alpha\left(\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times}}s_1+U_1^{+}\right)\cos\varphi$$

тогда

$$u_1=u-u_0=-\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times}}(s-s_0-\alpha s_1\cos\varphi)+\alpha U_1^{\times}\cos\varphi \tag{5.4}$$

где s дается формулой (4.2).

Найдем разложение u по степеням α при $\theta-\beta=O(\alpha)$. Принимая во внимание (4.5), из (5.4) получим

$$u=u_0+\alpha U_1{}^\times\cos\varphi+\alpha^2\left[\frac{W_1{}^\times a_0{}^{\times 2}s_1}{4u_0{}^{\times 2}\sin\beta}\ln(\theta-\beta)-\right.$$
$$\left.-\frac{W_1{}^\times a_0{}^{\times 2}s_1}{4u_0{}^{\times 2}\sin\beta}\ln(\theta-\beta)\cos 2\varphi\right]+\ldots \tag{5.5}$$

То же самое получается из теории Стоуна. (Здесь также учитываются первые члены при разложении функций по $\theta-\beta$.) Действительно, из формулы (12) работы [4] следует, в принятых здесь обозначениях

$$U_2'-V_2=-U_3'+V_3=W_1\frac{U_1+W_1\sin\theta}{2v_0\sin\theta} \tag{5.6}$$

Из формул (19), (38), (39) работы [3] следует

$$U_1{}^\times+W_1{}^\times\sin\beta=-\frac{a_0{}^{\times 2}}{u_0{}^\times}s_1 \qquad \left(a_0{}^{\times 2}=\gamma\frac{p_0{}^\times}{\rho_0{}^\times},\ s_1=\frac{P_1{}^\times-\gamma R_1{}^\times}{\gamma(\gamma-1)}\right) \tag{5.7}$$

(см. (2.3), (2.4)). Из (5.6), (5.7) с учетом того, что в окрестности $\theta=\beta$

$$V_2,V_3=O(\theta-\beta),\qquad v_0=-2u_0{}^\times(\theta-\beta)+\ldots$$

получим

$$U_2=-U_3+\cdots=\frac{W_1{}^\times a_0{}^{\times 2}s_1}{4u_0{}^{\times 2}\sin\beta}\ln(\theta-\beta)+\cdots \tag{5.8}$$

Сравнивая (5.5) с (2.1) с учетом (5.8) устанавливаем, что эти выражения совпадают.

6. Найдем теперь w. Из (5.1), (5.4) следует

$$w=-\sin\varphi\frac{\alpha}{\sin\beta}\left(\frac{a_0{}^{\times 2}}{u_0{}^\times}s_1+U_1{}^\times\right)+O[\alpha(\theta-\beta)^{1/2}]+o(\alpha) \tag{6.1}$$

Найдем $U_1{}^\times$. Записывая уравнение Бернулли (1.2) для потока около наклоненного конуса, вычитая из него уравнение Бернулли для $\alpha=0$, подставляя в результат разложения (2.1), приравнивая нулю коэффициент при α, получим

$$u_0U_1+v_0V_1+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}(P_1-R_1)=0 \tag{6.2}$$

Из (6.2) при $\theta=\beta$ следует

$$U_1{}^\times=\frac{a_0{}^{\times 2}}{\gamma-1}\frac{R_1{}^\times-P_1{}^\times}{u_0{}^\times}$$

Подставляя $U_1{}^\times$, s_1 (2.3) в (6.1), получим

$$w=\alpha\frac{a_0{}^{\times 2}P_1{}^\times}{u_0{}^\times\gamma\sin\beta}\sin\varphi+O[\alpha(\theta-\beta)^{1/2}]+o(\alpha) \tag{6.3}$$

Преобразуем w, даваемое теорией Стоуна. Уравнение (17) работы [3] в принятых здесь обозначениях имеет вид

$$u_0'W_1'+(u_0+u_0'\operatorname{ctg}\theta)W_1-\frac{a_0{}^2P_1}{\gamma\sin\theta}=0$$

Из разложения $u_0'=v_0=-2u_0{}^\times(\theta-\beta)+\cdots$ в окрестности $\theta=\beta$, следует, что

$$W_1=\frac{a_0{}^{\times 2}P_1{}^\times}{\gamma u_0{}^\times\sin\beta}+O[(\theta-\beta)^{1/2}]\qquad \text{в окрестности } \theta=\beta$$

Следовательно, (2.1) можно представить в виде

$$w=\alpha\frac{a_0{}^{\times 2}P_1{}^\times}{\gamma u_0{}^\times\sin\beta}\sin\varphi+O[\alpha(\theta-\beta)^{1/2}]+o(\alpha) \tag{6.4}$$

Сравнивая (6.3) и (6.4), устанавливаем их тождественность.

7. Анализ полученного решения позволяет установить, что сделанные выше предположения оправданы и найденное решение, следовательно, будет аналитическим продолжением решения Стоуна в вихревом слое толщиной $O(\alpha)$. Из результатов п. 4, 5 становится ясным происхождение логарифмических особенностей в членах с α^2 в разложении u и ρ по степеням α (см. (2.1)). Эти особенности появляются за счет разложения в степенной ряд по α выражений типа $(\theta-\beta)^{2h\alpha}$. Если учесть все члены α^n (n — натуральное число) в подобных разложениях, то логарифмические особенности исчезнут, т. е. появление логарифмических особенностей в теории Стоуна связано с обрывом рядов по степеням α на членах, содержащих α^2.

8. Исследуем полученное решение в вихревом слое. Из (5.4), (4.2), (4.4) следует, что на поверхности конуса ($\theta=\beta$)

$$u = u_0^\times + \alpha\left[\frac{a_0^{\times 2}s_1}{u_0^\times} + \left(\frac{a_0^{\times 2}s_1}{u_0^\times} + U_1^\times\right)\cos\varphi\right] + o(\alpha) \tag{8.1}$$

Подставляя s_1 и $U_1^\times$ в (8.1), получим

$$\frac{u}{u_0^\times} = 1 + \alpha\left[\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times 2}}\,\frac{P_1^\times - \gamma R_1^\times}{\gamma(\gamma-1)} - \frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times 2}}\,\frac{P_1^\times}{\gamma}\cos\varphi\right] + o(\alpha) \tag{8.2}$$

Из (6.3) при $\theta=\beta$ следует

$$\frac{w}{u_0^\times} = \alpha\,\frac{a_0^{\times 2}P_1^\times}{u_0^{\times 2}\gamma\sin\beta}\sin\varphi + o(\alpha) \tag{8.3}$$

Формулы (8.2), (8.3) совпадают с формулами (46), (52) работы Виллетта [7]. (В них имеются еще члены $O(\alpha^2)$, которые тоже являются правильными.) Из формул (4.2), (4.4), (5.4), (6.3) следует, что s_θ, u_θ, w_θ при $\theta=\beta$ обращаются в бесконечность.

9. Исследуем поведение линий постоянной энтропии $s=\mathrm{const}$ вблизи поверхности конуса. Из формул (4.2), (4.4) получим

$$s - s_0 = \alpha s_1\,\frac{(1+\cos\varphi)(\theta-\beta)^{2h\alpha} + \cos\varphi - 1}{(1+\cos\varphi)(\theta-\beta)^{2h\alpha} - \cos\varphi + 1} + O(\alpha), \qquad h>0 \tag{9.1}$$

При $\varphi=\pi$ и на поверхности конуса, $\theta=\beta$, $s-s_0=-\alpha s_1$; при $\varphi=0$ имеем $s-s_0=\alpha s_1$; другие линии $s=\mathrm{const}$ сходятся в точку $\theta=\beta$, $\varphi=0$, где имеется особенность Ферри, так как линии $s=\mathrm{const}$ согласно (9.1) в окрестности точки $\theta=\beta$, $\varphi=0$ имеют вид

$$\theta-\beta = \left[\frac{1+k}{2(1-k)}\right]^{\frac{1}{2h\alpha}}\varphi^{\frac{1}{h\alpha}} + \cdots, \qquad k = \frac{s-s^\times}{\alpha s_1} = \mathrm{const}$$

Из формулы (5.4) получаем, что пределы u различны при подходе к точке $\theta=\beta$, $\varphi=0$ по параболам

$$\theta-\beta = \mathrm{const}\,\varphi^{\frac{1}{h\alpha}} + \cdots$$

Таким образом, поведение линий постоянной энтропии в найденном решении соответствует анализу Ферри [6]. Отметим, что теория Стоуна верна вне слоя толщиной $O(\alpha)$ также и в окрестности особенности Ферри, так как из (9.1) следует, что $s-s_0=\alpha s_1\cos\varphi+\cdots$ при $\theta-\beta=O(\alpha)$ для всех φ.

10. В теории Стоуна граничное условие на поверхности конуса есть $v = 0$ ($V_1 = V_2 = V_3 = 0$, $\theta = \beta$). В окрестности $\theta = \beta$ решение не может быть аппроксимировано конечным отрезком степенного ряда по α, поэтому вышеуказанные граничные условия нуждаются в обосновании. Если принять эти условия, то v в теории Стоуна может быть представлено в виде

$$v - v_0 = \alpha V_1'^{\times} (\theta - \beta) \cos\varphi + O[\alpha^2 (\theta - \beta)] + o[\alpha(\theta - \beta)] \quad \left(V_1'^{\times} = \left(\frac{dV_1}{d\theta}\right)_{\theta=\beta}\right)$$

Отсюда

$$v - v_0 = \alpha^2 l V_1'^{\times} \cos\varphi + o(\alpha^2), \qquad \theta - \beta = l\alpha \qquad (l = \mathrm{const}) \qquad (10.1)$$

Покажем, что компонента скорости v в вихревом слое при $\theta - \beta = l\alpha$ определяется формулой (10.1); тем самым будут обоснованы граничные условия $V_1 = V_2 = V_3 = 0$ при $\theta = \beta$. Представим u, v в вихревом слое в виде $u = u_0 + u_1$, $v = v_0 + v_1$. Из уравнения $L_1 = 0$, (1.3) следует

$$v_{1\theta} = \frac{w_\varphi}{\sin\beta} - 2u_1 \qquad (10.2)$$

В правой части (10.2) оставлены только те члены, которые после интегрирования по θ и подстановки $\theta - \beta = l\alpha$ будут $O(\alpha^2)$. Подставляя в (10.2) выражения (3.1), (5.4) для w, u_1 с учетом (4.2) (4.4), интегрируя результат по θ, подставляя $\theta - \beta = l\alpha$, производя замену переменной интегрирования по формуле $\theta - \beta = \alpha\tau$, получим

$$v_1 = \alpha^2 l \left(\frac{W_1^{\times}}{\sin\beta} - 2\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times}} s_1 - 2U_1^{\times}\right)\cos\varphi +$$
$$+ 2\frac{a_0^{\times 2}}{u_0^{\times}} \alpha^2 s_1 \int_0^l \frac{(1+\cos\varphi)\,\alpha^{2h\alpha}\tau^{2h\alpha} - 1 + \cos\varphi}{(1+\cos\varphi)\,\alpha^{2h\alpha}\tau^{2h\alpha} + 1 - \cos\varphi}\, d\tau \qquad (10.3)$$

При $\alpha \to 0$ интеграл в (10.3) стремится к $l\cos\varphi$, поэтому (10.3) может быть записано в виде

$$v - v_0 = v_1 = \alpha^2 l \left(\frac{W_1^{\times}}{\sin\beta} - 2U_1^{\times}\right)\cos\varphi + o(\alpha^2) \qquad (10.4)$$

Для того чтобы (10.4) совпало с (10.1), требуется выполнение равенства

$$V_1'^{\times} = \frac{W_1^{\times}}{\sin\beta} - 2U_1^{\times}$$

которое, с учетом того, что $V_1 = U_1'$ может быть записано в виде

$$U_1'' + 2U_1 - \frac{W_1}{\sin\theta} = 0, \qquad \theta = \beta$$

Из формул (36), (39), (40), (41) работы [3] следует, что это условие действительно выполняется, что и требовалось показать.

11. Покажем, что теория Стоуна правильно определяет давление на поверхности конуса с точностью $O(\alpha^2)$. Из вышесказанного следует, что разложение Стоуна представляет решение при $\theta - \beta = O(\alpha)$. Оценим изменение давления при переходе через вихревой слой. Из третьего уравнения (1.1) и решения в вихревом слое следует, что p_θ можно представить в виде

$$p_\theta = -\rho v (u + v_\theta) + O(\alpha^2) = -\rho_0 v_0 (u_0 + v_0') + O[\alpha(\theta - \beta)] + O(\alpha^2) = \\ = p_{0\theta} + O[\alpha(\theta - \beta)] + O(\alpha^2)$$

После интегрирования по θ получим, что $p - p_0$ при переходе через вихревой слой $\theta - \beta = O(\alpha)$ меняется на величины $O(\alpha^3)$. (Этот вывод сделан в работе Виллетта [7], но его оценка имеет дефект, так как для оценки члена с v_θ нужно знать поведение решения в вихревом слое.) С другой стороны, $p - p_0$, даваемое теорией Стоуна, также меняется на величины $O(\alpha^3)$ при переходе через вихревой слой. Действительно,

$$u_0' = v_0 = U_1' = V_1 = p_0' = \rho_0' = 0 \quad \text{при } \theta = \beta$$

Тогда (2.3), (2.4), (6.2) после дифференцирования по θ дают $P_1' = R_1' = 0$ при $\theta = \beta$.

Напомним, что в теории Стоуна P_1, P_2, P_3, R_1 ограничены, а R_2, R_3 в окрестности $\theta = \beta$ имеют вид

$$R_3 = -R_2 + \cdots = (\gamma - 1) \frac{s_1 W_1^\times}{4 u_0^\times \sin\beta} \ln(\theta - \beta) + \cdots$$

Так как $P_1' = p_0' = 0$ при $\theta = \beta$, то

$$p - p_0 = \alpha P_1 p_0 \cos\varphi + \alpha^2 (P_2 + P_3 \cos 2\varphi) p_0$$

меняется на $O(\alpha^3)$ при переходе через вихревой слой. Теория Стоуна определяет p с точностью $O(\alpha^2)$ при $\theta - \beta = O(\alpha)$, поэтому при переходе через вихревой слой разница между p по теории Стоуна и точным значением может быть только $O(\alpha^3)$.

12. Так как все предположения Виллетта [7] обоснованы аналитически, то его формулы правильно определяют компоненты скорости на поверхности конуса с точностью $O(\alpha^2)$.

В заключение заметим, что если искать решение в виде бесконечных рядов по α, то эти ряды будут, видимо, сходиться при всех $\theta \neq \beta$, но ряды для u, ρ в отличие от рядов для v, w, p будут практически расходящимися, так как любые конечные отрезки этих рядов обращаются в бесконечность при $\theta = \beta$.

Поступила 21 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. J. Air Pressure on a Cone Moving at High Speeds, Proc. Roy. Soc., A 1933, 139, pp. 278—311.
2. Maccoll J. W. The Conical Shock Wave Formed by a Cone Moving at High Speed, Proc. Roy. Soc., A 1937, 159, pp. 459—472.
3. Stone, A. H., On Supersonic Flow Past a Slightly Yawing Cone, Jour. Math. and Phys., April, 1948, v. 27, № 1, pp. 67—81.
4. Stone A. H. On Supersonic Flow Past a Slightly Yawing Cone. II, Jour. Math. and Phys., January, 1952, v. 30, № 4, pp. 200—213.
5. Stone A. H. Corrections to the Paper «On Supersonic Flow Past a Slightly Yawing Cone. II», Jour. Math. and Phys., January, 1953, v. 31, № 4, p. 300.
6. Ferri A. Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack, NACA Report, 1951, № 1045.
7. Willett J.E. Supersonic Flow at the Surface of a Circular Cone at Angle of Attack, Jour. Aero/Sp. Sci., December, 1960, v. 27, № 12, pp. 907—912, 920.