Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О СТРУКТУРЕ УДАРНЫХ ВОЛН В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАКОНЕ ДИССИПАЦИИ

А. Г. Куликовский

(Москва)

Рассматривается одномерное стационарное течение вязкого теплопроводного газа с конечной электропроводностью.

При некоторых предположениях (1) об уравнении состояния доказывается, что при этих условиях существуют течения, представляющие структуру эволюционных [1] быстрых и медленных ударных волн не слишком большой амплитуды. Для быстрых ударных волн такое течение оказывается единственным.

Для описания диссипативных процессов используется принцип Онзагера, причем скорость возникновения энтропии d_iS/dt считается положительной, если отлична от нуля пространственная производная, хотя бы одного из параметров, определяющих поток. Метод доказательства основан на результатах работ [2, 3], в которых построены примеры квазилинейных систем уравнений в частных производных с двумя и тремя неизвестными функциями и изучаются решения этих уравнений типа бегущих волн. При более частных законах диссипации задача о структуре наклонных магнитогидродинамических ударных волн рассматривалась ранее в работах [4-9].

Будем предполагать, что уравнение состояния газа

$$p = p(V, S) \qquad (V = 1/\rho \text{ — удельный объем})$$

удовлетворяет условиям

$$p_V' < 0, \qquad p_{VV}'' > 0, \qquad p_S' > 0 \tag{1}$$

При рассмотрении одномерных (вдоль x) стационарных течений газа в электромагнитном поле можно, пользуясь законами сохранения, выразить вязкие напряжения τ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz} и поток тепла Q в среде через параметры, характеризующие поток газа и электромагнитное поле:

$$V, \quad T, \quad u, \quad v, \quad w, \quad H_y, \quad H_z, \quad H_x = \text{const}, \quad E_y = \text{const}, \quad E_z = \text{const}$$

Это позволяет вычислить поток энтропии

$$P = \frac{Q}{T} + mS = \frac{m}{T}\left[\frac{H_y^2V}{8\pi} + \frac{H_z^2V}{8\pi} + \frac{m^2V^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w}{2} - f(V, T) - \right.$$
$$\left. - H_0H_yv - H_0H_zw - JV + \varepsilon\right] \tag{2}$$

Здесь m — поток массы; $f(V, T)$ — массовая плотность свободной энергии; J — поток x-й составляющей импульса; ε — поток энергии, деленный на m,

$$df = -SdT - pdV, \qquad H_0 = \frac{H_x}{4\pi m}, \qquad E_0 = \frac{cE_z}{4\pi m} \ (c \text{ — скорость света})$$

Система координат выбрана так, что E_y, а также потоки y-й и z-й составляющих импульса равны нулю.

Очевидно, что изменение потока энтропии связано с ее возникновением

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d_i S}{dt} \tag{3}$$

Согласно принципу Онзагера

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum_i J_i X_i \tag{4}$$

где J_i — обобщенные потоки, а X_i — обобщенные силы. Принимая в качестве X_i производные $\dot{q}_i = dq_i / dx$ от величин V, v, w, T, H_y, H_z, которые будем обозначать q_i, и используя тождество

$$\frac{dP}{dx} = \sum_i \frac{\partial P}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

из равенств (3) и (4) получим

$$\partial P / \partial q_i = J_i \tag{5}$$

Предположим, как это обычно делается в термодинамике необратимых процессов, что J_i являются линейными функциями от X_i

$$J_i = \sum_j L_{ij} X_j = \sum_i L_{ij} \dot{q}_i$$

такими, что квадратичная форма

$$D = \sum_{ij} L_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

при любых $\dot{q}_k$ удовлетворяет неравенству $D \geqslant 0$. Коэффициенты L_{ij} в дальнейшем будут предполагаться непрерывными дифференцируемыми функциями q_k.

Будем, кроме того, предполагать, что матрица L_{ij} невырожденная, т. е. что $D > 0$, если хотя бы одно из значений $\dot{q}_i \neq 0$. Подставляя выражения для J_i в равенство (5), получим систему уравнений, которым удовлетворяют функции $q_i(x)$ при одномерном стационарном движении

$$\sum_j L_{ij} \dot{q}_j = \frac{\partial P}{\partial q_i} \tag{6}$$

Если матрица L_{ij} симметрична, что, вообще говоря, не имеет места при наличии магнитного поля, то уравнения (6) могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial P}{\partial q_i} \tag{7}$$

К форме (6) или (7) уравнения, описывающие стационарные магнитогидродинамические течения, могут быть приведены и непосредственно. Для случая, когда $H_z = 0$, $w = 0$ и матрица L_{ij} диагональна, уравнения (7) были получены в работе [5], в которой при указанных ограничениях доказано существование и единственность решения, представляющего структуру быстрой ударной волны.

Поступательному однородному потоку ($\dot{q}_i = 0$) соответствуют особые точки A_α системы (6), или что то же самое, стационарные точки функции $P(q_i)$. Поэтому решение задачи о структуре ударной волны должно представляться интегральной кривой системы (6) в пространстве q_i, соединяющей особые точки этой системы.

Нетрудно убедиться, что все особые точки системы (6) лежат в плоскости $H_z = 0$, $w = 0$, если

$$E_0 \neq 0, \quad \text{или} \quad H_\tau\left(u - \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)\Big|_{x=\pm\infty} \neq 0 \qquad (\mathbf{H}_\tau = H_y\mathbf{e}_y + H_z\mathbf{e}_z)$$

Случай

$$H_\tau\left(u - \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}\right) = 0 \qquad \text{при } x = \pm\infty$$

соответствует либо газодинамическим ударным волнам, либо ударным волнам, лежащим на границе эволюционности. Поэтому всюду в дальнейшем будем предполагать, что $E_0 \neq 0$. При этом, как это следует из работы [5], у $P(q_i)$ имеется не более четырех стационарных точек A_1, A_2, A_3, A_4, причем

$$\begin{gathered} P(A_1) < P(A_2) < P(A_3) < P(A_4) \\ a_+(A_1) < u(A_1), \qquad a_A(A_2) < u(A_2) < a_+(A_2) \\ a_-(A_3) < u(A_3) < a_A(A_3) \qquad u(A_4) < a_-(A_4) \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь a_+, a_A и a_- — скорости распространения быстрых, альфвеновских и медленных малых возмущений, $u = mV$. При этом быстрой волне соответствует переход $A_1 \to A_2$, а медленной волне $A_3 \to A_4$. Заметим, что точки A_1 и A_2 лежат в области $V > 4\pi H_0^2$, а точки A_3 и A_4 — в области $V < 4\pi H_0^2$, так как $u^2 4\pi H_0^2 = a_A^2 V$.

Рассмотрим поведение функции $P(q_i) - P(A_\alpha)$ в окрестности особой точки A_α. Оставляя в этой разности только квадратичные по отклонениям координат члены (линейные члены равны нулю, так как A_α — стационарная точка функции $P(q_i)$), можно показать, что полученная таким образом квадратичная форма является невырожденной и что ее сигнатура равна $8 - 2\alpha$. В этом можно убедиться непосредственно, приводя квадратичную форму, представляющую главную часть разности $P(q_i) - P(A_\alpha)$, к сумме квадратов (так сделано в работе [5] для случая $H_z = 0$, $w = 0$).

Поведение интегральных кривых системы (6) в окрестности особых точек A_α определяется линеаризированной системой уравнений, которая получается при подстановке в правую часть системы (6) главной части разности $P(q_i) - P(A_\alpha)$. Так как рассматриваемая система является диссипативной в смысле работы [10], то из результатов этой работы и неравенств (8) следует[1], что из шести собственных значений линеаризированной системы $7 - \alpha$ имеют положительную действительную часть, а $\alpha - 1$ имеют отрицательную действительную часть. Таким образом, каждой особой точке A_α соответствует $7 - \alpha$-мерная поверхность, состо-

[1] Все выводы работы [10] остаются верными и в том случае, когда в некоторых уравнениях первого порядка, составляющих систему, отсутствуют производные по времени от искомых величин. В рассматриваемом случае идеальная система наивысшего ранга не содержит скорости движения волны U и поэтому число корней с положительной действительной частью меняется только тогда, когда U, изменяясь, переходит через значения магнитогидродинамических скоростей распространения слабых разрывов.

ящая из интегральных кривых, выходящих из этой точки, и α — 1-мерная поверхность, состоящая из интегральных кривых, входящих в нее.

Рассмотрим поверхность $P(q_i) = C$, $C = \text{const}$. Часть поверхности, лежащей в области $V > 0$, $T > 0$, содержит бесконечно удаленную точку. Действительно, пересечение поверхности $P(q_i) = C$, уравнение которой можно привести к виду

$$2P(q_i) = \frac{m}{T}\left[\frac{V}{4\pi}\left(H_y - \frac{4\pi H_0}{V}v + \frac{4\pi E_0}{V}\right)^2 + \frac{V}{4\pi}\left(H_z - \frac{4\pi H_0}{V}w\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{4\pi H_0^2}{V}\right)\left(v + \frac{4\pi H_0 E_0}{V - 4\pi H_0^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{4\pi H_0^2}{V}\right)w^2\right] + 2F(V, T) = 2C \quad (9)$$

$$F(V, T) = \frac{m}{T}\left[\varepsilon + \frac{m^2V^2}{2} - \frac{2\pi E_0^2}{V - 4\pi H_0^2} - JV - f(V, T)\right]$$

с плоскостью $V = \text{const}$, $T = \text{const}$ представляет собой поверхность второго порядка в четырехмерном пространстве, которая при $V < 4\pi H_0^2$ простирается до бесконечности.

Придадим постоянной C большое отрицательное значение и будем увеличивать C. При этом поверхность $P(q_i) = C$ будет изменяться, однако топологический тип этой поверхности будет меняться только при прохождении постоянной C через значения $C = P(A_\alpha)$. В силу неравенств (8) первое изменение топологического типа поверхности $P(q_i) = C$ произойдет, когда в процессе увеличения C поверхность $P(q_i) = C$ пройдет через точку A_1 (если она существует при заданных E_0, H_0, J, ε). Так как точка A_1 является узловой особой точкой для системы (6), то при $C = P(A_1) + \delta$, где $\delta > 0$ — некоторое достаточно малое число, поверхность $P(q_i) = C$ в окрестности точки A_1 представляет собой замкнутую поверхность, содержащую внутри себя точку A_1. Поверхность $P(q_i) = C$ содержит бесконечно удаленную точку, поэтому у нее должна существовать другая ветвь, уходящая в бесконечность. Область $P(q_i) \leqslant C$ расширяется с увеличением C. Замкнутая ветвь поверхности $P(q_i) = C$, содержащая внутри себя точку A_1, не выходит из области $V > 4\pi H_0^2$, $T > 0$. Действительно, пересечение замкнутой ветви поверхности $P(q_i = C)$ любой плоскостью представляет собой замкнутую поверхность. Но при $V < 4\pi H_0$ пересечение поверхности $P(q_i) = C$ плоскостью $V = \text{const}$, $T = \text{const}$ не содержит замкнутых ветвей. Кроме того, пересечение поверхности $P(q_i) = C$ плоскостью $T = 0$ не зависит от значения константы C. При значениях C, близких к $P(A_1)$, замкнутая ветвь поверхности $P(q_i) = C$, содержащая внутри себя точку A_1, не пересекается плоскостью $T = 0$, следовательно, эта ветвь не пересекает этой плоскости ни при каких C.

Так как $\operatorname{grad} P(q_i)$ нигде не обращается в бесконечность, то при увеличении C обе ветви поверхности движутся с отличной от нуля скоростью навстречу одна другой и должны соединиться при некотором значении C. Это соединение должно произойти в стационарной точке функции $P(q_i)$, которая является точкой A_2, так как из оставшихся особых точек только она лежит в области $V > 4\pi H_0^2$ и только она может описывать слияние двух частей поверхности $P(q_i) = C$. Предположим, что ударная волна не очень сильная и поэтому значения

$P(A_2)$ и $P(A_2)$ достаточно близки одно к другому так, что при изменении C в пределах $P(A_1) < C < P(A_2)$ замкнутая ветвь поверхности $P(q_i) = C$ не уходит на бесконечность.

Так как особая точка A_1 является узлом для системы (6), то в окрестности точки A_1 все пространство заполнено интегральными кривыми, и каждая точка замкнутой ветви поверхности $P(q) = C$ при $P(A_1) < C < P(A_2)$ может быть соединена интегральной кривой с точкой A_1. При этом одна интегральная кривая, вышедшая из точки A_1, достигает точки A_2, когда при $C = P(A_2)$ некоторая точка замкнутой ветви поверхности $P(q_i) = C$ приходит в точку A_2. Этим доказано существование и единственность решения, представляющего структуру быстрой ударной волны.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании решения, представляющего структуру медленной ударной волны. Если при заданных значениях параметров E_0, H_0, J, ε может осуществиться медленная ударная волна, то в процессе изменения C поверхность $P(q_i) = C$ должна встретить особую точку A_3.

Заметим, что функция $F(V, T)$ имеет в точке A_3 минимум, а в точке A_4 — седловую стационарную точку. Действительно, имеет место равенство

$$P(q_i) - P(A_\alpha) = \frac{2m}{T}\left[\frac{V}{4\pi}\left(H_y - \frac{4\pi H_0}{V}v + \frac{4\pi E_0}{V}\right)^2 + \frac{V}{4\pi}\left(H_z - \frac{4\pi H_0}{V}w\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{4\pi H_0^2}{V}\right)\left(v + \frac{4\pi H_0 E_0}{V - 4\pi H_0^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{4\pi H_0^2}{V}\right)w^2\right] + F(V, T) - F(A_3)$$

так как в стационарных точках каждый из квадратов, стоящих в скобке, равен нулю. Разлагая в окрестности точки A_3 функцию $P(q_i) - P(A_\alpha)$ по степеням разностей $V - V(A_3)$ и $T - T(A_3)$, ограничиваясь квадратичными членами и преобразуя получившуюся квадратичную форму к сумме квадратов, получим представление главной части разности $P(q_i) - P(A_3)$ в окрестности точки A_3 в виде суммы квадратов линейных комбинаций разностей $q_i - q_i(A_3)$. Согласно предыдущему в таком разложении два коэффициента должны быть отрицательны, а остальные — положительны. Так как в скобках содержатся два отрицательных члена ($V(A_3) < 4\pi H_0^2$), то $F(V, T) - F(A_3)$ в окрестности A_3 представляется в виде суммы двух положительных членов, т. е. $F(V, T)$ имеет в точке A_3 минимум. Аналогично доказывается, что в точке A_4 функция $F(V, T)$ имеет седловую стационарную точку. Других стационарных точек у функции $F(V, T)$ в области $0 < V < 4\pi H_0^2$ нет, потому что в противном случае и у функции $P(q_i)$ существовали бы в этой области стационарные точки, кроме A_3 и A_4.

Так как в точке A_3 функция $F(V, T)$ имеет минимум, то кривая $F(V, T) = F(A_3) + \delta$ имеет в окрестности точки A_3 замкнутую ветвь, внутри которой $F(V, T) < F(A_3) + \delta$, а вне — $F(V, T) > F(A_3) + \delta$. Эта ветвь при $\delta = 0$ представлена единственной точкой A_3. Область $F(V, T) \leqslant C$ расширяется при увеличении C, причем из того, что внутри области $4\pi H_0^2 > V > 0$, $T > 0$ вектор grad $F(q_i)$ нигде не обращается в бесконечность, следует что при изменении C движение кривой $F(V, T) = C$

происходит с отличной от нуля скоростью. При этом замкнутая ветвь кривой будет оставаться замкнутой, пока она при своем движении не встретит стационарную точку или не уйдет в бесконечность.

Будем предполагать, что интенсивность ударной волны не слишком велика, так что точки A_3 и A_4 расположены недалеко одна от другой и замкнутая ветвь встречает при своем движении точку A_4. Так как точка A_4 является стационарной седловой точкой, то при прохождении C через значение $C = P(A_4)$ в точке A_4 происходит слияние двух ветвей кривой $F(V, T) = C$.

Покажем, что при $C = P(A_3)$ в области $P(q_i) \leqslant C$ пространства q_i можно построить двумерную замкнутую поверхность Σ, которая непрерывной деформацией в области $P(q_i) \leqslant C$ не может быть стянута в точку. Для этого в равенстве (9) положим $C = P(A_3)$ и рассмотрим поверхность, которую описывает эллипс, находящийся в «горле» четырехмерного гиперболоида $P(q_i) = C$, $V = \text{const}$, $T = \text{const}$ при изменении V и T вдоль некоторой кривой a, соединяющей на плоскости V, T точку A_3 с некоторой точкой другой ветви кривой $F(V, T) = C$. В конечных точках кривой a диаметр эллипса равен нулю, а в промежуточных он принимает положительные значения. Таким образом, эллипс ометает некоторую двумерную замкнутую поверхность, которая, очевидно, не может быть стянута в точку путем непрерывной деформации в области $P(q_i) \leqslant C$. При $P(A_3) < C < P(A_4)$ каждой кривой на плоскости VT, соединяющей две ветви кривой $F(V, T) = C$, соответствует в шестимерном пространстве некоторая двумерная поверхность, которая не стягивается в точку в области $P(q_i) \leqslant C$.

Заметим, что при $C \to \infty$ все конечные точки области $V > 0$, $T > 0$ пространства q_i будут удовлетворять неравенству $P(q_i) \leqslant C$. Следовательно, построенная выше поверхность при достаточно больших C может быть непрерывным образом стянута в точку области $P(q_i) \leqslant C$. Отсюда следует, что топологический тип области $P(q_i) \leqslant C$ меняется при увеличении C и поверхность $P(q_i) = C$ при увеличении C должна пройти через стационарную точку функции $P(q_i)$. Этой точкой является точка A_4, так как из имеющихся у функции $P(q_i)$ стационарных точек A_α только в точке A_4 выполнено неравенство $P(A_\alpha) > P(A_3)$ и только точка A_4 обладает тем свойством, что некоторая двумерная поверхность, которая не стягивается в точку в области $P(q_i) \leqslant C$ при $C < P(A_\alpha)$, стягивается в точку непрерывным образом при $C > P(A_\alpha)$.

Теперь нетрудно убедиться, что хотя бы одна интегральная кривая системы (6) соединяет особые точки A_3 и A_4. Действительно, рассмотрим пересечение трехмерной поверхности, состоящей из интегральных кривых, входящих в особую точку A_4, с поверхностью $P(q_i) = C$ при $C = P(A_4) - \delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число. Это пересечение будет представлять собой двумерную поверхность $\Sigma^*(C)$, нестягивающуюся непрерывным образом в точку в области $P(q_i) \leqslant C$, при $C < P(A_4)$, которая стягивается к точке A_4 при $C \to P(A_4)$. Отсюда следует, что поверхность $\Sigma^*(C)$ гомологична по mod 2 поверхности Σ в области $P(q_i) < C$ (т. е. в этой области может быть построена трехмерная поверхность, границей которой является $\Sigma^*(C)$ и Σ). Это следует из того, что при переходе через простую стационарную точку число гомологически независимых по mod 2 циклов в области $P(q_i) \leqslant C$ изменяется на единицу [11]. Нетрудно убедиться, что поверхности Σ^* (C) и Σ могут быть переведены одна в другую путем непрерывной деформации в области $P(q_i) \leqslant C$.

При изменении C поверхность $\Sigma^*(C)$ будет деформироваться непрерывным образом. Это следует из непрерывности и дифференцируемости диссипативных коэффициентов L_{ik} и из положительной определенности квадратичной формы D, обеспечивающей конечный отличный от нуля угол между поверхностью $P(q_i) = C$, и интегральной кривой.

Будем считать интенсивность ударной волны не слишком большой, так чтобы при изменении C от $P(A_4)$ до $P(A_3)$ поверхность $\Sigma^*(C)$ не выходила из области $V > 0$, $T > 0$ и не уходила на бесконечность. В этом случае поверхность $\Sigma^*(C)$ при любом значении C из интервала $P(A_3) < C < P(A_4)$ остается замкнутой поверхностью и может быть получена из поверхности Σ путем непрерывной деформации в области $P(q_i) \leqslant C$. Как следует из вида поверхности $P(q_i) = P(A_3) + \delta$ в окрестности точки A_3, любая двумерная поверхность, лежащая в области $P(q_i) \leqslant P(A_3) + \delta$ и получаемая из поверхности Σ (которая проходит через точку A_3), путем непрерывной деформации в области $P(q_i) \leqslant \leqslant P(A_3) + \delta$ не может отстоять от A_3 больше чем на расстояние порядка $\sqrt{\delta}$. Следовательно, при $C = P(A_3)$ поверхность $\Sigma^*(C)$ проходит через точку A_3. Этим и доказывается, что существует хотя бы одна интегральная кривая, соединяющая точки A_3 и A_4.

В заключение автор благодарит С. К. Годунова и Г. А. Любимова за обсуждение содержания работы и Г. Я. Любарского, любезно представившего автору возможность познакомиться с его статьей до ее опубликования.

Поступила 15 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике, ЖЭТФ, 1958, т. 35, в. 3(9).
2. Годунов С. К. О понятии обобщенного решения, ДАН СССР, т. 134, № 6, 1960.
3. Годунов С. К. О неединственности размазывания разрыва в решении квазилинейной системы, ДАН СССР, т. 136, № 2, 1961.
4. Ludford G. S. S. The structure of hydromagnetic shock in steady plane motion. Journal Fluid Mech. v. 5, № 1, 1959.
5. Germen P. Contribution a la théorie des ondes de choc en magnetodynamique des fluids O. N. E. R. A. publ. 97, 1959.
6. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. О структуре наклонной магнитогидродинамической ударной волны, ПММ, т. XXV, вып. 1, 1961.
7. Любимов Г. А. Структура магнитогидродинамической ударной волны в газе с анизотропным законом проводимости, ПММ, т. XXV, вып. 2, 1961.
8. Сиротина Е. П., Сыроватский С. И. Структура ударных волн слабой интенсивности в магнитной гидродинамике, ЖЭТФ, т. 39, в. 3 (9), 1960.
9. Bleviss Z. O. A study of the structure of the magnetodynamic swich — on shock in steady plane motion Journal Fluid Mech. v. 9, № 1, 1961.
10. Любарский Г. Я. О структуре ударных волн. ПММ, т. XXV, вып. 6.
11. Эльсгольц Л. Э. Оценка числа критических точек. УМН, т. V, 1950, вып. 6 (40).