

## АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

М. Д. Ладыженский

(Москва)

Исследуются общие уравнения пространственных вихревых гиперзвуковых течений. Приводится решение задачи Коши, в которой отмечено существование бесконечных областей определения решения. Дается сравнение полученного приближенного решения задачи Коши с результатами точных аналитического и численного решений. Результаты работы используются для исследования внутренних гиперзвуковых течений.

§ 1. Выведем наиболее общие уравнения пространственных вихревых гиперзвуковых течений. Уравнения, описывающие установившиеся изоэнергетические течения идеального совершенного газа, принимаем в виде

$$\operatorname{div} \left( 1 - \frac{V^2}{V_m^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \mathbf{V} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = \frac{V_m^2 - V^2}{2} \operatorname{grad} \sigma \quad (1.1)$$

$$\sigma = \ln \frac{p^{1/\kappa}}{\rho} + \operatorname{const}, \quad \frac{V^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{V_m^2}{2} \quad (1.2)$$

Здесь  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $\mathbf{V}$  — вектор скорости,  $V_m$  — максимальная скорость,  $\sigma$  — энтропийная функция,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность. Будем предполагать, что местное число  $M \gg 1$ ; вектор скорости представим в виде

$$\mathbf{V} = V_m (1 - \eta) \boldsymbol{\tau} \quad (0 < \eta \ll 1, \quad \boldsymbol{\tau} = 1) \quad (1.3)$$

Согласно уравнению Бернулли

$$M = \sqrt{2} (1 - \eta) [(\kappa - 1) \eta (2 - \eta)]^{-1/2} \quad (1.4)$$

Подставляя выражение для скорости  $\mathbf{V}$  (1.3) в (1.1), получим систему квазилинейных уравнений относительно неизвестных  $\eta$ ,  $\sigma$ ,  $\boldsymbol{\tau}$ , к которой следует присоединить соотношение  $\boldsymbol{\tau} = 1$ . Коэффициенты этой системы содержат в качестве множителя полиномы от  $\eta$ . Для упрощения уравнений в каждом из полиномов пренебрегаем всеми членами, кроме первого, содержащего  $\eta$  в низшей степени; другими словами, мы пренебрегаем величиной порядка  $\eta \sim M^{-2}$  по сравнению с единицей в коэффициентах уравнений при каждой производной, не делая никаких предположений о величинах самих производных; в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa-1} \frac{\partial \ln \eta}{\partial s} + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} &= 0, \quad \boldsymbol{\tau} = 1 \\ -\boldsymbol{\tau} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \operatorname{grad} \eta &\equiv \operatorname{grad}_n \eta = \eta \operatorname{grad} \sigma - \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial s} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $\text{grad}_n \eta$  означает составляющую вектора  $\text{grad} \eta$ , перпендикулярную к линии тока, а  $\partial/\partial s$  — производная вдоль линии тока.

Уравнение (1.5) особенно просто записывается в системе координат, оси которой направлены соответственно вдоль касательной к линии тока, главной нормали  $n$  и бинормали  $n_1$ :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = 0, \quad k + \frac{\partial \eta}{\partial n} - \eta \frac{\partial \sigma}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial n_1} - \eta \frac{\partial \sigma}{\partial n_1} = 0 \quad (1.6)$$

где  $k$  — кривизна линии тока.

После решения (1.5) давление и плотность определяются по найденному  $\sigma$  из упрощенного (с учетом  $\eta \ll 1$ ) уравнения Бернулли. В результате имеем

$$p = p_0 (2\eta)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad \rho = \rho_0 (2\eta)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad p = p_0(\sigma), \quad \rho = \rho_0(\sigma) \quad (1.7)$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{V_m^2}{2}$$

С учетом (1.7) уравнения (1.5) могут быть приведены к системе уравнений, весьма близких к обычным уравнениям гидродинамики

$$\frac{dV_m}{dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad}_n p = 0, \quad \frac{d \ln \rho}{dt} + \text{div} V_m = 0 \quad (1.8)$$

$$V_m = V_m \tau, \quad \frac{d}{dt} = V_m \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

Уравнения (1.8) отличаются от уравнений Эйлера тем, что вектор скорости является постоянным по модулю, а в уравнение импульсов вместо градиента давления входит его составляющая, перпендикулярная к линии тока.

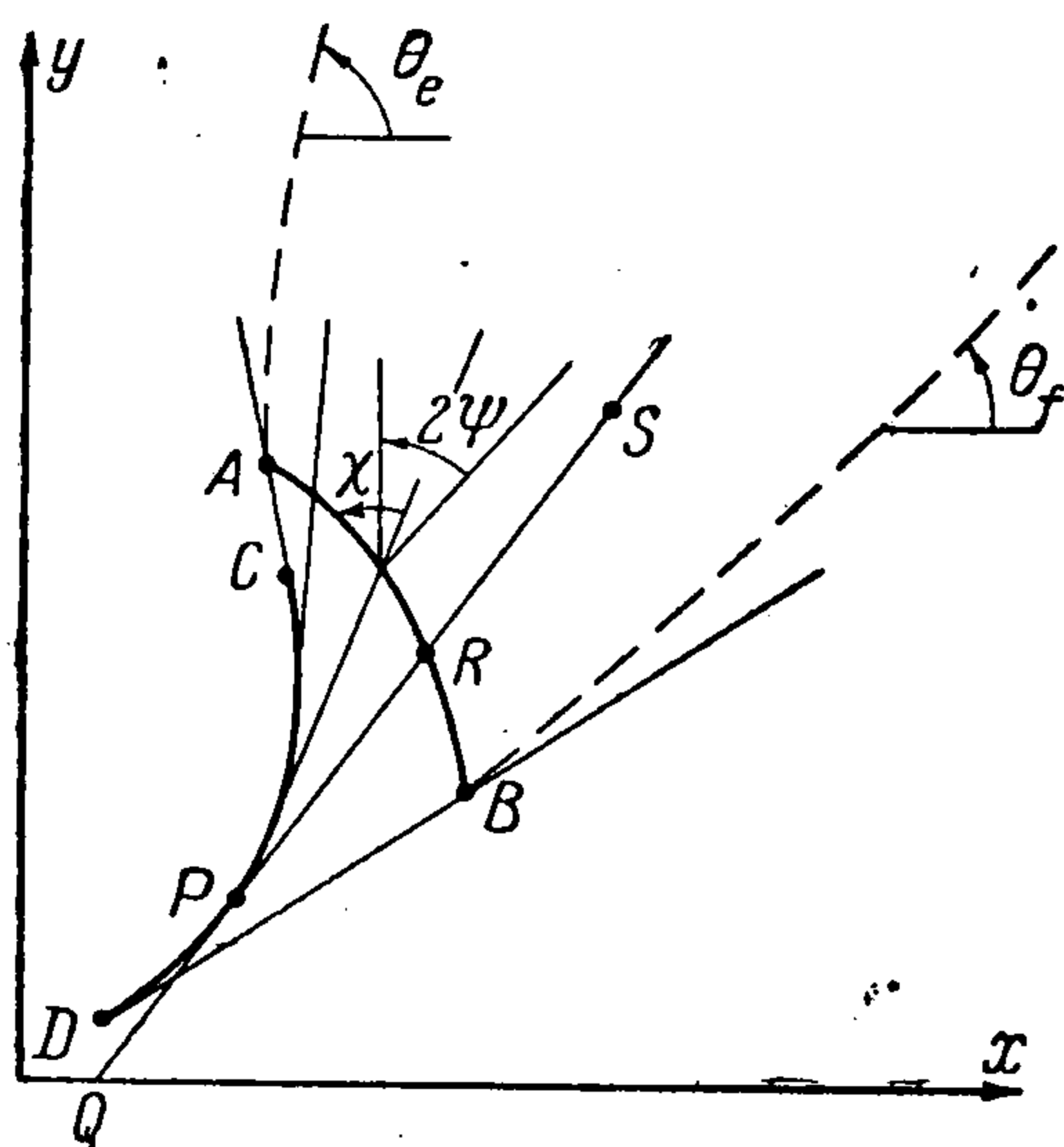
Обе формы записи уравнений — (1.5) и (1.8) — являются эквивалентными. Ниже используются в основном уравнения в виде (1.5), более удобном для анализа.

§ 2. В работе [1] показано, что для плоского и осесимметрического течений свойства решений уравнений (1.5) существенно определяются одним параметром  $K$ , который равен произведению характерного для данного течения числа  $M_*$  на величину  $\vartheta$ , характеризующую диапазон изменения угла наклона вектора скорости.

При обтекании тонкого тела уравнения (1.5) или (1.8) можно свести к уравнениям неустановившегося течения [2, 3, 4]. При этом всегда  $K \sim 1$  (характерное число  $M_*$  берется в какой-либо точке возмущенного потока, например — в передней точке тела за ударной волной), тогда как введенный в работе [2] параметр подобия  $K = M_\infty \vartheta$  (индекс  $\infty$  относится к невозмущенному потоку) может изменяться от 1 до  $\infty$ . Можно сформулировать закон подобия при гиперзвуковом обтекании тонких аффинно-подобных тел, используя вместо  $K_\infty$  параметр  $K$  и взяв  $M_*$  в сходственных точках для рассматриваемых течений. Поэтому  $K$  может быть назван местным параметром подобия гиперзвуковых течений.

При  $K \gg 1$  получено решение задачи Коши, знание которого, наряду с решением смешанной краевой задачи, необходимо при расчете внутренних течений. На гладкой дуге  $AB$  (фиг. 1) заданы величины  $\theta$ ,  $\eta$ ,  $\sigma$  как непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции длины дуги. Для простоты  $\theta$  предполагается монотонной функцией. На  $AB$ , по предположению, выполняются условия

$$|\theta(A) - \theta(B)| \gg \sqrt{\max \eta}, \quad \chi - \psi > 0 \quad (\psi = \arctg [(\kappa - 1) \eta]^{1/2}) \quad (2.1)$$



Фиг. 1

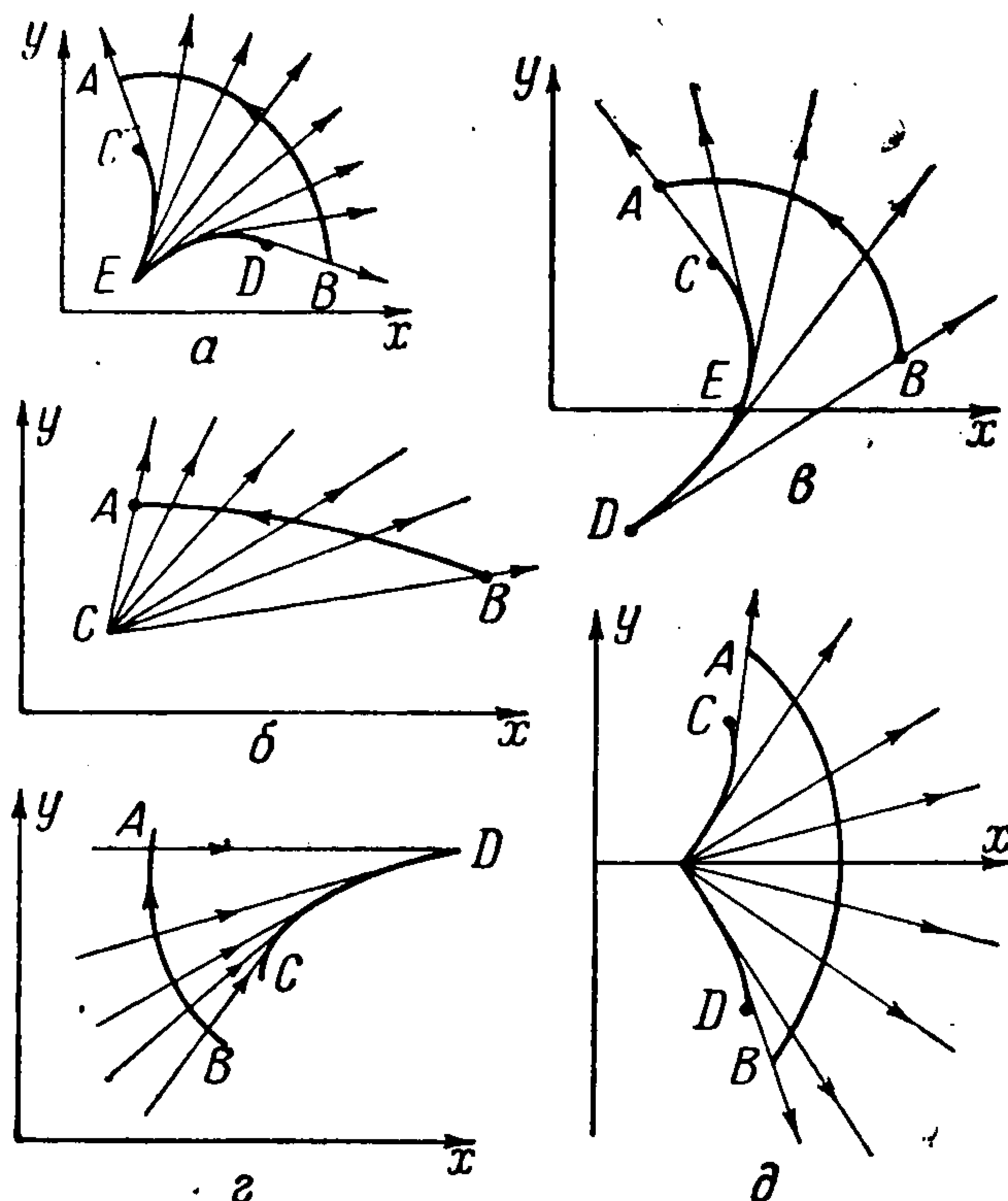
где  $\max \eta$  — максимальное значение  $\eta$  на  $AB$ ,  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс,  $\chi$  — острый угол между направлением вектора скорости и касательной к  $AB$ ,  $\psi$  — угол Маха. Первое условие (2.1) равносильно требованию  $K \gg 1$  на  $AB$ . Как показано в § 4, второе условие (2.1) достаточно для выполнения неравенства  $K \gg 1$  во всей области определения решения<sup>1</sup>. При этом линии тока с погрешностью порядка  $K^{-2}$  являются прямыми лучами, и решение задачи Коши для плоского ( $\nu = 0$ ) и осесимметрического ( $\nu = 1$ ) течений вдоль каждого луча принимает вид [1]

$$\eta = \eta_0 \left| \frac{r_0}{r} \right|^{x-1} \left| \frac{r_0 + a}{r + a} \right|^{\nu(x-1)}$$

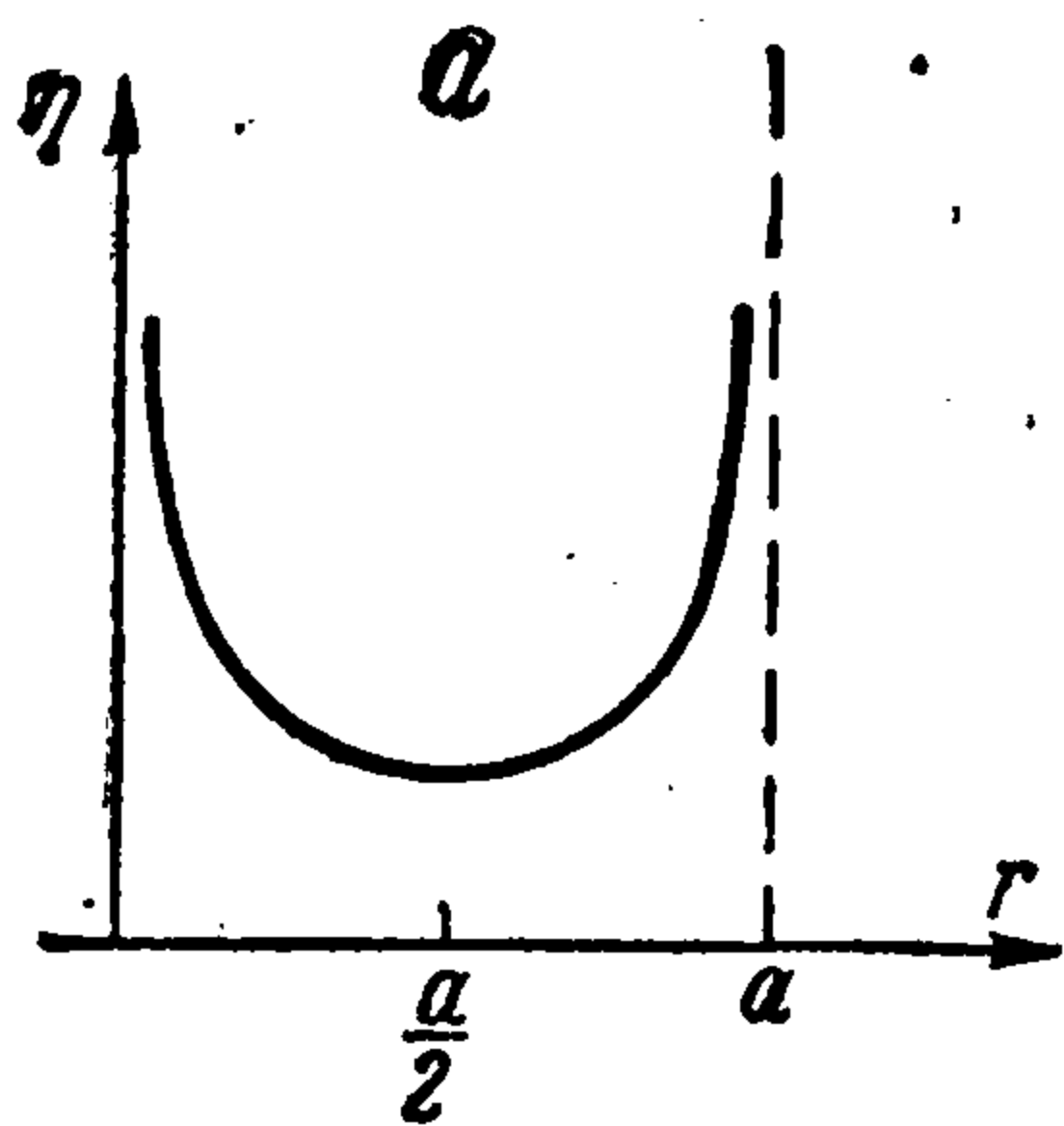
$$\theta = \theta_0, \quad \sigma = \sigma_0 \quad (2.2)$$

где индекс 0 относится к величинам на  $AB$ , а через  $r$  и  $a$  обозначены расстояния, отсчитываемые (фиг. 1) от точки  $P$  касания луча с огибающей лучей  $CD$  соответственно до рассматриваемой точки  $S$  и до точки  $Q$  пересечения луча с осью симметрии в осесимметрическом потоке.

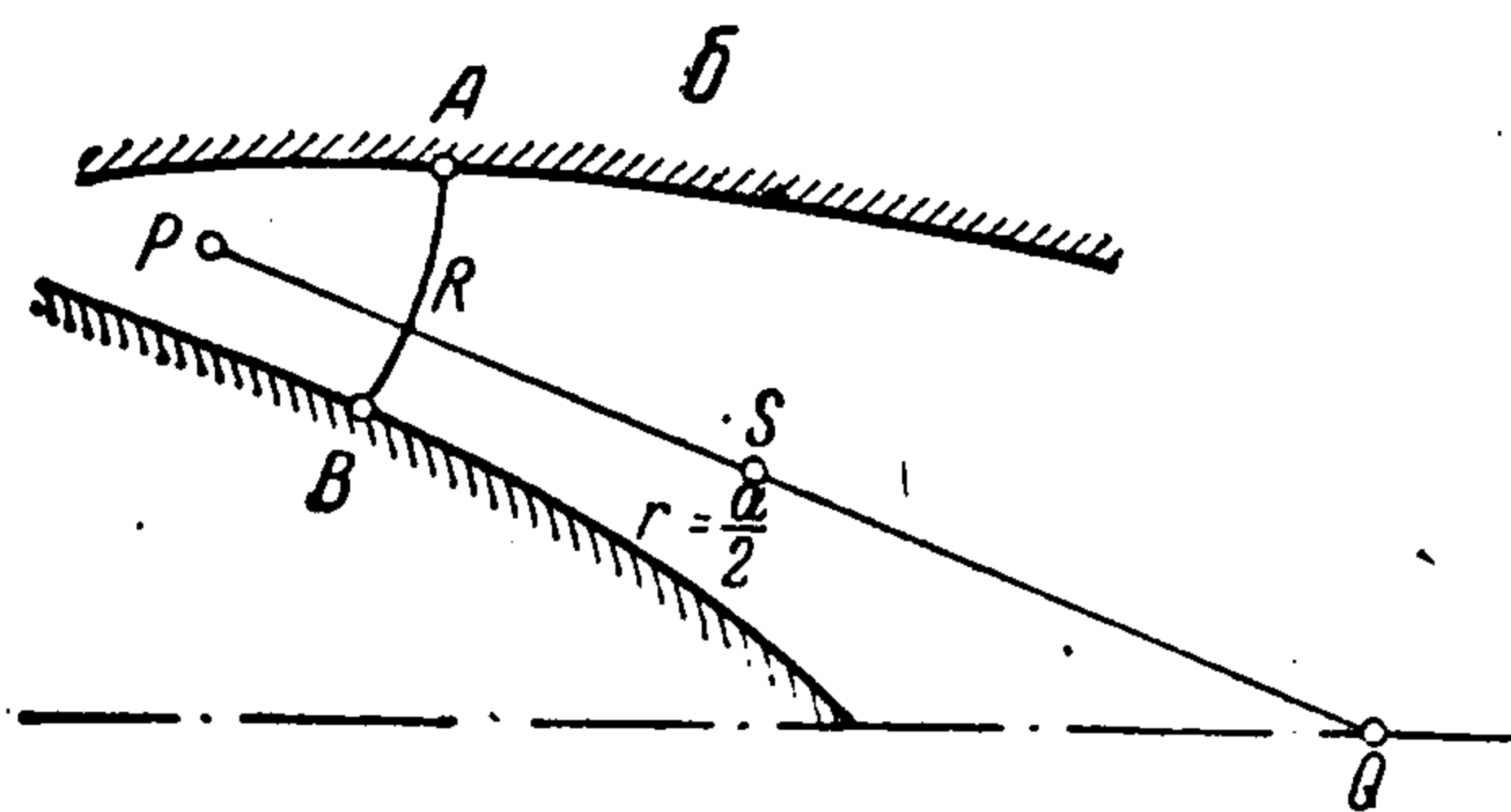
Ввиду монотонного характера изменения  $\theta$  огибающая  $CD$  располагается по одну сторону от  $AB$ . На  $AB$  в каждой точке задается направление вектора скорости. Если область, куда происходит истечение, располагается справа от  $AB$ , то  $r > 0$ , когда  $CD$  расположено слева (фиг. 2а, б, в) и соответственно  $r < 0$ , когда  $CD$  — справа от  $AB$  (фиг. 2г). Далее,  $a > 0$ , когда огибающая лежит выше оси симметрии ( $CE$  на фиг. 2в) и  $a < 0$  для отрезка  $DE$  на фиг. 2в. Относительно решения (2.2) сделаем следующие замечания.



Фиг. 2



Фиг. 3а



Фиг. 3б

1) Решение (2.2) с принятой точностью совпадает с полученным ранее В. Н. Гусевым и М. Д. Ладыженским асимптотическим решением задачи об изэнтропическом плоском и осесимметрическом истечении струи газа из отверстия в вакуум, согласно которому течение на большом расстоянии от центра отверстия  $O$  асимптотически стремится вдоль каждого луча, проведенного из точки  $O$ , к течению от некоторого плоского или осесимметрического источника с переменной, вообще говоря, от луча к лучу интенсивностью.

2) В случае фиг. 2г величина  $\eta$  изменяется вдоль луча немонотонно, имея характер, как показано на фиг. 3а. Такой случай может реализоваться при гиперзвуковом течении в канале с центральным телом (фиг. 3б).

<sup>1</sup> Под областью определения решения данного криволинейного отрезка (в пространственном случае — участка поверхности) понимается та область, решение задачи Коши в которой полностью определяется заданием данных Коши на этом отрезке (участке поверхности).

3) Решение (2.2) справедливо на достаточном удалении от огибающей и оси симметрии, где  $\eta$  обращается в бесконечность. Это не исключает, однако, того случая, когда ось симметрии является одним из лучей в решении (2.2), как показано на фиг. 2*д*.

Очевидно, что при использовании решения (2.2) вдоль оси симметрии в осесимметрическом потоке, в решении следует положить  $a = 0$ .

4) Возможен случай, когда одновременно  $\vartheta \ll 1$  и  $K \gg 1$ . При этом с относительной погрешностью порядка  $\vartheta^2$  уравнения (1.5) или (1.8) сводятся к уравнениям неустановившегося течения, после чего с учетом  $K \gg 1$  проводятся дальнейшие упрощения. Решение (2.2), таким образом, может быть построено и в теории нестационарных движений газа.

§ 3. Исследуем пространственное течение. В случае обтекания тонких тел ( $K \sim 1$ ) уравнения (1.8) легко приводятся к уравнениям неустановившихся течений.

Рассмотрим решение задачи Коши. Пусть на некоторой поверхности  $S$  заданы непрерывные и непрерывно-дифференцируемые функции  $\tau$ ,  $\eta$  и  $\sigma$ . Делаются предположения, аналогичные (2.1):

1) по крайней мере две из трех величин  $\vartheta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), характеризующих изменение углов, составляемых вектором  $\tau$  с осями декартовой системы координат, по порядку величин превышают  $\eta$  на  $S$ .

2) конуса Маха, проведенные из каждой точки поверхности  $S$ , не пересекаются с этой поверхностью.

С учетом этих допущений из последнего уравнения (1.5) следует  $\partial\tau / \partial s = 0$ , т. е. линии тока являются прямыми лучами. Если построить поверхности, для которых эти лучи являются нормальными, то величина  $\text{div } \tau$  равна, как известно, удвоенной средней кривизне этих поверхностей. При движении вдоль некоторого луча будут пересечены поверхности, центры кривизны которых лежат в одних и тех же для всех поверхностей точках  $O_1$  и  $O_2$ . Обозначая расстояние между этими точками через  $a$ , получаем из первого уравнения (1.5) решение в виде (2.2), где через  $r$  и  $r_0$  обозначены расстояния от одного из центров кривизны соответственно до рассматриваемой точки и до поверхности  $S$ . На общий случай распространяются замечания 2—4 из § 2.

§ 4. Для плоского и осесимметрического течений рассмотрим вопрос о бесконечных областях определения решения при  $K \gg 1$ . Известно, что решение задачи Коши для данного отрезка дуги  $AB$ , если оно существует, определено в криволинейном треугольнике, одной из сторон которого является  $AB$ , а двумя другими — характеристики различных семейств, проходящие через точки  $A$  и  $B$ .

Предполагая для простоты, что течение изэнтропическое и огибающая стянута в точку, как на фиг. 2*д* (последнее — в случае осесимметрического течения), получаем уравнение характеристик в конечном виде в плоскости годографа  $\theta$  (угол наклона вектора скорости к оси  $x$ ) и  $\eta$

$$\pm \theta(1 + \nu) + \frac{2}{\sqrt{\kappa - 1}} \sqrt{\eta} = \text{const} \quad (4.1)$$

где знаки плюс и минус относятся к характеристикам соответственно первого и второго семейств.

Пользуясь (2.2), из уравнения (4.1) можно получить характеристики в физической плоскости.

Уравнения характеристик, проходящих через точки  $A$  и  $B$ , принимают вид (фиг. 1)

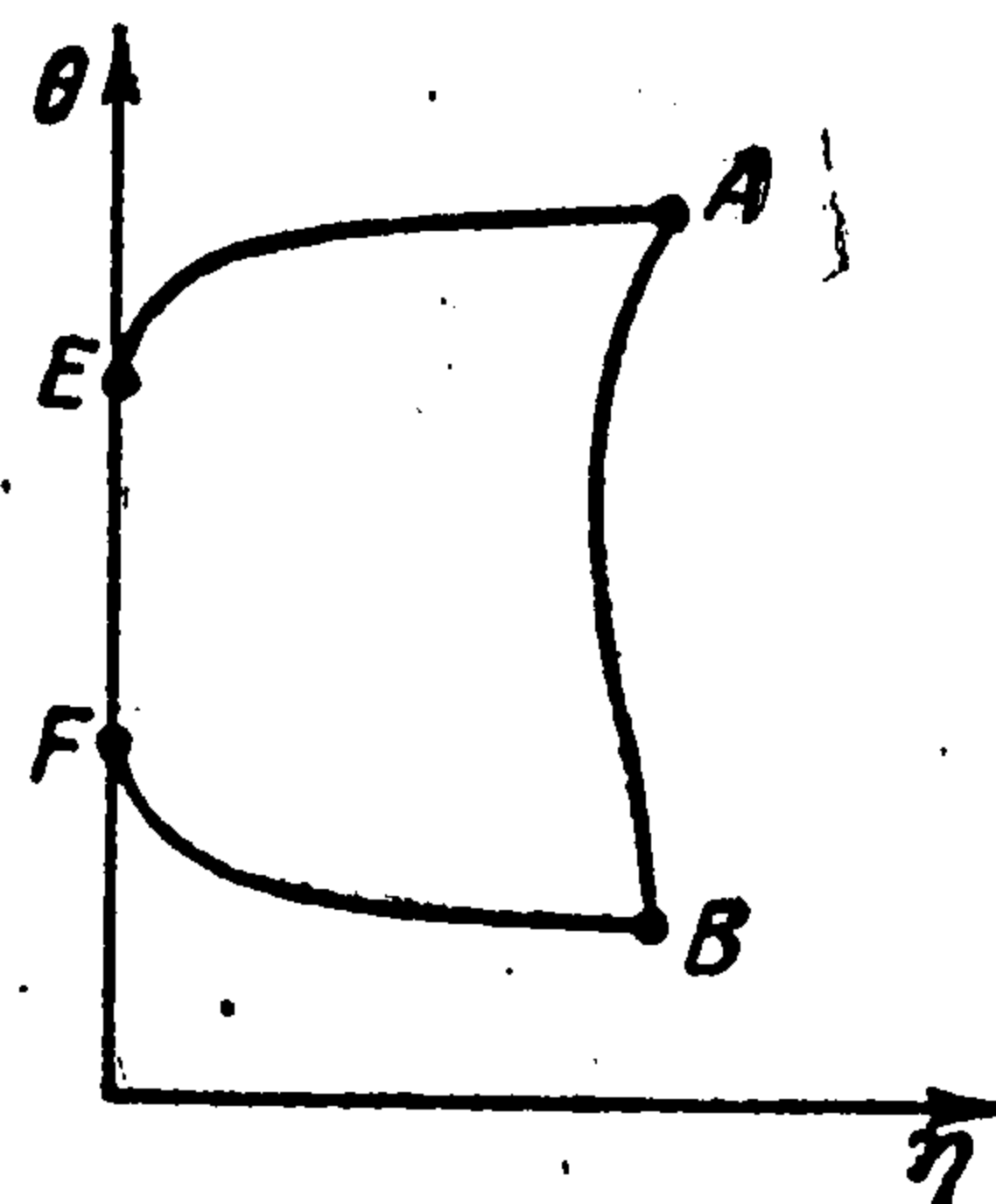
$$-\theta_a(1 + \nu) + \frac{2\sqrt{\eta_a}}{\sqrt{\kappa-1}} = -\theta_e(1 + \nu), \quad \theta_b(1 + \nu) + \frac{2\sqrt{\eta_b}}{\sqrt{\kappa-1}} = \theta_f(1 + \nu) \quad (4.2)$$

Эти выражения записаны, исходя из того, что характеристики  $AE$  и  $BF$  в физической плоскости не пересекаются между собой при  $\eta \rightarrow 0$ . Действительно, из первого уравнения (2.1) следует, что

$$\theta_e - \theta_f = \theta_a - \theta_b - \frac{2}{\sqrt{\kappa-1}(1 + \nu)} (\sqrt{\eta_a} + \sqrt{\eta_b}) \geq \sqrt{\eta} \quad (4.3)$$

и характеристический треугольник оказывается разомкнутым<sup>1</sup>. В плоскости годографа это находит свое отражение в том факте, что характеристики  $AE$  и  $BF$ , не пересекаясь между собой, достигают линии параболического вырождения  $\eta = 0$  (фиг. 4).

В задаче Коши, таким образом, появляется бесконечная область определения решения. Это важнейшее свойство рассматриваемого класса гиперзвуковых течений сохраняется, как нетрудно проверить, и в общем случае пространственных вихревых гиперзвуковых течений.



Фиг. 4

§ 5. Перейдем к рассмотрению в плоскости годографа скорости (впервые подобное рассмотрение гиперзвуковых течений было проведено в работе [5], где было построено решение, аналогичное используемому ниже). Переход к плоскости годографа осуществляется в случае изэнтропического плоского течения. Потенциал Лежандра  $\Phi$  удовлетворяет в этом случае уравнению (см., например, [6])

$$\frac{V^2}{1 - V^2/c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2} + V \frac{\partial \Phi}{\partial V} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{V^2}{2} + \frac{c^2}{\kappa - 1} = \frac{V_m^2}{2} \quad (5.1)$$

где  $c$  — скорость звука.

Переход к декартовым координатам  $x, y$  совершается согласно уравнениям

$$x = -\cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial V} + \frac{\sin \theta}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad y = -\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial V} - \frac{\cos \theta}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (5.2)$$

Вводя в уравнениях (5.1) вместо  $V$  переменную  $\eta$  (1.3), получим после упрощений, аналогичных проведенным в § 1,

$$(\kappa - 1) \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5.3)$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением [6], описывающим одномерное изэнтропическое течение в координатах — энтальпия  $\eta$  и скорость  $\theta$ .

Переход к физической плоскости  $x$  (время),  $y$  (координата) осуществляется в случае неустановившегося течения по формулам, отличным от (5.2),

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad y = \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (5.4)$$

Для эквивалентности двух рассматриваемых задач — о гиперзвуковом и о неустановившемся течении — необходимо в выражениях (5.2) пренебречь величиной порядка  $\eta$  по сравнению с единицей и, кроме того, считать, что  $\theta$  мало, так что  $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$ . В результате выражения (5.2) перейдут в (5.4).

<sup>1</sup> Теперь ясен смысл второго условия (2.1). При нарушении его характеристики  $AE$  и  $BF$  выходят за пределы области, в которой построено решение (2.2).

Воспользуемся известным [6] из теории неустановившихся течений точным решением уравнения (5.3), которое можно построить при  $(3 - \kappa) | (\kappa - 1) = 2m$ , где  $m$  — целое число, что охватывает практически интересные случаи одноатомного ( $m = 1$ ,  $\kappa = 5/3$ ) и двухатомного ( $m = 2$ ,  $\kappa = 7/5$ ) газов. Это решение имеет вид

$$\Phi = \frac{\partial^{m-1}}{\partial \eta^{m-1}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[ F_1 \left( \theta + \frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{\kappa-1}} \right) + F_2 \left( \theta - \frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{\kappa-1}} \right) \right] \right\} \quad (5.5)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — произвольные функции, находимые из краевых условий.

Будем использовать формулы перехода к физической плоскости в виде (5.4). По существу будет найдено точное решение уравнений неустановившихся течений при  $K \gg 1$  (см. замечание 4 в § 2).

В плоскости годографа линия  $AB$  (фиг. 4) дается уравнениями  $\eta = \Delta = \text{const}$ ,  $\theta \geq \theta \geq 0$ . На этой линии заданы физические координаты

$$x = 0, \quad y = Y(\theta), \quad y_0 \geq y \geq 0$$

Решение задачи Коши после ряда выкладок, которые опущены, может быть представлено для одноатомного газа ( $\kappa = 5/3$ ) в виде

$$x = -\frac{1}{2\eta} \sqrt{\frac{3\Delta}{2}} [Y(z_+) - Y(z_-)] + \frac{1}{8\eta^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{z_-}^{z_+} (\theta - \chi) Y(\chi) d\chi \quad (5.6)$$

$$y = \theta x + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{\eta}} [Y(z_+) + Y(z_-)] + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3\eta}} \int_{z_-}^{z_+} Y(\chi) d\chi$$

$$z_+ = \theta + \sqrt{6}(\sqrt{\eta} - \sqrt{\Delta}), \quad z_- = \theta - \sqrt{6}(\sqrt{\eta} - \sqrt{\Delta})$$

Аналогичное выражение для двухатомного газа ( $\kappa = 7/5$ ) есть

$$x = -\frac{3}{80\sqrt{10}} \frac{1}{\eta^{5/2}} \int_{z_-}^{z_+} Y(\chi) (\theta - \chi)^3 d\chi + \frac{3(1 + \Delta/\eta)}{8\sqrt{10}\eta^{3/2}} \int_{z_-}^{z_+} Y(\chi) (\theta - \chi) d\chi - \frac{\sqrt{10}\Delta}{4\eta^{3/2}} [Y(z_+) - Y(z_-)] \quad (5.7)$$

$$y = \theta x - \frac{3}{40\sqrt{10}} \frac{1}{\eta^{3/2}} \int_{z_-}^{z_+} Y(\chi) (\theta - \chi)^2 d\chi + \frac{3 + \Delta/\eta}{4\sqrt{10}\eta} \int_{z_-}^{z_+} Y(\chi) d\chi + \frac{\Delta}{2\eta} [Y(z_+) + Y(z_-)]$$

$$z_+ = \theta + \sqrt{10}(\sqrt{\eta} - \sqrt{\Delta}), \quad z_- = \theta - \sqrt{10}(\sqrt{\eta} - \sqrt{\Delta})$$

Решения (5.6) и (5.7) определены в плоскости годографа в области  $A E F B$  (фиг. 4), которая при  $K^2 \sim \theta^2 / \Delta \gg 1$  ограничена при  $\eta = 0$  отрезком параболической линии. На этой линии уравнение (5.3) испытывает параболическое вырождение, характер которого принципиально отличен от параболического вырождения уравнения Трикоми при  $M = 1$ . Уравнение (5.3) принадлежит ко второму основному каноническому виду уравнений, испытывающих параболическое вырождение (к первому виду относится уравнение Трикоми).

В соответствии с § 4 в физической плоскости область определения решений простирается до бесконечности. Отрезок  $EF$  в плоскости годографа как раз соответствует предельному углу, который образуют между собой характеристики  $AE$  и  $BF$  на бесконечности (фиг. 1).

Разложим входящие в выражения (5.6) функции, зависящие от  $\theta \pm \sqrt{6}(\sqrt{\eta} - \sqrt{\Delta})$  в ряды Тейлора по степеням величины  $\sqrt{6}(\sqrt{\eta} - \sqrt{\Delta})$ . Аналогичное разложение проведем в уравнениях (5.7) по степеням  $\sqrt{10}(\sqrt{\eta} - \sqrt{\Delta})$ . Эти разложения имеют смысл, очевидно, всюду в области  $A E F B$ . В результате получим

$$x = x_* [1 + f(\eta, \theta)], \quad y = y_* [1 + g(\eta, \theta)] \quad (5.8)$$

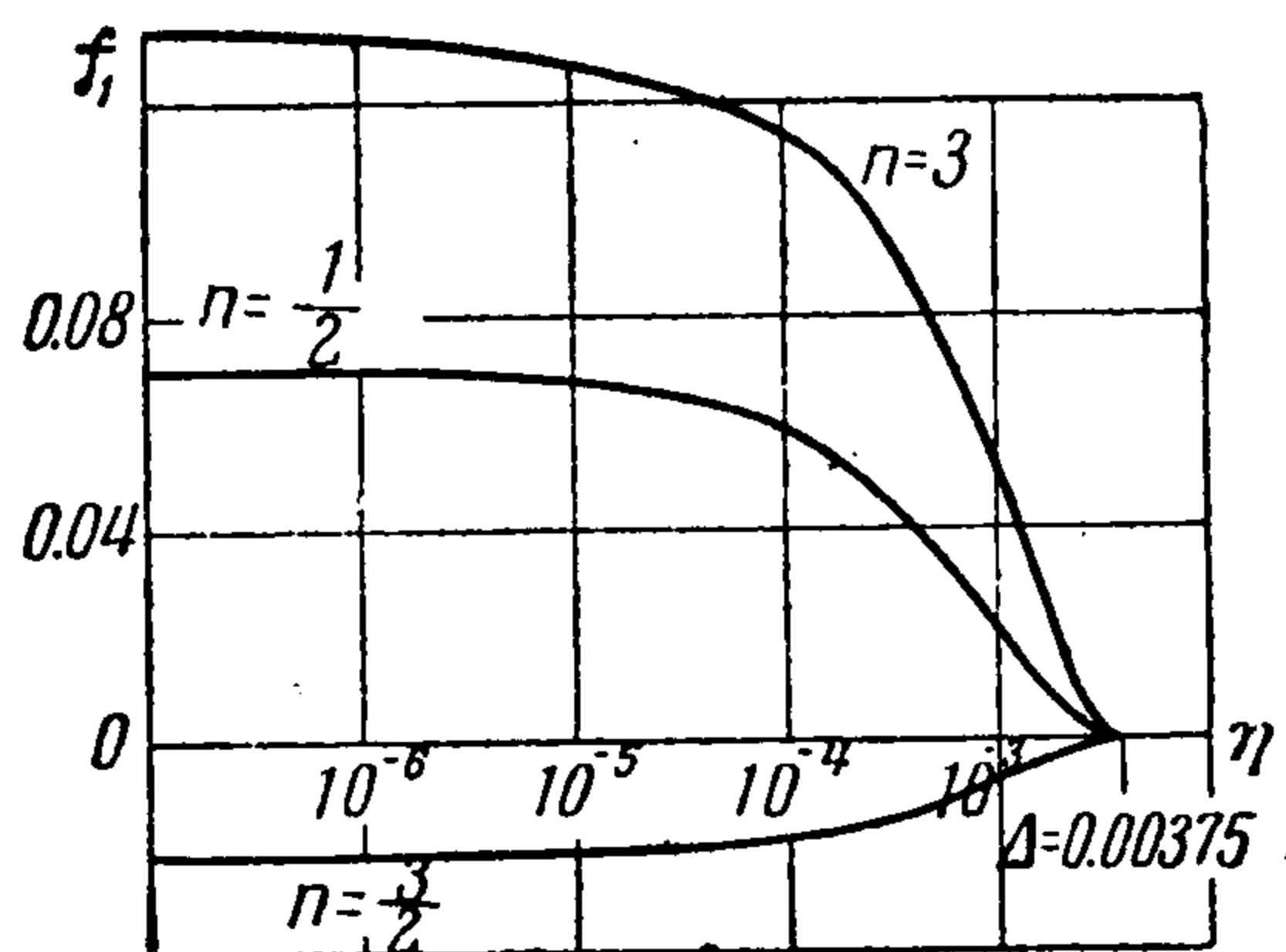
где величины с индексом \* имеют вид

$$x_* = \frac{dY}{d\theta} \left[ \left( \frac{\Delta}{\eta} \right)^{3/2} - 1 \right] \quad \text{при } \kappa = \frac{5}{3} \quad (5.9)$$

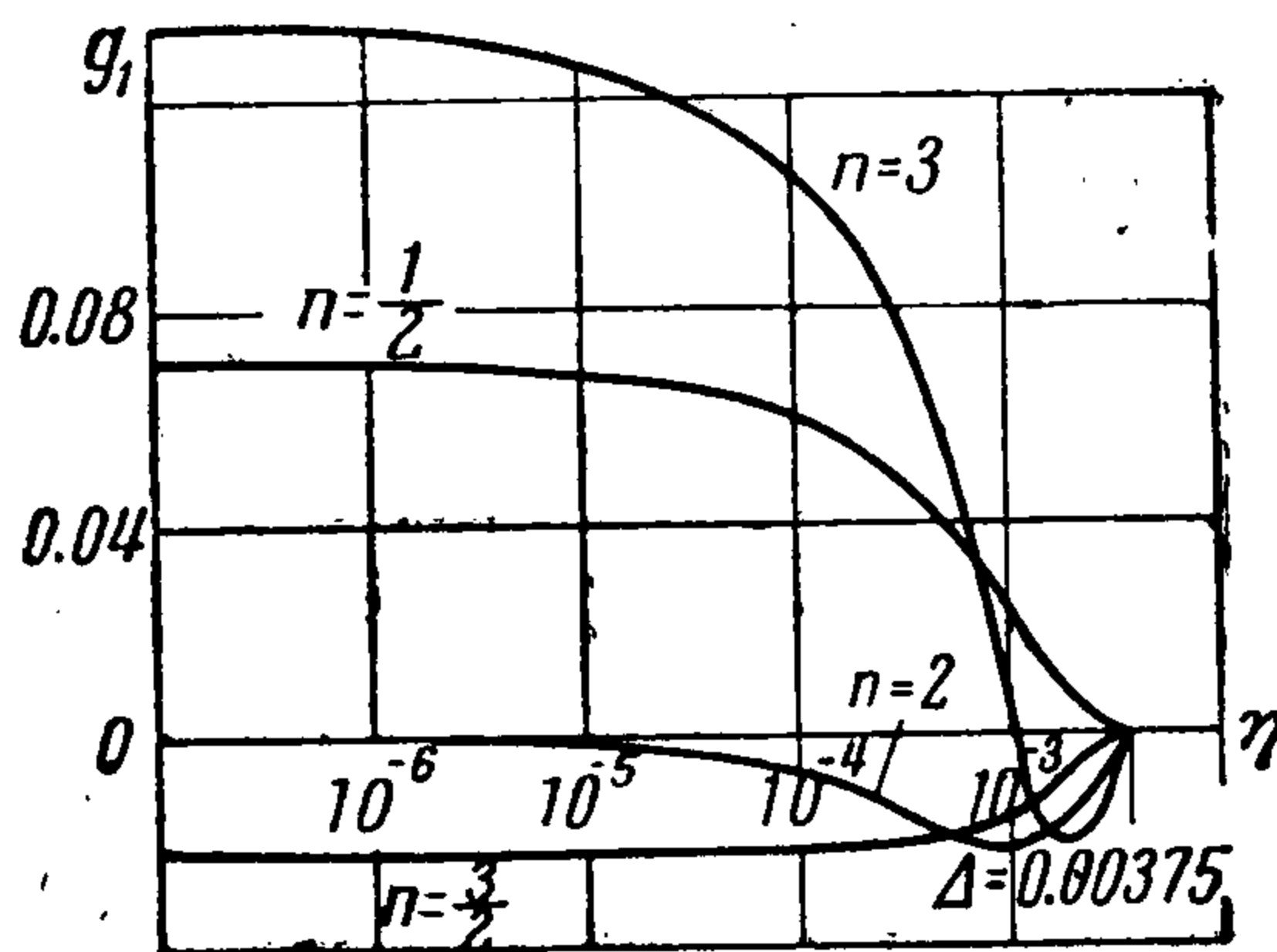
$$x_* = \frac{dY}{d\theta} \left[ \left( \frac{\Delta}{\eta} \right)^{5/2} - 1 \right] \quad \text{при } \kappa = \frac{7}{5} \quad (5.10)$$

$$y_* = \theta x_* + Y(\theta) \quad \text{при } \kappa = \frac{5}{3} \text{ и } \frac{7}{5} \quad (5.11)$$

а  $f$  и  $g$  определяются из уравнений (5.6), (5.7). Уравнения (5.9) и (5.10) совпадают с первым уравнением (2.2), так как с принятой точностью ( $\cos \theta \approx 1$ ) можно записать  $Y'(\theta) = r_0$ ,  $x = r - r_0$ , где  $r$  и  $r_0$  имеют тот же смысл, что и в формуле (2.2).



Фиг. 5



Фиг. 6

Уравнение (5.11) дает для линии тока уравнение прямой в соответствии со вторым уравнением (2.2). Входящие в формулы (5.8) функции  $f$  и  $g$  характеризуют точность, с которой полученное в § 2 решение задачи Коши совпадает с точным решением, определяемым (5.6), (5.7).

Выпишем первые члены разложения этих функций в ряды по степеням  $K$ , обозначая их соответствующими буквами с индексом 1; для удобства записи введем обозначение  $\Lambda = \sqrt{\eta/\Delta}$ . Имеем для  $\kappa = 5/3$

$$f_1 = \frac{3}{5} \frac{Y''' \Delta}{Y'} \cdot \frac{(1 - \Lambda)^3 (1 + 3\Lambda + \Lambda^2)}{1 - \Lambda^3} \quad (5.12)$$

$$g_1 = \frac{3(Y''' \theta \Delta / Y) (1 - \Lambda)^3 (1 + 3\Lambda + \Lambda^2) + 5(Y'' \Delta / Y) \Lambda^2 (\Lambda - 1)^2 (2 + \Lambda)}{5(Y' \theta / Y) (1 - \Lambda^3) + 5\Lambda^3} \quad (5.13)$$

и для  $\kappa = 7/5$

$$f_1 = \frac{5}{42} \frac{Y''' \Delta}{Y'} \frac{(1 - \Lambda)^3 [6(\Lambda^4 + 1) + 18\Lambda(\Lambda^2 + 1) + \Lambda^2]}{1 - \Lambda^5} \quad (5.14)$$

$$g_1 = \frac{5}{42} \frac{Y''' \theta \Delta}{Y} \frac{(1 - \Lambda)^3 [6(\Lambda^4 + 1) + 18\Lambda(\Lambda^2 + 1) + \Lambda^2]}{(Y' \theta / Y) (1 - \Lambda^5) + \Lambda^5} + \frac{Y'' \Delta}{Y} \frac{\Lambda^2 (\Lambda - 1)^2 [\Lambda^3 + (4/3)\Lambda^2 + (4/3)\Lambda + 2/3]}{(Y' \theta / Y) [1 - \Lambda^5] + \Lambda^5} \quad (5.15)$$

Выражения (5.12) — (5.15) содержат в качестве множителей величины  $Y'' \Delta / Y$ ,  $Y''' \theta \Delta / Y$ ,  $Y''' / \Delta Y'$ , которые имеют порядок  $\Delta / \theta^2 \sim K^{-2}$ .

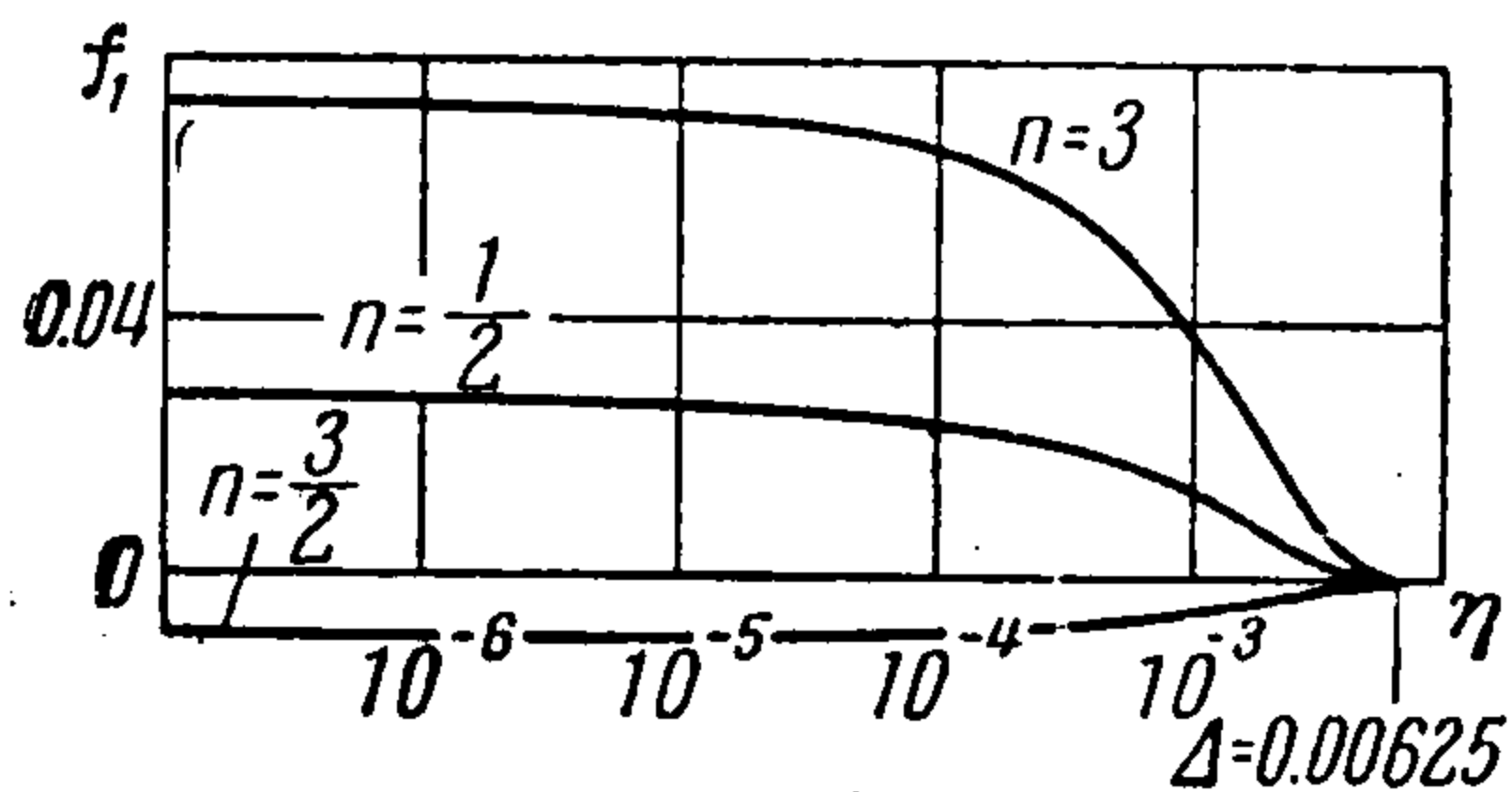
Таким образом, в подтверждение результатов § 2 и § 4 с относительной ошибкой порядка  $K^{-2}$  всюду в области определения решения  $AEFB$  можно пользоваться решением (2.2).

Для более подробного анализа точности были проведены расчеты по формулам (5.12) — (5.15) величин  $f_1$  и  $g_1$  в функции  $\eta$  для значений  $\Delta$ , соответствующего  $M = 20$ ,  $\theta = 10^\circ$  при  $\kappa = 5/3$ , — фиг. 5, 6, а также  $\theta = 20^\circ$  при  $\kappa = 7/5$  — фиг. 7, 8, что соответствует  $K$ , равному соответственно 3.49 и 6.98. Функция  $Y(\theta)$  задавалась в степенном виде  $Y = y_0 (\theta / \theta)^n$ . Расчеты были проведены для значений  $n = 1/2, 1, 3/2, 2, 3$ .

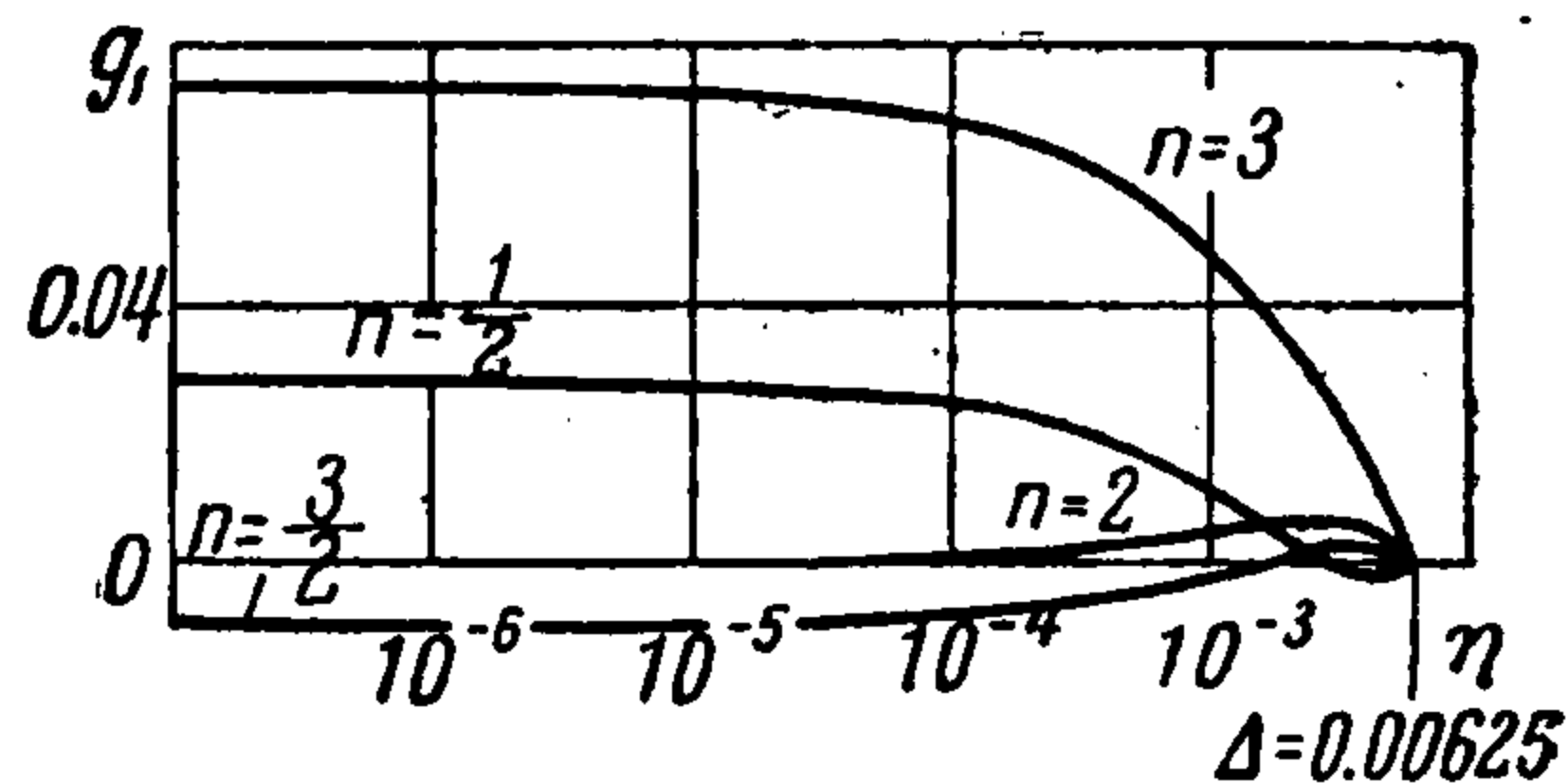
Величина  $f_1$  при  $\eta \rightarrow 0$  стремится к своему предельному значению, равному для одноатомного газа  $9(n-1)(n-2)/10K^2$  согласно (5.12) и для двухатомного газа  $25(n-1)(n-2)/14K^2$  согласно (5.14).

Как следует из фиг. 5, 7, величина  $f_1$  монотонно изменяется при уменьшении  $\eta$  от нуля до своего предельного значения. При  $n=1$  и  $n=2$  имеем  $f \equiv 0$ .

Величина  $g_1$  (фиг. 6, 8) при  $\eta \rightarrow 0$  стремится к тем же значениям, что и  $f_1$ .



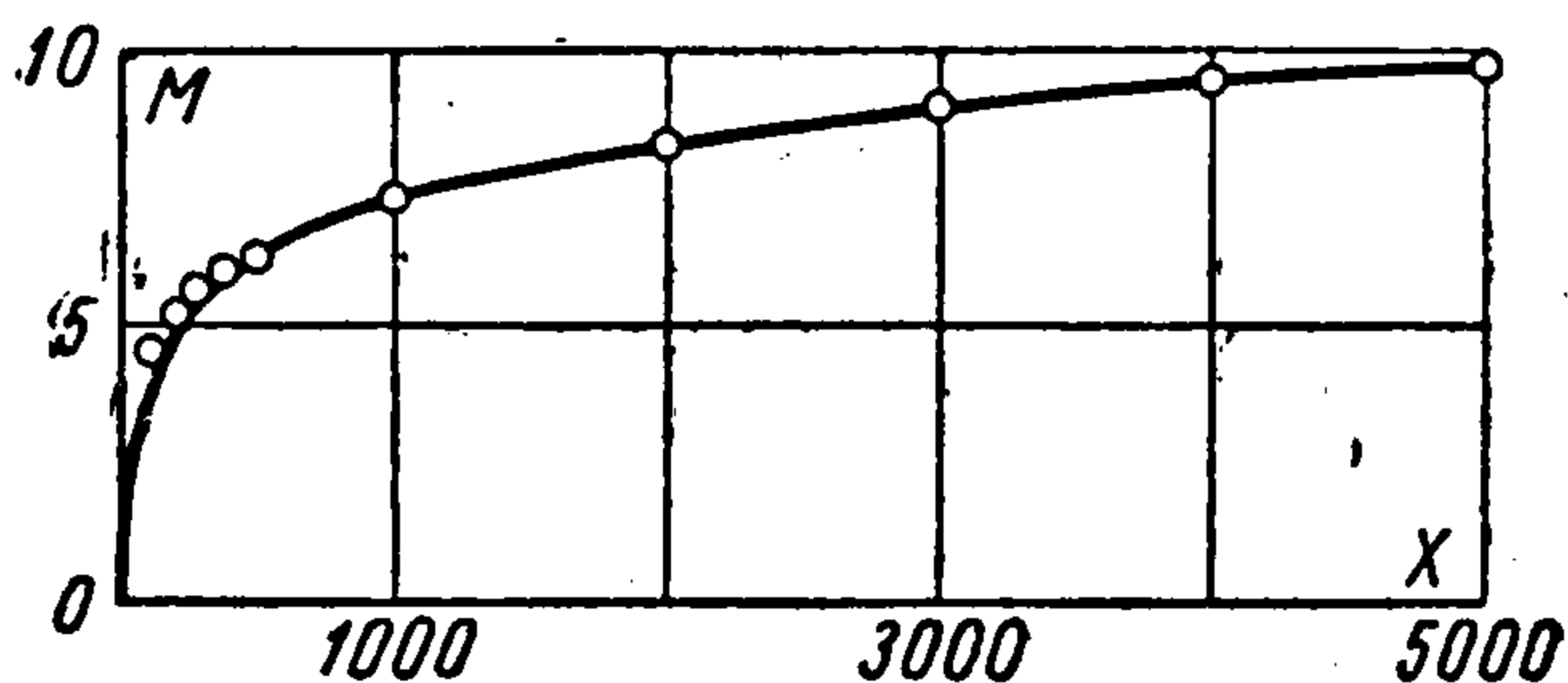
Фиг. 7



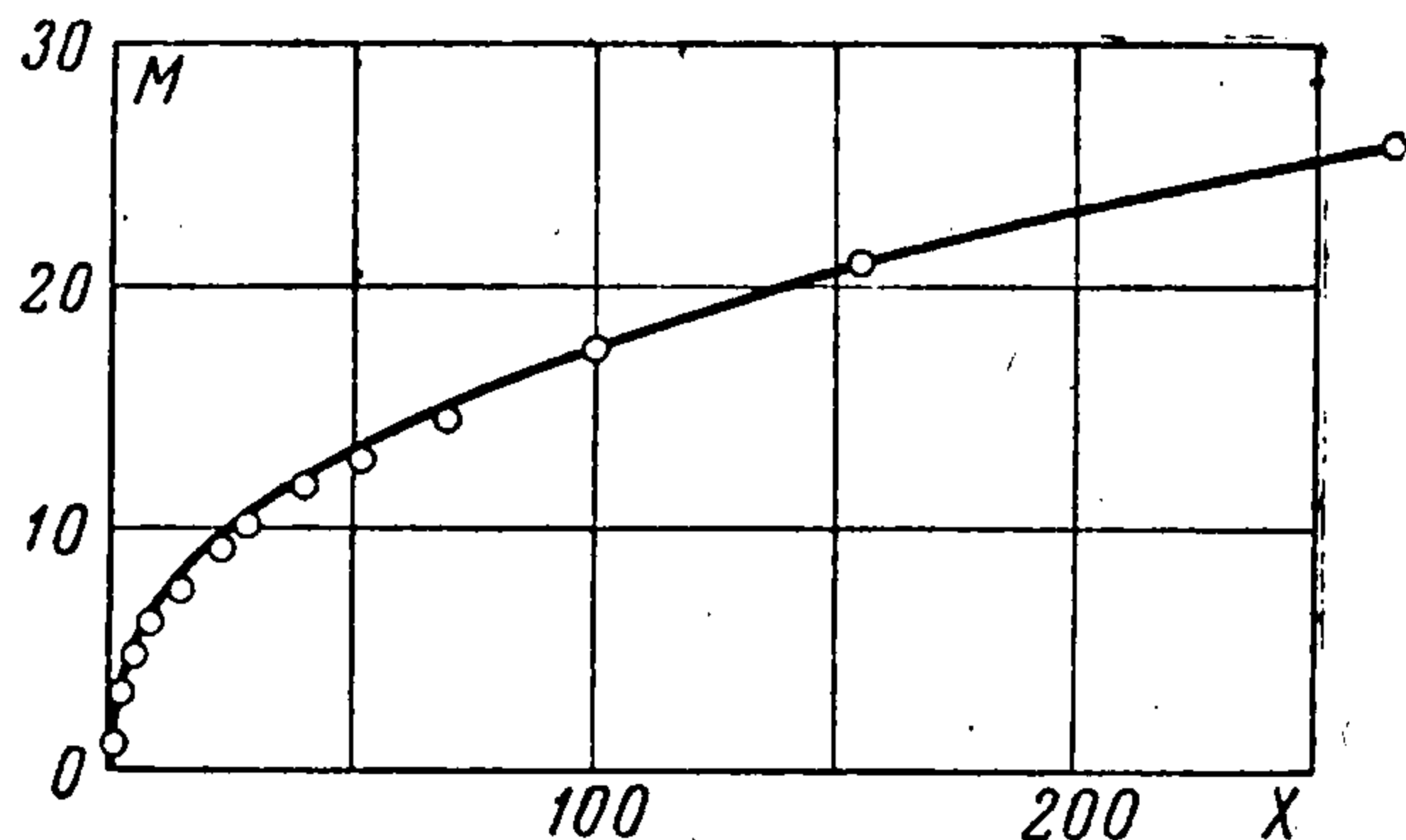
Фиг. 8

В отличие от  $f_1$ ,  $g_1$  может иметь немонотонный характер. При  $n=1$   $g \equiv 0$ . При  $n=2$  функция  $g_1$  стремится к нулю при  $\eta \rightarrow 0$ .

Из приведенных расчетов можно сделать заключение о том, что приемлемая точность изложенного выше приближенного решения задачи Коши достигается при  $K \geq 3.5$  в случае одноатомного газа и  $K \geq 7$  в случае двухатомного газа.



Фиг. 9



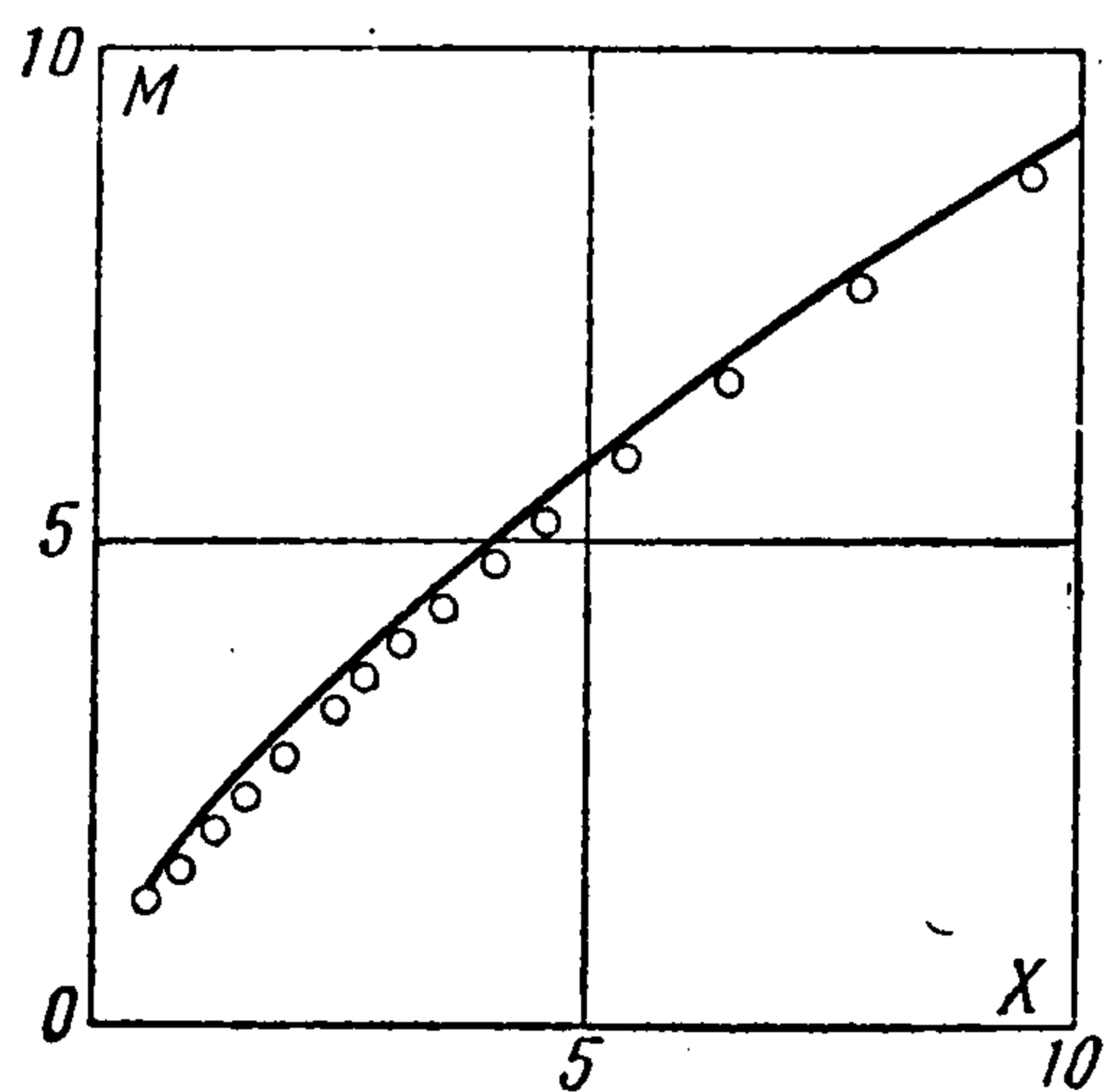
Фиг. 10

Приведем, кроме того, сравнение (фиг. 9—11) полученного решения задачи Коши с результатами численных расчетов для случая свободного истечения газа из отверстия с плоской поверхностью перехода.

Из уравнений (2.2) и (1.4) (последнее с учетом  $\eta \ll 1$  записывается  $M = [(x-1)\eta]^{-1/2}$ ) и, учитывая замечание 3 в § 2, решение для числа  $M$  вдоль оси струи приобретает вид

$$M = M_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{x-1}{2}(1+\nu)} \quad (5.16)$$

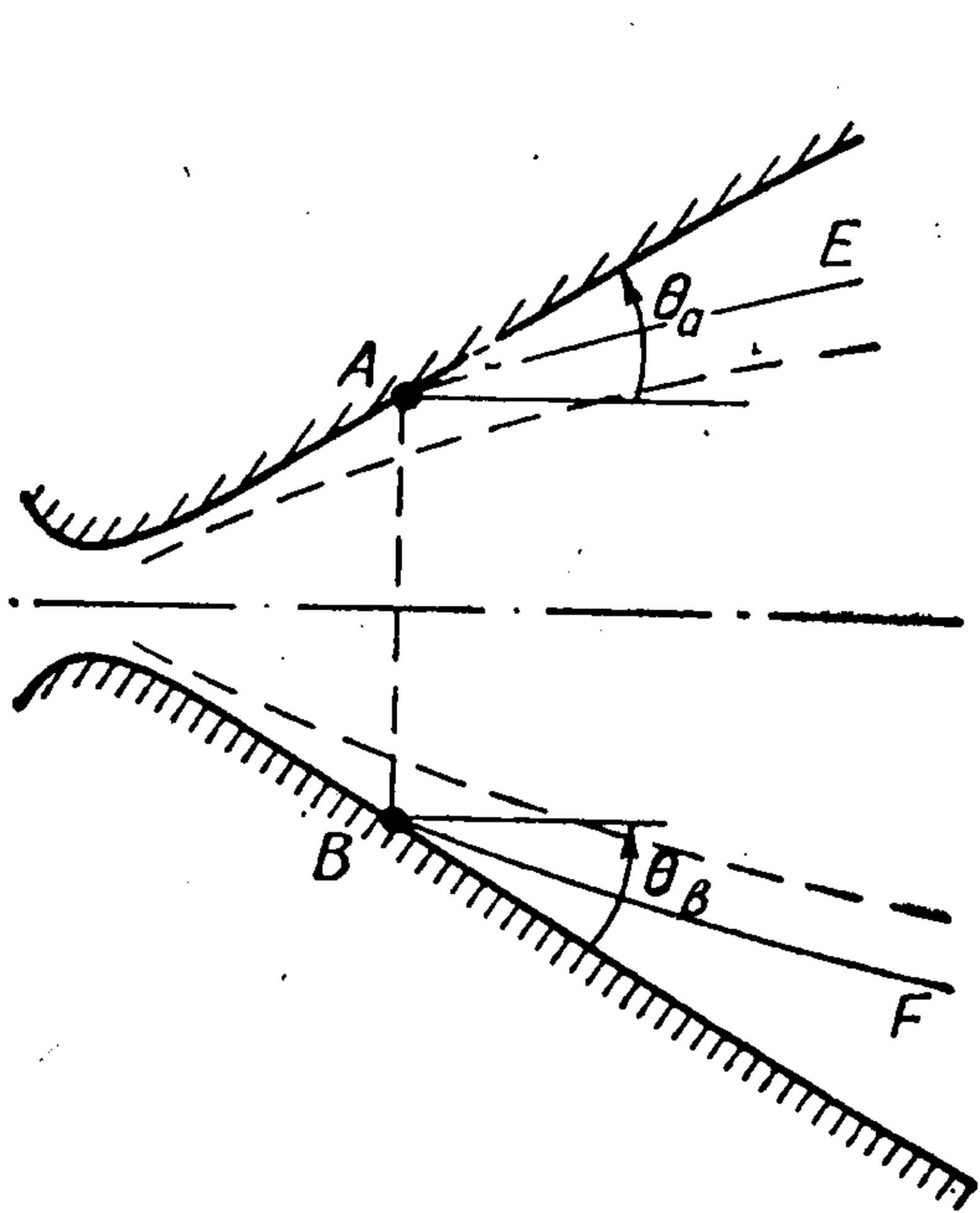
На фиг. 9—11 дана зависимость числа  $M$  от расстояния  $X$  вдоль оси струи, где  $X = r/R$  и  $R$  — радиус или половина высоты начального отверстия, через которое происходит истечение.



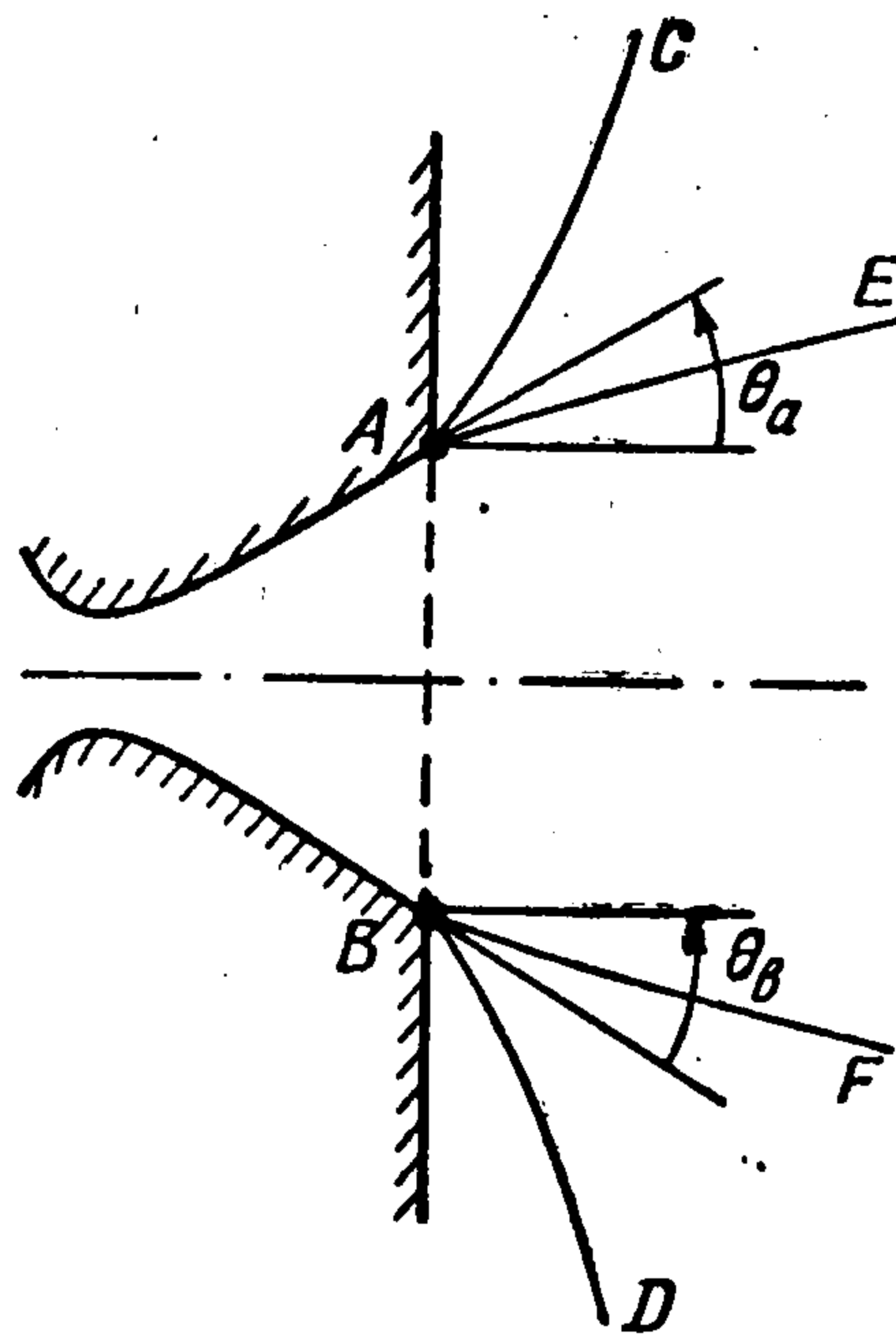
Фиг. 11

Фиг. 9 соответствует плоскому течению при  $\chi = 1.4$ , данные численного расчета (сплошная линия) взяты из работы [7], кружками помечены значения, вычисленные по формуле (5.16). Фиг. 10 ( $\chi = 1.4$ , численные данные [8], как и на фиг. 11, представлены кружками) и фиг. 11 ( $\chi = 1.6667$ , численный расчет был проведен О. Н. Кацковой в Вычислительном Центре АН СССР) соответствуют осесимметрическому течению. Сплошной линией на фиг. 10, 11 представлена зависимость (5.16). Постоянные величины  $M_0$  и  $r_0$  в формуле (5.16) определялись при некотором  $X = X_0$ , исходя из численных расчетов. Достаточная точность достигалась уже при  $M_0 \geq 4$ . Итак, приближенное решение задачи Коши хорошо подтверждается результатами точных решений и точных численных расчетов.

§ 6. О влиянии вязкости. Вывод о появлении бесконечных областей определения решения может быть использован при анализе внутренних течений. Рассмотрим гиперзвуковое течение в сопле, как показано на фиг. 12а<sup>1</sup>. В соответствии с построенным решением при достаточно



Фиг. 12а



Фиг. 12б

большом значении числа  $M$  на некоторой линии  $AB$  (так что на  $AB$  выполняется условие  $K \gg 1$ ) течение в сопле будет полностью определяться внутри бесконечной области определения решения  $AEFB$  заданием начального участка левее  $AB$ . Разность между предельным полууглом  $0.5(\theta_e - \theta_f)$  и полууглом раствора сопла на линии  $AB$   $0.5(\theta_a - \theta_b)$  определяется из уравнения (4.3), которое можно переписать, предполагая  $\theta_a = -\theta_b = \theta$ ,  $\theta_e = -\theta_f = \theta'$  и вводя число  $M$  в точке  $A$  ( $M_a$ )

$$\theta - \theta' = \frac{2}{(\kappa - 1)(1 + \nu)} \frac{1}{M_a} \quad (6.1)$$

Например, для осесимметрического сопла при  $M_a = 10$  разница между  $\theta$  и  $\theta'$  составит примерно  $14^\circ$  при  $\kappa = 1.4$  и  $8.5^\circ$  при  $\kappa = 1.667$ .

В предположении отсутствия диссипативных процессов, которое всюду до сих пор принималось, течение в области  $AEFB$  останется прежним, если контур сопла правее линии  $AB$  изменить, как показано на фиг. 12б, так что за линией  $AB$  осуществляется истечение в вакуум.

Однако во внутренних гиперзвуковых течениях из-за больших разрежений эффекты вязкости и теплопроводности, как правило, весьма значительны. Можно утверждать, что эти эффекты будут проявляться в случаях течений (фиг. 12а) и (фиг. 12б) существенно по-разному. В первом случае пограничный слой, образующийся на стенках (пунктир на фиг. 12а), при достаточной длине сопла может захватить область  $AEFB$  и, следовательно, исказить течение.

Во втором случае процесс диссипации при истечении в вакуум не связан с наличием пограничного слоя.

<sup>1</sup> Рассматривается сопло, в котором происходит разгон потока без его последующего спрямления. Построение контура гиперзвукового сопла, в котором осуществляется частичное спрямление потока, было проведено А. А. Никольским в докладе на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике 27 января — 3 февраля 1960 г.

Через границы струи  $AC$  и  $BD$  на фиг. 126 отсутствует передача импульса и тепла к окружающему пространству, которым является вакуум, и потому суммарный импульс и энергия струи, несмотря на наличие диссипативных процессов, сохраняются. Происходит лишь необратимый переход механической энергии в тепловую, аналогично тому, как это происходит в ударной волне.

Можно ожидать, что влияние вязкости и теплопроводности гораздо сильнее будет сказываться на течении (фиг. 12а), чем в случае (фиг. 12б)<sup>1</sup>. Тем не менее, диссипативные процессы ограничивают применимость решения (2.2) уравнений идеального газа и во втором случае.

Для того чтобы оценить область применимости указанных решений, предположим, что в бесконечной области определения решения  $AEFB$  имеет место гиперзвуковое течение от источника (в самом общем случае течение, очевидно, близко к течению от источника), для которого справедлива формула (2.2), если считать, что величины с индексом 0 постоянны по всей области, и  $a = 0$ . Выражая параметры источника через соответствующие параметры в критическом сечении сопла, ниже обозначенные индексом \*, имеем для радиальной составляющей скорости  $u$  и остальных величин (1.7)

$$\begin{aligned} u &= V_m \left[ 1 - (\kappa + 1)^{-1} \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^{(\kappa - 1)/2} \left( \frac{r_*}{r} \right)^{(\kappa - 1)(1 + \nu)} \right] \\ p &= p_* \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^{\kappa/2} \left( \frac{r_*}{r} \right)^{\kappa(\nu + 1)}, \quad \rho = \rho_* \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^{1/2} \left( \frac{r_*}{r} \right)^{1 + \nu} \\ T &= T_* \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^{(\kappa - 1)/2} \left( \frac{r_*}{r} \right)^{(\kappa - 1)(\nu + 1)}, \quad M = \left( \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right)^{(\kappa + 1)/4} \left( \frac{r}{r_*} \right)^{(\nu + 1)(\kappa - 1)/2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

где  $T$  — температура, радиус-вектор  $r$  отсчитывается от центра критического сечения,  $r_*$  — радиус критического сечения.

Будем предполагать, что число Прандтля постоянно и, кроме того, предположим степенной характер зависимости коэффициента вязкости  $\mu$  от температуры в виде  $\mu = \mu_* (T/T_*)^n$ . Подставим выражения (6.2) в уравнения Навье — Стокса и составим отношение наибольшего вязкого члена к величине конвективного

$$\left| \frac{\mu u / r^2}{\rho u u'} \right| = \left| \frac{\mu}{\rho u' r^2} \right| = \frac{1}{R} \leq \varepsilon \quad (6.3)$$

Здесь  $R$  обозначает местное число Рейнольдса, а  $\varepsilon$  характеризует требуемую точность (во всяком случае  $\varepsilon \leq 0,1$ ). Уравнение (6.3) позволяет определить то расстояние, обозначим его через  $r^\circ$ , на котором проявляется вязкость, и определить соответствующее этому значению число  $M$  (обозначим его через  $M^\circ$ ).

Пользуясь уравнениями (6.2), получаем

$$\frac{r^\circ}{r_*} \leq \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^\alpha (\varepsilon R_*)^\beta, \quad M^\circ \leq \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^\gamma (\varepsilon R)^\delta \quad (6.4)$$

<sup>1</sup> Разумеется, все сказанное выше справедливо и в том случае, когда происходит истечение (фиг. 12б) в среду с конечным давлением  $p$ . Необходимо лишь, чтобы давление на линии  $AB$  было во много раз больше  $p$ . При этом приведенные рассуждения сохраняют силу до тех пор, пока давление в струе не становится близким к  $p$ .

где  $R_*$  — число Рейнольдса, подсчитанное по характерным параметрам в критическом сечении, определяемое выражением

$$R_* = \frac{\rho_* u_* r_* (\nu + 1)}{\mu_*}$$

$$\alpha = \frac{\kappa + 1 - (\kappa - 1)n}{2[(\kappa - 1)(1 + \nu)(1 - n) + \nu]}, \quad \beta = \frac{1}{(\kappa - 1)(1 + \nu)(1 - n) + \nu} \quad (6.5)$$

$$\gamma = \frac{2n(\kappa - 1)(1 + \nu) - (\kappa + 1)\nu}{4[(\kappa - 1)(1 + \nu)(1 - n) + \nu]}, \quad \delta = \frac{(\kappa - 1)(1 + \nu)}{2[(\kappa - 1)(1 + \nu)(1 - n) + \nu]}$$

( $n$  — показатель степени в выражении для  $\mu$ ).

Как показывает анализ выражений (6.4), вязкость может оказаться существенной при некотором  $r^\circ < \infty$ , если  $n < n^\circ$ , где  $n^\circ = 1$  для плоского и  $n^\circ = 1 + 0.5(\kappa - 1)^{-1}$  для осесимметрического течений. В случае плоского потока даже при  $n < n^\circ$  величина  $M^\circ$  оказывается настолько большой, что практически ограничение (6.4) несущественно. Например, при  $n = 0.7$ ,  $\kappa = 1.4$ ,  $\varepsilon R_* = 10^2$ , для  $M^\circ$  получаем значение  $\sim 3000$ . В случае осесимметрического течения могут встретиться режимы течения, когда вязкость существенно ограничивает применимость решения (2.2).

Значения  $M^\circ$

| $n$  | $\kappa$ | $\varepsilon R_*$ |        |        |        |
|------|----------|-------------------|--------|--------|--------|
|      |          | $10^2$            | $10^3$ | $10^4$ | $10^5$ |
| 0.75 | 1.67     | 12.0              | 38.0   | 120.7  | 383.3  |
|      | 1.4      | 7.3               | 15.7   | 33.7   | 72.6   |
|      | 1.2      | 5.5               | 8.4    | 12.8   | 19.4   |
| 0.5  | 1.67     | 8.4               | 21.0   | 53.0   | 133.5  |
|      | 1.4      | 6.7               | 12.9   | 24.8   | 48.0   |
|      | 1.2      | 5.3               | 7.8    | 11.4   | 16.7   |

Проиллюстрируем это следующими значениями  $M^\circ$  при двух значениях  $n$ .

Как следует из таблицы, по мере уменьшения  $\kappa$  и  $n$ , что обычно сопутствует увеличению температуры, влияние вязкости и теплопроводности возрастает. При  $r > r^\circ$ , когда процессы диссипации существенны, течение описывается уравнениями Навье — Стокса, и решение (2.2) неприменимо.

Автор приносит глубокую благодарность А. А. Никольскому за внимание к работе.

Поступила 26 IX 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л а д ы ж е н с к и й М. Д. О течениях газа с большой сверхзвуковой скоростью. ДАН СССР, 1960, т. 134, № 2.
2. T s i e n Н. S. Similarity laws of hypersonic flow. J. Math. Phys., 1946, vol 25, № 3.
3. H a u e s W. D: On hypersonic similitude. Quart. Appl. Math., 1947, vol 5, № 1.
4. И л ь ю ш и н А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. XX, вып. 6.
5. Ф а л ь к о в и ч С. В. Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1947, т. XI, вып. 4.
6. Л а н д а у Л. Д. и Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред, ГИТТЛ, 1957.
7. S h a r i g o А. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid, I, Ronald Press, 1953.
8. К а ц к о в а О. Н., Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. «Сб. Вычислительная математика». Изд-во АН СССР, 1957, № 2.