Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОМ ГАЗЕ

В. М. Жданов

(Свердловск)

В работе [1] в приближении «13 моментов» метода Грэда [2] найдена замкнутая система уравнений переноса для многокомпонентной газовой смеси. Если взаимодействия между частицами (в том числе и кулоновские) описываются в терминах парных столкновений, аналогичная система уравнений может быть записана для ионизованного газа, состоящего из произвольного числа нейтральных и заряженных компонент. При этом в отличие от работы [1] в левую часть уравнений вводятся члены, обусловленные наличием электрического и магнитного полей. Для полностью ионизованной двухкомпонентной плазмы подобная система уравнений рассматривалась недавно в [3].

Уравнениями для первых нескольких моментов функции распределения служат обычные уравнения непрерывности, движения и энергии. Уравнение движения для отдельной компоненты газа вместе с соотношениями для тензоров вязких напряжений и тепловых потоков частиц, вытекающих из уравнений для моментов второго и третьего порядка, образует замкнутую систему, позволяющую рассмотреть все явления переноса и вычислить соответствующие кинетические коэффициенты.

В настоящей работе получены выражения для тензоров вязкости и тепловых потоков частиц в трехкомпонентной плазме (электроны, ионы, нейтралы). Рассматривается вывод обобщенного закона Ома для такой плазмы с учетом тепловых потоков частиц в уравнениях диффузии. Получены выражения для тока проводимости вдоль и поперек магнитного поля, включая проводимость за счет градиентов давления и температуры.

1. Общая система уравнений. Уравнения переноса заметно упрощаются, если предположить, что макроскопические параметры газа мало меняются на расстояниях порядка эффективной длины свободного пробега и за времена порядка времени между столкновениями [1]. Полагая температуры частиц одинаковыми и исключая из рассмотрения явления, связанные с неупругими столкновениями, приходим к следующей общей системе уравнений переноса для многосортной плазмы в магнитном поле:

$$\rho_\alpha \frac{d_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{dt} + \operatorname{grad} p_\alpha + \operatorname{div} \pi_\alpha - n_\alpha e_\alpha \mathbf{E}' - n_\alpha e_\alpha \mathbf{w}_\alpha \times \mathbf{B} = \tag{1.1}$$

$$= - n_\alpha \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left[(\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \zeta_{\alpha\beta} \left(\frac{\mathbf{h}_\alpha}{p_\alpha} - \frac{m_\alpha}{m_\beta} \frac{\mathbf{h}_\beta}{p_\beta} \right) \right]$$

$$p_\alpha \left\{ \frac{\partial u^r}{\partial x_m} \right\} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \{ \pi_\alpha{}^{lr} \varepsilon^{mlk} B^k \} = \tag{1.2}$$

$$= - n_\alpha \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \frac{kT}{m_\alpha + m_\beta} \left(a_{\alpha\beta} \frac{\pi_\alpha{}^{rm}}{p_\alpha} + a_{\alpha\beta}' \frac{\pi_\beta{}^{rm}}{p_\beta} \right)$$

$$\frac{p_\alpha}{T} \operatorname{grad} T - \frac{2}{5} \frac{e_\alpha}{kT} (\mathbf{h}_\alpha \times \mathbf{B}) + \frac{2}{5} \operatorname{div} \pi_\alpha = \tag{1.3}$$

$$= - n_\alpha \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left[b_{\alpha\beta} \frac{\mathbf{h}_\alpha}{p_\alpha} + b_{\alpha\beta}' \frac{\mathbf{h}_\beta}{p_\beta} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \zeta_{\alpha\beta} (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) \right]$$

Здесь m_α, e_α, n_α, ρ_α и $\mathbf{u}_\alpha$ — соответственно масса, заряд, плотность, массовая плотность и средняя макроскопическая скорость частиц α-сорта; p_α и π_α — парциальное давление и тензор вязких напряжений α-компоненты; T — температура газа; k — постоянная Больцмана. Относительный тепловой поток α-компоненты $\mathbf{h}_\alpha$ и средняя относительная скорость $\mathbf{w}_\alpha$ определены выражениями

$$\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha - \frac{5}{2} p_\alpha \mathbf{w}_\alpha, \qquad \mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho}\sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \tag{1.4}$$

где $\mathbf{q}_\alpha$ — тепловой поток частиц α-сорта, $\mathbf{u}$ — средняя массовая скорость газа. При записи (1.1) — (1.2) использованы сокращения

$$\frac{d_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \nabla) \qquad \{KL\}^{rm} = \frac{1}{2}(K^r L^m + L^r K^m) - \frac{1}{3}\delta^{rm} K^l L^l$$

и

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, ε^{mlk} в (1.2) обозначает перестановочный тензор.

В правых частях (1.1)—(1.3) фигурируют «моменты относительно интеграла столкновений», вычисленные при помощи приближения «13 моментов», и функции распределения [1]. При этом $\mu_{\alpha\beta}$ — приведенная масса частиц α и β-сорта, а величины $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}'$, $b_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}'$ и $\zeta_{\alpha\beta}$ зависят в общем случае от отношений масс частиц, а также от отношений различных типов поперечных сечений для данного вида столкновений, обозначаемых соответственно через A^*, B^* и C^*

$$a_{\alpha\beta} = 1 + 0.6\frac{m_\beta}{m_\alpha}A_{\alpha\beta}^*, \qquad a_{\alpha\beta}' = -(1 - 0.6\, A_{\alpha\beta}^*)$$

$$b_{\alpha\beta} = \frac{m_\beta^2}{(m_\alpha + m_\beta)^2}\left[1 - 0.48\, B_{\alpha\beta}^* + 0.64\frac{m_\alpha}{m_\beta}A_{\alpha\beta}^* + 1.20\left(\frac{m_\alpha}{m_\beta}\right)^2\right] \tag{1.6}$$

$$b_{\alpha\beta}' = -\frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2}(2.20 - 0.48 B_{\alpha\beta}^* - 0.64 A_{\alpha\beta}^*)$$

$$\zeta_{\alpha\beta} = \frac{6}{5}C_{\alpha\beta}^* - 1$$

$\tau_{\alpha\beta}$ имеет порядок величины времени между столкновениями частиц α- и β-сорта. Для столкновений заряженных частиц с нейтральными и нейтралов между собой $\tau_{\alpha\beta}$ простым образом связано с бинарным коэффициентом диффузии $[D_{\alpha\beta}]_1$ (первое приближение Чепмена — Каулинга [4])

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{n_\beta kT}{\mu_{\alpha\beta}\, n\, [D_{\alpha\beta}]_1} \tag{1.7}$$

В частности, для модели частиц — твердых упругих шариков

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{16}{3} n_\beta \left(\frac{kT}{2\pi\mu_{\alpha\beta}}\right)^{1/2} Q_{\alpha\beta}, \qquad A^* = B^* = C^* = 1 \tag{1.8}$$

где $Q_{\alpha\beta}$ — поперечное сечение столкновений частиц α- и β-сорта. Заметим, что для так называемых «максвелловских» молекул

$$A^* = 5/6, \quad B^* = 3/4, \quad C^* = 5/6 \tag{1.9}$$

В случае кулоновских взаимодействий при вычислении правых частей (1.1)—(1.3) расходимость интегральных поперечников рассеяния может быть устранена обрезанием параметра столкновений на расстояниях порядка экранирующей дебаевской длины λ_D. Тогда

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{16}{3} n_\beta \left(\frac{2\pi kT}{\mu_{\alpha\beta}}\right)^{1/2} \left(\frac{e_\alpha e_\beta}{2kT}\right)^2 \ln \Lambda_{\alpha\beta} \qquad (1.10)$$

где

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{3kT}{|e_\alpha e_\beta|} \lambda_D = \frac{3kT}{|e_\alpha e_\beta|} \left(\frac{kT}{4\pi \sum\limits_\alpha n_\alpha e_\alpha^2}\right)^{1/2} \qquad (1.11)$$

Для этого случая

$$A_{\alpha\beta}^* = 1 - (2 \ln \Lambda_{\alpha\beta})^{-1}, \qquad B^* = 1, \qquad C^* = 1/3 \qquad (1.12)$$

Система уравнений (1.1)—(1.3) используется для определения тензоров вязкости и тепловых потоков частиц в плазме, а также тока проводимости

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha \mathbf{w}_\alpha$$

При этом сначала из (1.2) находятся значения π_γ, суммирование которых приводит к выражению для полного тензора вязкости π. Найденные значения должны быть подставлены в левые части (1.1) и (1.3). Затем из решения (1.3) определяются величины тепловых потоков частиц $\mathbf{h}_\gamma$. Полученные выражения описывают перенос тепла как за счет градиента температуры, так и за счет относительного движения компонент (диффузии). Члены, пропорциональные $\operatorname{div} \pi_\gamma$, являются, как правило, несущественными. Полный поток тепла в плазме

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{h}_\alpha + \frac{5}{2} \sum_\alpha p_\alpha \mathbf{w}_\alpha \qquad (1.13)$$

Для отыскания диффузионных скоростей компонент $\mathbf{w}_\alpha$ и связанного с ними тока проводимости $\mathbf{j}$ исходным служит уравнение движения для α-компоненты (1.1). При этом удобно привести его к виду, в котором производная $d_\alpha \mathbf{u}_\alpha / dt$ исключена при помощи уравнения движения газа в целом[1]

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \operatorname{grad} p + \operatorname{div} \pi - \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \qquad (1.14)$$

где

$$\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha, \qquad p = \sum_\alpha p_\alpha, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)$$

В результате приходим к следующей системе уравнений диффузии в многосортной плазме:

$$-\left(\operatorname{grad} p_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \operatorname{grad} p\right) - \left(\operatorname{div} \pi_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \operatorname{div} \pi\right) +$$
$$+ n_\alpha e_\alpha \mathbf{E}' + n_\alpha e_\alpha \mathbf{w}_\alpha \times \mathbf{B} - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} =$$
$$= n_\alpha \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left[(\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \zeta_{\alpha\beta} \left(\frac{\mathbf{h}_\alpha}{p_\alpha} - \frac{m_\alpha}{m_\beta} \frac{\mathbf{h}_\beta}{p_\beta}\right)\right] \qquad (1.15)$$

(В (1.15) опущен заведомо малый член $(d\mathbf{u}/dt - d_\alpha \mathbf{u}_\alpha / dt)$).

[1] При записи (1.14) используется условие квазинейтральности плазмы $\sum\limits_\alpha n_\alpha e_\alpha = 0$.

Система уравнений диффузии (1.15) вместе с найденными выражениями для π_γ и $\mathbf{h}_\gamma$ и очевидным условием

$$\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0 \tag{1.16}$$

полностью определяет значения диффузионных скоростей компонент и может быть использована для вывода обобщенного закона Ома, связывающего ток проводимости $\mathbf{j}$ в газе с градиентами термодинамических величин и значениями электрического и магнитного полей. Ниже рассматривается, главным образом, случай трехкомпонентного газа, состоящего из электронов, одного сорта ионов и нейтральных атомов. При этом массы иона и нейтрала считаются фактически равными. Вид решений заметно упрощается благодаря наличию в уравнениях малого параметра — отношения массы электрона m_e к массе иона m_i или массе атома m_a. В результате, например, тензор вязкости и тепловой поток электронов находятся независимо от уравнений для других компонент, а соответствующие величины для ионов и атомов определяются из системы двух уравнений, в которых уже не фигурируют π_e и $\mathbf{h}_e$.

2. Тензоры вязкости. Уравнение (1.2) для электронов после пренебрежения членами $\sim (m_e / m_i)$ можно представить в виде

$$\pi_e^{rm} = -2\eta_e e^{rm} - \tfrac{4}{3}\{\pi_e^{lr}\varepsilon^{mlk}\omega_e^k\tau_e\} \tag{2.1}$$

Здесь

$$\eta_e = \tfrac{2}{3} p_e\tau_e, \quad \tau_e^{-1} = 0.4\tau_{ee}^{-1} + 0.8\sum_{\beta\neq e} A_{e\beta}^*\tau_{e\beta}^{-1} \tag{2.2}$$

$$\omega_e = e\mathbf{B} / m_e \qquad (e = |e_e|) \tag{2.3}$$

$$e^{rm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^r}{\partial x_m} + \frac{\partial u^m}{\partial x_r}\right) - \frac{1}{3}\delta^{rm}\frac{\partial u^l}{\partial x_l} \tag{2.4}$$

Решение (2.1) имеет формально такой же вид, как приведенное у Чепмена — Каулинга для случая заряженного однокомпонентного газа [4]. Направляя $\mathbf{B}$ вдоль x, для компонент тензора вязкости электронов в декартовой системе координат имеем (индекс e в правой части для простоты опущен)

$$\begin{aligned}
\pi_e^{xx} &= -2\eta e^{xx}\\
\pi_e^{yy} &= -\frac{2\eta}{1+{}^{16}/_9\,\omega^2\tau^2}\left[e^{yy} + \frac{1}{2}(e^{yy}+e^{zz})\frac{16}{9}\omega^2\tau^2 - e^{yz}\frac{4}{3}\omega\tau\right]\\
\pi_e^{zz} &= -\frac{2\eta}{1+{}^{16}/_9\,\omega^2\tau^2}\left[e^{zz} + \frac{1}{2}(e^{yy}+e^{zz})\frac{16}{9}\omega^2\tau^2 + e^{yz}\frac{4}{3}\omega\tau\right].\\
\pi_e^{yz} = \pi_e^{zy} &= -\frac{2\eta}{1+{}^{16}/_9\,\omega^2\tau^2}\left[e^{yz} - \frac{1}{2}(e^{zz}-e^{yy})\frac{4}{3}\omega\tau\right]\\
\pi_e^{xy} = \pi_e^{yx} &= -\frac{2\eta}{1+{}^{4}/_9\,\omega^2\tau^2}\left[e^{xy} - e^{xz}\frac{2}{3}\omega\tau\right]\\
\pi_e^{xz} = \pi_e^{zx} &= -\frac{2\eta}{1+{}^{4}/_9\,\omega^2\tau^2}\left[e^{xz} + e^{xy}\frac{2}{3}\omega\tau\right]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\omega = |\omega_e|$ — циклотронная частота электронов. Отметим, что в выражениях, приводимых Чепменом—Каулингом [4], при записи π_e^{yz} допущена ошибка: перед вторым членом в квадратных скобках должен стоять знак —, а не +. В противном случае, как указали Хоймен, Мазур и де-Гроот [5], нарушаются соотношения взаимности Онзагера[1].

Запишем теперь (1.2) для случая ионов и нейтралов. Пренебрегая опять членами $\sim (m_e/m_i)$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\pi_i^{rm} - \alpha\tau_i\tau_{ai}^{-1}\pi_a^{rm} = -2\eta_i e^{rm} + \frac{4}{3}\{\pi_i^{lr}\varepsilon^{mlk}\omega_i^k\tau_i\} \tag{2.6}$$

$$\pi_a^{rm} = \alpha\tau_a\tau_{ia}^{-1}\pi_i^{rm} - 2\eta_a e^{rm}$$

где

$$\eta_i = \frac{2}{3}p_i\tau_i, \quad \tau_i^{-1} = \left[0.4\tau_{ii}^{-1} + \frac{1}{3}(1 + 0.6A_{ia}^*)\tau_{ia}^{-1} + \frac{4}{3}\frac{m_e}{m_i}\tau_{ie}^{-1}\right] \tag{2.7}$$

$$\eta_a = \frac{2}{3}p_a\tau_a, \quad \tau_a^{-1} = \left[0.4\tau_{aa}^{-1} + \frac{1}{3}(1 + 0.6A_{ia}^*)\tau_{ai}^{-1} + \frac{4}{3}\frac{m_e}{m_a}\tau_{ae}^{-1}\right]$$

$$\alpha = \frac{1}{3}(1 - 0.6A_{ia}^*), \qquad \omega_i = \frac{Ze\mathbf{B}}{m_i}, \qquad |e_i| = Ze \tag{2.8}$$

В выражениях для τ_i^{-1} и τ_a^{-1} оставлены последние члены в квадратных скобках, так как отношение $m_e\tau_{\beta e}^{-1}/m_\beta\tau_{\beta i}^{-1}$ ($\beta = i, a$) пропорционально $(m_e/m_i)^{1/2}$, а не просто отношению масс частиц.

Подставляя π_a из второго уравнения (2.6) в первое, приходим к уравнению для π_i, по форме совпадающему с (2.1), но с другими эффективными значениями η и $\omega\tau$. Поэтому компоненты тензора вязкости ионов по осям координат определяются выражениями, аналогичными (2.5), если положить в последних

$$\eta = \eta_i\frac{1 + \alpha\tau_a\tau_{ia}^{-1}}{1 - \alpha^2\tau_a\tau_i\tau_{ia}^{-1}\tau_{ai}^{-1}}, \qquad \omega\tau = -\frac{Ze|\mathbf{B}|}{m_i}\frac{\tau_i}{1 - \alpha^2\tau_a\tau_i\tau_{ia}^{-1}\tau_{ai}^{-1}} \tag{2.9}$$

Для полностью ионизованного газа выражения для π_e и π_i совпадают с найденными для этого случая в [3].

Тензор вязкости для нейтральных атомов выражается через π_i из второго уравнения (2.6). Для частного случая, когда $|\mathbf{B}| = 0$

$$\pi_a^{rm} = -2\eta_a\frac{1 + \alpha\tau_i\tau_{ai}^{-1}}{1 - \alpha^2\tau_a\tau_i\tau_{ia}^{-1}\tau_{ai}^{-1}}e^{rm} \tag{2.10}$$

Складывая π_e, π_i и π_a, получаем выражение для тензора вязкости газа в целом.

3. Потоки тепла. Уравнение (1.3) для потока тепла электронов после пренебрежения членами $\sim (m_e/m_i)$ удобно переписать в виде

$$\mathbf{h}_e = -\lambda_e\mathbf{R}_e - (\mathbf{h}_e \times \boldsymbol{\omega}_e\tau_e^*) \tag{3.1}$$

где

$$\lambda_e = \frac{5k}{2m_e}p_e\tau_e^*, \quad (\tau_e^*)^{-1} = 0.4\tau_{ee}^{-1} + 2.5\sum_{\beta\neq e}(1 - 0.48B_{e\beta}^*)\tau_{e\beta}^{-1} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{R}_e = \operatorname{grad} T + \frac{2}{5}\frac{T}{p_e}\operatorname{div}\boldsymbol{\pi}_e + \frac{m_e}{k}\sum_{\beta\neq e}\tau_{e\beta}^{-1}\zeta_{e\beta}(\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_\beta) \tag{3.3}$$

[1] Автор признателен В. Б. Баранову, обратившему его внимание на соответствующее замечание в [5].

Решением (3.1) служит выражение

$$\mathbf{h}_e = -\frac{\lambda}{1+(\omega\tau^*)^2}\left[\mathbf{R} + \omega\tau^*(\omega\tau^*\mathbf{R}) + \mathbf{R}\times\omega\tau^*\right] \qquad (3.4)$$

(ниндекс e для простоты опущен).

Значения $\mathbf{h}_i$ и $\mathbf{h}_a$ определяются из системы

$$\mathbf{h}_i - \beta\tau_i{}^*\tau_{ai}{}^{-1}\mathbf{h}_a = -\lambda_i\mathbf{R}_i + \mathbf{h}_i\times\omega_i\tau_i{}^*, \qquad \mathbf{h}_a = \beta\tau_a{}^*\tau_{ia}{}^{-1}\mathbf{h}_i - \lambda_a\mathbf{R}_a \qquad (3.5)$$

где

$$\lambda_i = \frac{5k}{2m_i} p_i\tau_i{}^* \qquad (3.6)$$

$$(\tau_i{}^*)^{-1} = 0.4\tau_{ii}^{-1} + \left(\frac{11}{16} - 0.15B_{ia}{}^* + 0.20A_{ia}{}^*\right)\tau_{ia}{}^{-1} + 3\,\frac{m_e}{m_i}\,\tau_{ie}{}^{-1}$$

$$\lambda_a = \frac{5k}{2m_a} p_a\tau_a{}^* \qquad (3.7)$$

$$(\tau_a{}^*)^{-1} = 0.4\tau_{aa}{}^{-1} + \left(\frac{11}{16} - 0.15B_{ia}{}^* + 0.20A_{ia}{}^*\right)\tau_{ai}{}^{-1} + 3\frac{m_e}{m_i}\tau_{ae}{}^{-1}$$

$$\mathbf{R}_i = \operatorname{grad} T + \frac{2}{5}\frac{T}{p_i}\operatorname{div}\pi_i + \frac{m_i}{4k}\zeta_{ia}\tau_{ia}{}^{-1}(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_a)$$

$$\mathbf{R}_a = \operatorname{grad} T + \frac{2}{5}\frac{T}{p_a}\operatorname{div}\pi_a + \frac{m_a}{4k}\zeta_{ai}\tau_{ai}{}^{-1}(\mathbf{w}_a - \mathbf{w}_i) \qquad (3.8)$$

$$\beta = \frac{11}{16} - 0.15B_{ia}{}^* - 0.20A_{ia}{}^*$$

Для потока тепла ионов из (3.5) получаем выражение, аналогичное (3.4), если ввести эффективные величины

$$\lambda\mathbf{R} = \lambda_i^*\frac{\mathbf{R}_i + \beta\tau_a{}^*\tau_{ia}{}^{-1}\mathbf{R}_a}{1-\beta^2\tau_i{}^*\tau_a{}^*\tau_{ai}{}^{-1}\tau_{ia}{}^{-1}}, \qquad \omega\tau = -\frac{Ze\,|\mathbf{B}|}{m_i}\,\frac{\tau_i{}^*}{1-\beta^2\tau_i{}^*\tau_a{}^*\tau_{ia}{}^{-1}\tau_{ai}{}^{-1}} \qquad (3.9)$$

Поток тепла нейтральных атомов выражается через $\mathbf{h}_i$ из второго уравнения (3.5). В частности, когда $|\mathbf{B}| = 0$

$$\mathbf{h}_a = -\lambda_a\frac{\mathbf{R}_a + \beta\tau_i{}^*\tau_{ai}{}^{-1}\mathbf{R}_i}{1-\beta^2\tau_i{}^*\tau_a{}^*\tau_{ia}{}^{-1}\tau_{ai}{}^{-1}} \qquad (3.10)$$

Полный поток тепла в газе складывается из соответствующих парциальных потоков на основании (1.13). Общие свойства теплового переноса в направлениях, параллельном и перпендикулярном магнитному полю, подобны тем, которые изучены в работах [3–4]. В частности, член вида $\mathbf{R}\times\omega\tau^*$ в выражениях для потоков тепла частиц описывает известные эффекты Ригги—Ледюка и Эттингсхаузена. Отметим, что для полностью ионизованного газа выражения для $\mathbf{h}_e$ и $\mathbf{h}_i$ совпадают с найденными в [3].

4. Обобщенный закон Ома. Выше уже отмечалось, что при выводе обобщенного закона Ома исходными служат уравнения движения (1.1) или следующие из них уравнения диффузии (1.15). В традиционной схеме вывода этого закона [6–7] (гидродинамическое приближение) величина импульса, передаваемого при столкновениях частиц α-сорта с частицами других компонент (правая часть (1.1)), принимается пропорциональной соответствующим разностям макроскопических скоростей компонент. Существенной чертой приближения «13 моментов» является более точное определение этой величины, благодаря чему в уравнениях диффузии возникают дополнительные члены, пропорциональные относительным тепловым потокам частиц. Учет этих членов в обычной задаче для многокомпонентной газовой смеси (заряженные частицы отсутствуют) приводит к уточнению коэффициентов взаимодиффузии (второе приближение), а также к вкладу, соответствующему термодиффузии (подробнее см. [1]). Для реальных потенциалов межмолекулярного взаимодействия $\zeta_{\alpha\beta} \leqslant 0.2$ (для «максвелловских» молекул $\zeta_{\alpha\beta} = 0$), поэтому роль дополнительных членов сравнительно невелика.

Более заметный вклад вносится при наличии кулоновских взаимодействий заряженных частиц, когда $\zeta_{\alpha\beta} = -0.6$. Учет тепловых потоков в уравнениях диффузии приводит в этом случае к существенному уточнению величины проводимости σ, а также позволяет рассмотреть токи проводимости за счет градиента температуры.

Рассмотрим вывод обобщенного закона Ома в случае трехкомпонентной плазмы. Записывая (1.15) для электронной компоненты, имеем

$$-\operatorname{grad} p_e - n_e e\mathbf{E}' - n_e m_e \mathbf{w}_e \times \boldsymbol{\omega}_e = n_e m_e \left[\tau_0^{-1}\mathbf{V}_e + \tau_{ea}^{-1}\mathbf{V}_i + \nu_0 \frac{\mathbf{h}_e}{p_e} \right] \qquad (4.1)$$

Здесь

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i, \qquad \mathbf{V}_i = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_a \qquad (4.2)$$

$$\tau_0^{-1} = \tau_{ei}^{-1} + \tau_{ea}^{-1}, \qquad \nu_0 = \zeta_{ei}\tau_{ei}^{-1} + \zeta_{ea}\tau_{ea}^{-1} \qquad (4.3)$$

(В (4.1) опущен для простоты член $\operatorname{div} \pi_e$, роль которого в большинстве задач, связанных с проводимостью плазмы, мало существенна.) Вводя степень ионизации

$$\alpha = \frac{n_i}{n_i + n_a} \qquad (4.4)$$

и пренебрегая членами $\sim (m_e / m_i)$, имеем

$$\mathbf{w}_e = \frac{1}{\rho} [(\rho_i + \rho_a)\mathbf{V}_e + \rho_a \mathbf{V}_i] = \mathbf{V}_e + (1-\alpha)\mathbf{V}_i \qquad (4.5)$$

Легко заметить, что выражение для потока тепла электронов $\mathbf{h}_e$ (3.4) может быть разбито на члены, содержащие $\operatorname{grad} T$, $\mathbf{V}_e$ и $\mathbf{V}_i$. Тогда для определения из (4.1) тока проводимости

$$\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{V}_e \qquad (4.6)$$

необходимо лишь еще одно дополнительное соотношение, связывающее скорость «скольжения» ионов $\mathbf{V}_i$ с относительной скоростью электронов и ионов $\mathbf{V}_e$. Используем для этого уравнение (1.15), записанное для ионной компоненты. Учитывая, что $\rho_i / \rho \approx \alpha$ и $n_i e_i = n_e e$, имеем

$$-(\operatorname{grad} p_i - \alpha \operatorname{grad} p) + n_e e_i \mathbf{E}' + n_e m_e \mathbf{w}_i \times \boldsymbol{\omega}_e + \alpha n_e m_e \mathbf{V}_e \times \boldsymbol{\omega}_e = \qquad (4.7)$$

$$= -n_e m_e \tau_{ei}^{-1}\left(\mathbf{V}_e + \zeta_{ei}\frac{\mathbf{h}_e}{p_e} \right) + \frac{1}{2} n_i m_i \tau_{ia}^{-1}\mathbf{V}_i + \frac{1}{4} n_i m_i \left(\frac{\mathbf{h}_i}{p_i} - \frac{\mathbf{h}_a}{p_a} \right) \zeta_{ia}\tau_{ia}^{-1}$$

Складывая (4.1) и (4.7) и выражая отсюда $\mathbf{V}_i$, находим

$$\mathbf{V}_i = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left[\mathbf{V}_e + \zeta_{ea}\frac{\mathbf{h}_e}{p_e} + (1-\alpha)\,\mathbf{V}_e \times \boldsymbol{\omega}_e\tau_{ea}\right] +$$

$$+\frac{2\tau_{ia}}{(1+\varepsilon)\,n_i m_i}\left[\alpha \operatorname{grad} p - \operatorname{grad}(p_e + p_i)\right] - \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\,\zeta_{ia}\left(\frac{\mathbf{h}_i}{p_i} - \frac{\mathbf{h}_a}{p_a}\right) \quad (4.8)$$

где

$$\varepsilon = \frac{2n_e m_e \tau_{ea}^{-1}}{n_i m_i \tau_{ia}^{-1}} \qquad \left(\varepsilon \sim Z\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \ll 1\right) \quad (4.9)$$

Для того чтобы получить явный вид выражения для $\mathbf{V}_i$, необходимо подставить в (4.8) найденные выше выражения для тепловых потоков частиц. Легко заметить, однако, что поправки к $\mathbf{V}_i$ в этом случае пропорциональны ζ_{ea}^2 и ζ_{ia}^2 и составляют, по оценкам, не более 2%. Несколько больший вклад вносится членами, пропорциональными градиенту температуры, однако в окончательном выражении для тока проводимости возникающие от этого поправки невелики. Поэтому ниже, для простоты, пренебрегается вкладом от $\mathbf{h}_e$, $\mathbf{h}_i$ и $\mathbf{h}_a$ в выражении для скорости скольжения $\mathbf{V}_i$ (для максвелловских молекул вклад от этих членов строго равен нулю).

Подставляя $\mathbf{V}_i$ в (4.1) с учетом (4.5) и (3.4), замечаем, что в полученном соотношении можно пренебречь членами, пропорциональными малой величине ε, всюду, где она не умножается на $\boldsymbol{\omega}_e$ (так как $\boldsymbol{\omega}_e \sim \mathbf{B}$, а $|\mathbf{B}|$ может принимать произвольные значения). В результате приходим к следующему соотношению между током проводимости $\mathbf{j}$ и параметрами, характеризующими состояние газа:

$$A\mathbf{j} + B\mathbf{j} \times \boldsymbol{\omega}_e\tau_0 - C\boldsymbol{\omega}_e\tau_0(\boldsymbol{\omega}_e\tau_0 \cdot \mathbf{j}) = \sigma_0(\mathbf{D} - \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}_e\tau_0) \quad (4.10)$$

Здесь

$$A = 1 - \frac{\Delta_0}{1+\gamma^2(\omega_e\tau_0)^2} + \delta_0(\omega_e\tau_0)^2 \qquad B = 1 + \gamma\frac{\Delta_0}{1+\gamma^2(\omega_e\tau_0)^2} \quad (4.11)$$

$$C = \delta_0 + \gamma^2\frac{\Delta_0}{1+\gamma^2(\omega_e\tau_0)^2}$$

$$(4.12)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}' + \frac{1}{n_e e}\operatorname{grad} p_e - \frac{1}{1+\gamma^2(\omega_e\tau_0)^2}\,\alpha_T\frac{k}{e}\left[\operatorname{grad} T + \gamma^2\boldsymbol{\omega}_e\tau_0(\boldsymbol{\omega}_e\tau_0 \operatorname{grad} T)\right]$$

$$\mathbf{H} = -\frac{\gamma}{1+\gamma^2(\omega_e\tau_0)^2}\,\alpha_T\frac{k}{e}\operatorname{grad} T + \frac{\delta_0}{(1-\alpha)n_e e}\left[\alpha \operatorname{grad} p - \operatorname{grad}(p_e + p_i)\right]$$

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau_0}{m_e} \quad (4.13)$$

При этом

$$\Delta_0 = \alpha_T \nu_0 \tau_0, \qquad \delta_0 = (1-\alpha)^2\,\varepsilon\tau_{ea}\tau_0^{-1}; \qquad \gamma = \tau_e^*\tau_0^{-1} \quad (4.14)$$

а термодиффузионная постоянная α_T определена выражением

$$\alpha_T = \frac{5}{2}\nu_0\tau_e^* = \frac{5}{2}\gamma\nu_0\tau_0 \quad (4.15)$$

Уравнение (4.10) выражает собой обобщенный закон Ома для частично ионизованного газа. Если положить $\alpha_T = 0$, то (4.10) совпадает с известными из литературы результатами (ср., например, [7], ф-ла (2.10)). Нетрудно заметить, однако, что учет тепловых потоков частиц в уравнениях диффузии ($\alpha_T \neq 0$) приводит не только к появлению дополнительных термодиффузионных членов, но и к заметным поправкам в величине электропроводности плазмы σ вдоль и поперек магнитного поля. Так, для тока проводимости $\mathbf{j}$ в направлении x, параллельном силовым линиям магнитного поля, имеем

$$j_x = \sigma \left[E'_x + \frac{1}{n_e e} (\operatorname{grad} p_e)_x - \alpha_T \frac{k}{e} (\operatorname{grad} T)_x \right] \tag{4.16}$$

где

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - \Delta_0} \tag{4.17}$$

Для слабо ионизованного газа, когда принимаются во внимание лишь взаимодействия электронов с нейтралами, $\Delta_0 \approx 1.9\,\zeta_{ea}^2$, т. е. поправка к σ не превышает 8%. В другом предельном случае (полностью ионизованный газ) учет как электрон-электронных, так и электрон-ионных взаимодействий приводит к $\Delta_0 = 0.484$, если $z=1$, т. е. σ увеличивается по сравнению с σ_0 почти вдвое. Этот результат соответствует так называемому «второму приближению» Чепмена — Каулинга по кинетическим коэффициентам [4] и хорошо согласуется с величиной σ, даваемой Спитцером [8].

Рассмотрим в заключение следующее из (4.10) выражение для тока проводимости поперек магнитного поля. Умножая левую и правую части (4.10) векторно на $\boldsymbol{\omega}_e \tau_0$ и раскрывая двойное векторное произведение, приходим к результату

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\sigma_0}{A^2 + B^2 (\omega_e \tau_0)^2} \left[A\mathbf{D}_\perp - (\omega_e \tau_0)^2 B \mathbf{H}_\perp - (B\mathbf{D}_\perp + A\mathbf{H}_\perp) \times \boldsymbol{\omega}_e \tau_0 \right] \tag{4.18}$$

где $\mathbf{D}_\perp$ и $\mathbf{H}_\perp$ — компоненты соответствующих векторов, расположенные в плоскости, перпендикулярной к вектору напряженности магнитного поля.

При отсутствии градиентов давления и температуры коэффициент электропроводности при $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}$ может быть записан в комплексной форме как

$$\sigma = \sigma_0 \frac{A - i\omega_e \tau_0 B}{A^2 + B^2 (\omega_e \tau_0)^2} \tag{4.19}$$

что согласуется с выражением, полученным для этого частного случая в работе [9].

Поступила 15 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Жданов В. М., Каган Ю. М., Сазыкин А. А. Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовых смесях. ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 3.
2. Grad H. On the kinetic theory of rare gases. Comm. Pure and Appl. Math., 1949, vol. 2, p. 331. См. также Сб. Механика, 1952, 4 (14), стр. 71 и 5 (15), стр. 61.
3. Herdan R., Liley B. S. Dynamical equations and transport relationships for a thermal plasma. Rev. Mod. Phys. 1960, vol. 32, p. 731.
4. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИИЛ, 1960.
5. Marshall W. The kinetic theory of an ionized gas III. Atomic Energy Res. Establ. 1960, NT/R, 2419.
6. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. ИИЛ, 1959.
7. Любимов Г. А. О форме закона Ома в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.
8. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. ИИЛ, 1957.
9. Pipkin A. C. Electrical conductivity of the Partially ionized gases. Phys. of Fluids, 1961, vol. 4, p. 154.