Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ И ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ ЖИДКОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ ВОЗМУЩЕНИЙ

М. И. Шлиомис

(Иваново)

Самосопряженность системы обычных уравнений конвекции [1] позволяет заключить, что возмущения, возникающие в подогреваемой снизу жидкости, меняются со временем всегда монотонно [2]. Присутствие магнитного поля (в проводящей жидкости) или вращения делают уравнения движения несамосопряженными, а потому устойчивость исходного равновесного состояния и характер возмущений, срывающих его, должны быть исследованы особо. Чандрасекхаром рассматривалось влияние магнитного поля [3] и вращения [4, 5] на конвекцию в горизонтальном плоском слое. Однако обращение к бесконечному слою, обычно позволяющее увидеть явление «в чистом виде», на этот раз только затемняет физическую суть дела. В замкнутой же полости (все размеры которой одного порядка) те принципиально новые эффекты, к которым приводит магнитное поле или вращение, видны совершенно отчетливо.

Ниже на простом примере рассмотрено влияние вращения на устойчивость подогреваемой снизу жидкости, заполняющей замкнутую полость, линейные размеры которой во всех измерениях одного порядка. Как будет показано в § 6, магнитное поле в проводящей жидкости во всем, что касается устойчивости, полностью эквивалентно вращению.

§ 1. В поле тяжести

$$\mathbf{g} = -g\boldsymbol{\gamma}, \qquad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1 \tag{1.1}$$

жидкость заполняет объем, стенки которого движутся с одной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\boldsymbol{\gamma} \tag{1.2}$$

вращаясь около общей оси. Тогда в основном стационарном движении жидкость вращается как твердое тело. Твердое же вращение всегда устойчиво [6]. Если подогревать теперь жидкость снизу так, чтобы в ней существовал постоянный вертикальный градиент температуры

$$\nabla T_0 = -A\boldsymbol{\gamma} \tag{1.3}$$

то по непрерывности основное движение будет устойчиво при достаточно малых A. Исследование устойчивости при не малых температурных градиентах удобно проводить в системе отсчета, вращающейся вместе со стенками. К обычным уравнениям конвекции [1] нужно добавить центробежную и кориолисову силы и (мы будем рассматривать медленное движение, возникающее в жидкости) сохранить только линейные по возмущениям члены. Ниже предполагается выполненным условие[1]

$$\Omega^2 l \ll g \qquad (l \text{ — характерный размер полости}) \tag{1.4}$$

[1] Т. е. здесь не рассматривается быстрое вращение больших полостей.

Тогда уравнения движения и теплопроводности будут

$$\dot{\mathbf{v}} = -\nabla f + \nu\nabla^2\mathbf{v} + ag\gamma T + 2\Omega(\mathbf{v}\times\gamma)$$
$$\dot{T} = A\gamma\mathbf{v} + \chi\nabla^2 T, \qquad \nabla\mathbf{v} = 0 \tag{1.5}$$

Введем характеристические единицы l, v_1, T_1, причем v_1 и T_1 определим так, чтобы

$$(v_1 / T_1)^2 = ag\chi / A\nu \tag{1.6}$$

Тогда уравнения (1.5) примут вид:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\nabla f + \nabla^2\mathbf{v} + C\gamma T + D(\mathbf{v}\times\gamma)$$
$$P\dot{T} = C\gamma\mathbf{v} + \nabla^2 T, \qquad \nabla\mathbf{v} = 0 \tag{1.7}$$

В эти уравнения входят следующие безразмерные величины:

$$P = \nu / \chi, \qquad C^2 = agAl^4 / \nu\chi, \qquad D^2 = 4\Omega^2 l^4 / \nu^2$$

Здесь P — число Прандтля, C^2 — число Релея, D^2 — число Тейлора.

Линейные уравнения (1.7) не содержат времени явно. Следовательно, все величины можно считать пропорциональными $\exp(\lambda t)$ и мы должны исследовать краевую задачу

$$\lambda\mathbf{v} = -\nabla f + \nabla^2\mathbf{v} + C\gamma T + D(\mathbf{v}\times\gamma)$$
$$\lambda PT = C\gamma\mathbf{v} + \nabla^2 T, \qquad \nabla\mathbf{v} = 0 \tag{1.8}$$

с соответствующими граничными условиями на стенках полости. Знак вещественной части λ (собственное значение краевой задачи) определяет устойчивость: равновесие устойчиво, если $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

§ 2. Для примера рассмотрим полость, имеющую форму куба с равным единице ребром. Граничные условия на стенках куба поставим следующие:

$$T = v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0 \quad \text{на верхней и нижней стенках}$$
$$v_n = \frac{\partial v_z}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{на боковых стенках} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к стенке (ось z направлена вверх). Эти условия несколько искусственны, однако[1] полученные с их помощью результаты дают качественно верную картину поведения жидкости в сосуде с твердыми стенками. Уравнения (1.8) с граничными условиями (2.1) решаются сразу. Для координатных частей скорости и температуры получаем

$$v_x = v_x^\circ \sin m\pi x \cos n\pi y \cos l\pi z$$
$$v_y = v_y^\circ \cos m\pi x \sin n\pi y \cos l\pi z \qquad (m, n, l = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$
$$\{v_z, T\} = \{v_z^\circ, T^\circ\} \cos m\pi x \cos n\pi y \sin l\pi z$$

Возникающее в кубической полости конвективное движение обладает простой периодичностью по всем координатам. Весь объем куба разделяет-

[1] Ср. работу Релея [7], в которой впервые дана теория устойчивости.

ся на одинаковые ячейки; в каждой из них жидкость движется одинаковым образом. Ячейка имеет форму параллелепипеда, длины ребер которого относятся между собой как m^{-1}: n^{-1} : l^{-1}. На стенках ячеек выполняются условия (2.1).

Для отыскания допустимых значений λ поступим следующим образом. К первому уравнению системы (1.8) дважды применим операцию rot. Получим

$$\lambda (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}) + C (\nabla T \times \gamma) + D (\gamma \nabla) \mathbf{v} \tag{2.3}$$

$$\lambda \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^4 \mathbf{v} - C [(\gamma \nabla) \nabla T - \gamma \nabla^2 T] - D(\gamma \nabla) (\nabla \times \mathbf{v}) \tag{2.4}$$

Решения (2.2) подставим во второе уравнение (1.8), а также в (2.3) и (2.4), предварительно помножив последние скалярно на γ. После простых преобразований получается для амплитуд скорости и температуры система из трех однородных алгебраических уравнений, условие разрешимости которой

$$\begin{vmatrix} (\lambda + k^2)k^2 & -(k^2 - \pi^2 l^2)C & \pi l D \\ C & -(\lambda P + k^2) & 0 \\ \pi l D & 0 & -(\lambda + k^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.5}$$

$$k^2 \equiv \pi^2 [m^2 + n^2 + l^2] \tag{2.6}$$

дает уравнение для собственных значений λ краевой задачи (1.8).

§ 3. Рассмотрим более подробно устойчивость равновесия по отношению к наиболее крупномасштабному (из всех возможных в кубе) движению. Для этого в (2.5) нужно положить $m = n = l = 1$.

Введем обозначения

$$\mu = \lambda / 3\pi^2, \quad r = 2C^2 / 27\pi^4, \quad \tau = D^2 / 27\pi^4 \tag{3.1}$$

Раскрывая определитель (2.5) и используя (3.1), получаем для μ кубическое уравнение

$$\alpha\mu^3 + \beta\mu^2 + \gamma\mu + \delta = 0 \tag{3.2}$$

где

$$\alpha = P, \quad \beta = 2P + 1, \quad \gamma = 2 + P + P\tau - r, \quad \delta = 1 + \tau - r \tag{3.3}$$

Корни уравнения (3.2) с точностью до множителя $3\pi^2$ совпадают с собственными числами системы (1.8). Поэтому (см. конец § 1) момент наступления неустойчивости определяется моментом появления решений уравнения (3.2) с равной нулю действительной частью μ. Так как речь здесь идет о возникновении в результате неустойчивости любого — стационарного или нестационарного — конвективного движения, то, имея в виду обе эти возможности, следует искать решения, у которых 1) и мнимая часть μ равна нулю, т. е. решения, от времени вообще не зависящие, а также такие, у которых 2) мнимая часть μ отлична от нуля, т. е. решения, периодически зависящие от времени.

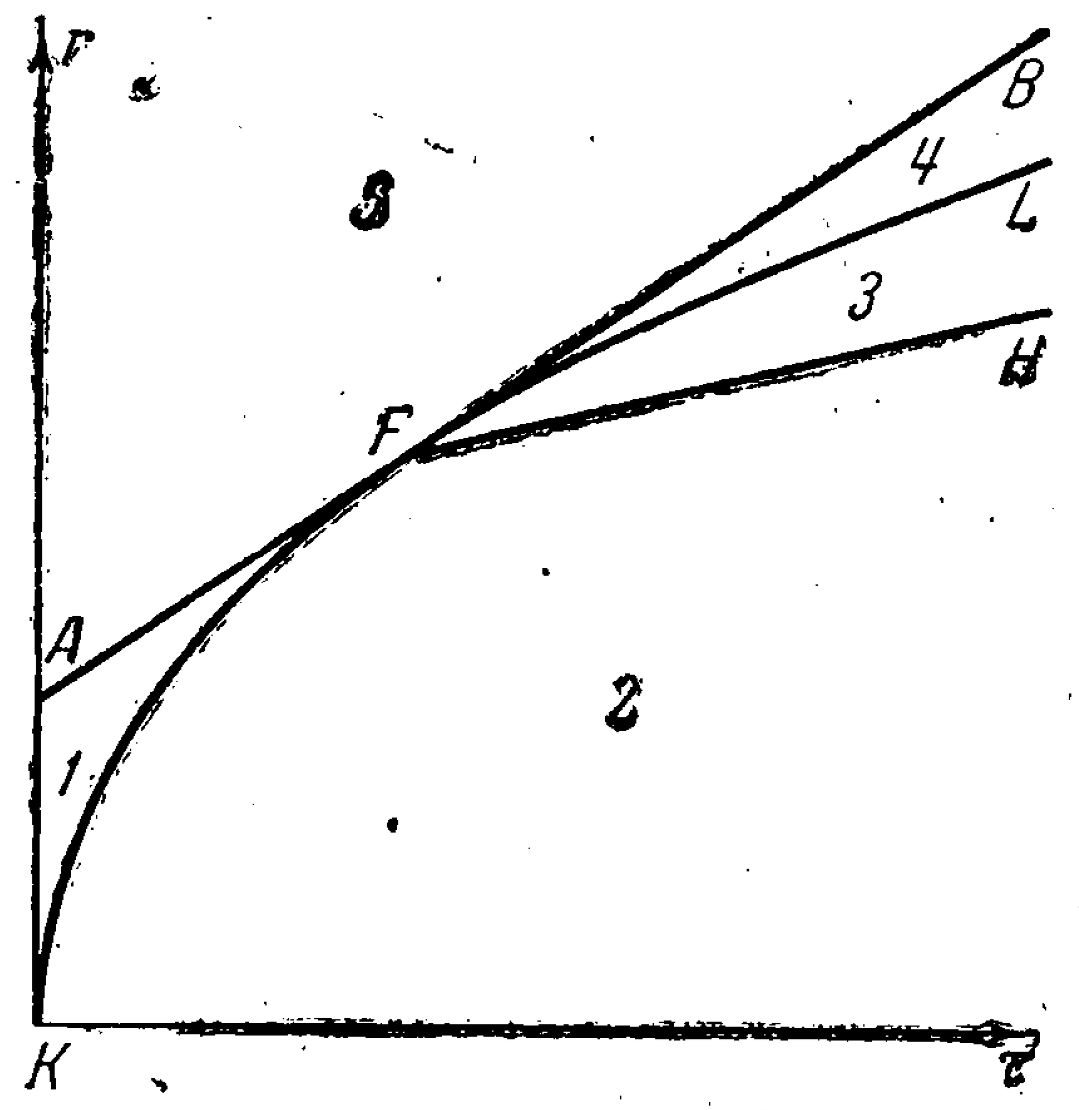
Решения первого типа возможны, когда δ — свободный член уравнения (3.2) — равен нулю, т. е.

$$r = 1 + \tau \tag{3.4}$$

Решения второго типа — когда коэффициенты (3.3) удовлетворяют соотношению $\alpha\delta = \beta\gamma$, т. е. при

$$r = 2(1 + P) + \frac{2P^2}{1+P}\tau \tag{3.5}$$

При этом два из трех корней уравнения (3.2) мнимые, комплексно сопряженные. Квадрат модуля их равен



$$|\mu|^2 = \frac{1-P}{1+P}\tau - 1 \tag{3.6}$$

Отсюда видно, что

$$P < 1 \tag{3.7}$$

есть необходимое условие существования периодических решений (мнимых собственных чисел). Этому условию удовлетворяют жидкие металлы. Например, для ртути при комнатной температуре $P = 1 / 40$. Ниже будем предполагать условие (3.7) выполненным.

Зависимости $r = r(\tau)$, описываемые уравнениями (3.4) и (3.5), представлены на фигуре прямыми AB и FH соответственно. Там же проведена кривая KFL, уравнение которой

$$\triangle(r, \tau) = 4Pr^3 - [12P^2\tau - (1 - P)^2]r^2 + 4P\tau[3P^2\tau - 5(1 - P)^2]r - 4\tau[P^2\tau + (1 - P)^2]^2 = 0 \tag{3.8}$$

($\triangle(r,\tau)$ — дискриминант кубического уравнения (3.2)).

В области, расположенной над кривой KFL, уравнение (3.2) имеет только действительные решения; под этой кривой два корня уравнения являются комплексно сопряженными. Координаты точки F

$$r_* = 2 / (1 - P), \qquad \tau_* = (1 + P) / (1 - P) \tag{3.9}$$

§ 4. Анализ показывает, что из трех корней уравнения (3.2) один (обозначим его через μ_0) всегда отрицателен, т. е. соответствующее ему возмущение монотонно затухает при любых числах Релея и Тейлора.

В табл. 1 указано, какие значения принимают остальные два корня — μ_1 и μ_2 — в каждой из пяти областей, отмеченных на фигуре цифрами. Границы между этими областями проходят по AB, FH и KFL, уравнения которых даны в предыдущем параграфе.

Таблица 1

Области	$\mathrm{Im}\,\mu_1 \neq 0$	Неустойчивость	
		$\mathrm{Re}\,\mu_1 > 0$	$\mathrm{Re}\,\mu_2 > 0$
1			
2	×		
3	×	×	×
4		×	×
5		×	

Как видно из таблицы, в первых двух областях равновесие жидкости всегда устойчиво, но затухание возмущений происходит в каждой из них по-разному: в области *1* всегда монотонно, а в области *2* возможны возмущения типа затухающих колебаний; в областях *3*, *4* и *5* равновесие жидкости неустойчиво; в областях *4* и *5* возникающие возмущения растут со временем монотонно, причем в области *4* опасными являются возмущения двух видов (или любая их линейная комбинация), а в области *5* — одного вида.

Иначе обстоит дело в области *3*. Любое возмущение может быть здесь представлено в виде линейной комбинации одного монотонно затухающего и двух колебательных, возрастающих по амплитуде движений (соответственно числам μ_0, μ_1 и μ_2). Очевидно, что ни одна такая комбинация не даст решения, монотонно возрастающего со временем. Поэтому в области *3* стационарный режим вообще невозможен. Равновесие в этой области неустойчиво относительно периодических по времени возмущений, частоты которых равны $\pm \operatorname{Im} 3\pi^2\mu_1$.

§ 5. На приведенную фигуру, кроме построенных на ней кривых устойчивости по отношению к крупномасштабным возмущениям с $m = n = l = 1$, следует нанести подобные же кривые для всевозможных m, n, l.

В табл. 2 приводятся данные, необходимые для построения кривых устойчивости, соответствующих первым четырем различным комбинациям чисел m, n, l. Расчет этот выполнен для ртути: $P = 1/40$. В четвертом и пятом столбцах табл. 2 даны координаты точки F графика, по оси абсцисс которого откладывается число Тейлора, а по оси ординат — число Релея. Тангенсы углов наклона к оси абсцисс прямых AB (угол φ) и FH (угол ψ) приведены в двух последних столбцах таблицы. Нужно помнить, однако, что эти численные оценки получены при решении задачи с нереализуемыми граничными условиями (2.1).

Таблица 2

m	n	i	C_*^2	D_*^2	tg φ	$10^3\cdot$tgψ
1	1	1	2 700	2 800	0.50	0.61
2	1	1	8 600	22 100	0.20	0.24
2	2	1	18 200	74 500	0.12	0.15
1	1	2	21 600	5700	2.00	2.44

Указанные в статье эффекты будут наблюдаться в эксперименте при несколько бóльших числах Релея и Тейлора.

§ 6. В работе [8] показано, что устойчивость равновесия проводящей жидкости, помещенной в магнитное поле

$$\mathbf{H} = H\gamma \tag{6.1}$$

определяется собственными числами λ (в работе [8] числа λ имеют обратный знак) краевой задачи

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{v} &= -\nabla f + \nabla^2\mathbf{v} + C\gamma T + M(\gamma\nabla)\mathbf{h}, \qquad \nabla\mathbf{v} = \nabla\mathbf{h} = 0 \\ \lambda PT &= C\gamma\mathbf{v} + \nabla^2 T, \qquad \lambda N\mathbf{h} = \nabla^2\mathbf{h} + M(\gamma\nabla)\mathbf{v} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь $\mathbf{h}$ — добавочное магнитное поле, вызываемое в жидкости внешним полем H. Кроме P и C, в эти уравнения входят следующие безразмерные величины:

$$N = 4\pi\nu\sigma / c^2, \qquad M^2 = H^2\sigma l^2 / \rho\nu c^2 \qquad \text{(квадрат числа Гартмана)}$$

На непроводящих стенках куба поставим граничные условия:

$$\begin{aligned} &h_z && \text{непрерывно на верхней и нижней стенках} \\ &\partial h_z / \partial n = 0 && \text{на боковых стенках} \end{aligned} \tag{6.3}$$

С граничными условиями (2.1), (6.3) задача (6.2) легко решается. Оставляя для μ и r обозначения (3.1) и вводя $s = M^2 / 9\pi^2$, после простых вычислений получаем для μ уравнение (3.2) с коэффициентами

$$\alpha = PN, \qquad \gamma = 1 + P + N + Ps - Nr$$
$$\beta = P + N + PN, \qquad \delta = 1 + s - r \tag{6.4}$$

Вместо (3.6) и (3.7) теперь будем иметь соответственно

$$|\mu|^2 = \frac{1}{N^2}\left(\frac{N-P}{1+P} s - 1\right), \qquad P < N \tag{6.5}$$

Ртуть условию (6.5) не удовлетворяет: $P / N \sim 10^5$. Обратим внимание на то, что квадрат числа Гартмана входит в (6.4) точно так же, как число Тейлора в (3.3). Поэтому, если под τ (см. фигуру) понимать s, то все сказанное об устойчивости в § 4 целиком распространяется на рассматриваемый здесь случай.

Настоящая работа выполнена под руководством В. С. Сорокина, которому автор приносит глубокую благодарность.

Поступила 31 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1953.
2. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 1.
3. Chandrasekhar S. On the inhibition of convection by a magnetic field. Phil. Mag., 1952, vol. 43, p. 501.
4. Chandrasekhar S. The instability of a layer of fluid heated below and subject to Coriolis forces. I. Proc. Roy. Soc., A, 1953, vol. 217, p. 306.
5. Chandrasekhar S., Elbert D. The instability of a layer of fluid heated below and subject to Coriolis forces. Proc. Roy. Soc., A, 1955, vol. 231, p. 198.
6. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критического числа Рейнольдса. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
7. Lord Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. Phil. Mag., 1916, vol. 32, p. 529.
8. Сорокин В. С., Сушкин И. В. Устойчивость равновесия подогреваемой снизу проводящей жидкости в магнитном поле. ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 2.