Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ КОНСТРУИРОВАНИИ РЕГУЛЯТОРОВ В СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Э. А. Лидский

(Свердловск)

Рассматривается задача о построении оптимального управления в стохастической линейной системе при условии минимума среднеквадратичной ошибки. Описывается построение оптимальной функции Ляпунова [1] методом малого параметра [2]. Работа продолжает исследования [3, 4].

§ 1. Пусть переходный процесс в системе регулирования описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(\eta)x + c(\eta)\xi \tag{1.1}$$

Здесь x и c n-мерные векторы, $\eta(t)$ — случайная величина, $A(\eta)$ — матрица вида $\|a_{ij}\|_1^n$; скаляр $\xi(x, \eta)$ представляет собой регулирующее воздействие (управление).

Как и в [4], опишем марковский процесс $\eta(t)$ при помощи функций $q(\alpha)$, $q(\alpha, \beta)$ следующим образом [5]:

$$P[\eta(t + \Delta t) = \alpha / \eta(t) = \alpha] = 1 - q(\alpha)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P[\eta(t + \Delta t] \neq \alpha, \ \eta(t + \Delta t) \leqslant \beta / \eta(t) = \alpha] = q(\alpha, \beta)\Delta t + o(\Delta t)$$

где P — условная вероятность.

Назовем управление $\xi(x, \eta)$ оптимальным для системы (1.1), если оно обеспечивает минимум математического ожидания интегральной среднеквадратичной ошибки

$$J = M\int_0^\infty \Big(\sum_n x_i^2 + \xi^2\Big)dt$$

Способ построения ξ основывается на методе функций Ляпунова с использованием метода динамического программирования [6] применительно к стохастической системе (1.1). Ниже используем понятия и обозначения, введенные в работе [4]. Функция Ляпунова может быть выбрана в виде формы

$$v(x, \eta) = \sum_{i,j}^n b_{ij}(\eta)x_i x_j$$

коэффициенты которой получаются при $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ решением системы квадратных интегральных уравнений. Оптимальное управление находится из условия

$$\xi = -\frac{1}{2}\sum_{i=j}^n c_i(\eta)\frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{1.2}$$

Решение системы квадратных интегральных уравнений в общем случае затруднительно. В данной работе рассмотрим два таких случая, когда задача может быть решена эффективно методом малого параметра. При этом функции $v(x, \eta)$ и $\xi(x, \eta)$ находятся в виде рядов по степеням параметра μ:

$$v(x, \eta, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_k, \qquad \xi(x, \eta, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \xi_k \tag{1.3}$$

(причем необходимость решать упомянутую систему квадратных интегральных уравнений отпадает).

Задача сводится к последовательному вычислению коэффициентов v_k и ξ_k в (1.3) из линейных систем. Доказывается сходимость получаемых таким образом рядов к $v(x, \eta)$ и $\xi(x, \eta)$.

Случай 1.1. Вероятности переходов $\eta = \alpha \to \eta = \beta$ малы, т. е.

$$q(\alpha) = \mu r(\alpha), \qquad q(\alpha, \beta) = \mu r(\alpha, \beta) \tag{1.4}$$

Здесь μ — малый параметр.

Случай 1.2. Уравнение (1.1) можно представить в виде

$$dx / dt = Ax + \mu R(\eta) x + c\xi \tag{1.5}$$

Здесь $\mu R(\eta) x$ — группа членов, зависящих от $\eta(t)$, μ — малый параметр, $R(\eta)$ — матрица вида $\|r_{ij}\|_1^n$.

§ 2. Рассмотрим случай 1.1. Пусть $\mu = 0$. Тогда функция $v(x, \eta)$ будет равна нулевому коэффициенту v_0 ряда (1.3). При этом в силу (1.4) имеем $q(\alpha) = q(\alpha, \beta) = 0$, и, следовательно, задача сводится к определению функции Ляпунова v_0 и оптимального управления ξ_0 при каждом фиксированном значении $\eta = \gamma$ для детерминированной системы вида

$$dx / dt = A(\gamma) x + c(\gamma) \xi_0 \tag{2.1}$$

где ξ_0 — нулевой коэффициент ряда (1.3).

Такая задача изучена в работе [3], где указан метод определения коэффициентов $b_{ij}^{(0)}(\gamma)$ определенно положительной формы, являющейся для (2.1) функцией Ляпунова. Для полноты изложения приведем систему уравнений, определяющих $b_{ij}^{(0)}$:

$$-\left[\sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma) b_{ki}^{(0)}(\gamma)\right]\left[\sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma) b_{si}^{(0)}(\gamma)\right] + \sum_{i=1}^{n} [b_{ki}^{(0)}(\gamma) a_{is}(\gamma) + b_{si}^{(0)}(\gamma) a_{ik}(\gamma)] = \begin{cases} 0 & (k \neq s) \\ -1 & (k = s) \end{cases}$$

причем

$$\xi_0 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma) \frac{\partial v_0}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma) \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(0)}(\gamma) x_j\right]$$

Достаточным условием существования функций v_0 и ξ_0 является [7] линейная независимость векторов $c, Ac, \ldots, A^{n-1}c$. Предположим, что это условие выполняется равномерно по η. Тогда v_0 и ξ_0 могут быть определены единственным образом при любом $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$.

Покажем, что после вычисления v_0 и ξ_0 можно последовательно определять коэффициенты рядов (1.3) при каждом фиксированном $\eta = \gamma$ решением систем алгебраических линейных уравнений.

Уравнения динамического программирования для рассматриваемой задачи с учетом (1.3) и (1.4) при $\eta = \gamma$, имеют вид [4]:

$$\left(\frac{dM\{v\}}{dt}\right)_{\eta=\gamma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i\xi\right] +$$

$$+ \mu \int_{\eta_1}^{\eta_2} [v(x, \lambda) - v(x, \gamma)]\, d_\lambda r(\gamma, \lambda) = -\sum_{n} x_i^2 - \xi^2 \tag{2.2}$$

$$\xi = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \tag{2.3}$$

Смысл производной $(dM\{v\}/dt)_{\eta=\gamma}$, составленной в силу уравнения (1.1), и способ ее вычисления изложены в работах [4, 9]. Интеграл в уравнении (2.2) имеет смысл интеграла Стильтьеса.

Из (2.3) получаем выражение коэффициентов ряда

$$\xi_k = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma)\frac{\partial v_k(x, \gamma)}{\partial x_i} \tag{2.4}$$

Подставим ряд (1.3) в уравнение (2.2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ. В результате преобразований с учетом (2.4) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_k(x, \gamma)}{\partial x_i}\left[c_i(\gamma)\,\xi_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)\,x_j\right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{k-1} \xi_s\xi_{k-s} + \int_{\eta_2}^{\eta_1} [v_{k-1}(x, \lambda) - v_{k-1}(x, \gamma)]\, d_\lambda r(\gamma, \lambda) \tag{2.5}$$

Левая часть (2.5) — производная $dv_k(x, \gamma)/dt$ в силу системы (2.1) при $\eta = \gamma$. Обозначим ее $(dv_k/dt)_{\eta=\gamma}$. Тогда

$$\left(\frac{dv_k}{dt}\right)_{\eta=\gamma} = \sum_{s=1}^{k-1} \xi_s\xi_{k-s} + \int_{\eta_2}^{\eta_1} [v_{k-1}(x, \lambda) - v_{k-1}(x, \gamma)]\, d_\lambda r(\gamma, \lambda) \tag{2.6}$$

Уравнения (2.4) и (2.6) позволяют найти k-й коэффициент $v_k(x, \eta)$ при каждом $\eta = \gamma$, если известны $k - 1$ предыдущих коэффициентов. Так как правая часть (2.6) есть некоторая квадратичная форма, а система (2.1) асимптотически устойчива, то на основании [8, стр. 61] существует единственное решение (2.6) при $\eta = \gamma$ — квадратичная форма $v_k(x, \eta)$:

$$v_k(x, \eta) = \sum_{i,j}^{n} b_{ij}^{(k)}(\eta)\, x_i x_j \tag{2.7}$$

Подставив (2.7) в (2.6) и приравняв коэффициенты при произведениях $x_m x_l$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения $b_{ml}^{(k)}$:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{im}^{(k)}\left[a_{il}+c_i\sum_{j=1}^{n} c_j b_{jl}^{(0)}\right]+\sum_{i=1}^{n} b_{il}^{(k)}\left[a_{im}+c_i\sum_{j=1}^{n} c_j b_{jm}^{(0)}\right]=$$
$$=2\sum_{s=1}^{k-1}\left[\sum_{i,j}^{n} c_i c_j b_{jm}^{(s)} b_{il}^{(k-s)}\right]+2\int_{\eta_2}^{\eta_1}\left[b_{ml}^{(k-1)}(\lambda)-b_{ml}^{(k-1)}(\gamma)\right]d_\lambda r(\gamma,\lambda) \quad (2.8)$$

Рассмотрим случай 1.2. Система (1.5) при $\mu=0$ принимает вид:

$$\frac{dx}{dt}=Ax+c\xi_0 \quad (2.9)$$

где A — постоянная матрица, c — постоянный вектор, ξ_0 — нулевой коэффициент ряда (1.3).

Таким образом, и в этом случае задача сводится к определению нулевых коэффициентов рядов (1.3) как функции Ляпунова v_0 и оптимального управления ξ_0 для детерминированной системы (2.9).

Порядок вычисления v_0 и ξ_0 указан выше [3].

Вычисления приводят к уравнению, заменяющему здесь (2.5):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+c_i\xi_0\right]+\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left[v_k(x,\lambda)-v_k(x,\gamma)\right]d_\lambda q(\gamma,\lambda)=$$
$$=\sum_{s=1}^{k-1}\xi_s\xi_{k-s}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_{k-1}}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j\right) \quad (2.10)$$

Левая часть (2.10) есть производная $(dM\{v_k\}/dt)_{\eta=\gamma}$, вычисленная в силу уравнения (2.9) [4, 9]:

$$\left(\frac{dM\{v_k\}}{dt}\right)_{\eta=\gamma}=\sum_{s=1}^{k-1}\xi_s\xi_{k-s}-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j\right)\frac{\partial v_{k-1}}{\partial x_i} \quad (2.11)$$

Из (2.11) с учетом (2.4) получаем систему линейных интегральных уравнений для определения коэффициентов:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{im}^{(k)}\left[a_{il}+c_i\sum_{j=1}^{n} c_j b_{jl}^{(0)}\right]+\sum_{i=1}^{n} b_{il}^{(k)}\left[a_{im}+c_i\sum_{j=1}^{n} c_j b_{jm}^{(0)}\right]+$$
$$+2\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left[b_{ml}^{(k)}(\lambda)-b_{ml}^{(k)}(\gamma)\right]d_\lambda q(\gamma,\lambda)=$$
$$=2\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{i,j}^{n}\left[c_i c_j b_{im}^{(s)} b_{jl}^{(k-s)}\right]-2\sum_{i=1}^{n}\left[b_{im}^{(k-1)}r_{il}+b_{il}^{(k-1)}r_{im}\right] \quad (2.12)$$

Если функция $q(\alpha,\beta)$ допускает плотность

$$p(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{m} f_i(\alpha)\varphi_i(\beta)$$

то система (2.12) будет состоять из уравнений с вырожденным ядром, эффективный способ решения которых известен [10].

§ 3. Докажем, что при принятых условиях ряды (1.3) сходятся.

1. Для исследования случая 1.1 найдем оценку коэффициента v_k первого ряда (1.3) через оценки коэффициентов $v_0, \ldots, v_{k-1}$ того же ряда.

Из уравнений (2.4), (2.6) следует, что правая часть (2.6) есть квадратичная форма

$$\left(\frac{dv_k}{dt}\right)_{\eta=\gamma} = \sum_{i,j}^{n} \beta_{ij}^{(k)} x_i x_j \tag{3.1}$$

где коэффициенты $\beta_{ml}^{(k)}$ равны правым частям соответствующих уравнений системы (2.8):

$$\beta_{ml}^{(k)} = 2\sum_{s=1}^{k-1}\left[\sum_{i,j}^{n} c_i c_j b_{jm}^{(s)} b_{il}^{(k-s)}\right] + 2\int_{\eta_2}^{\eta_1} [b_{ml}^{(k-1)}(\lambda) - b_{ml}^{(k-1)}(\gamma)]\, d_\lambda r(\gamma, \lambda). \tag{3.2}$$

Из (3.1) следует

$$v_k(T) - v_k(0) = \int_0^T \left(\sum_{i,j}^{n} \beta_{ij}^{(k)} x_i x_j\right) dt$$

Так как по условиям задачи система (1.1) асимптотически устойчива, то при $T \to \infty$ форма $v_k(T) \to 0$

$$v_k(0) = -\int_0^\infty \left(\sum_{i,j}^{n} \beta_{ij}^{(k)} x_i x_j\right) dt \tag{3.3}$$

Обозначим $\|F_{ij}(t)\|_1^n$ матрицу нормальной фундаментальной системы решений исходного уравнения (1.1) при $\eta = \gamma$.

Определим решения системы уравнений (1.1) по формуле Коши для однородных систем [11]:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(t)\, x_{j0} \tag{3.4}$$

Для асимптотически устойчивой системы при $\eta = \gamma$ имеет место неравенство [8]

$$|F_{ij}(t)| < Be^{-\alpha(t-t_0)} \tag{3.5}$$

в котором числа B и α могут быть выбраны общими независимо от начального момента t_0 и фиксируемого значения $\eta = \gamma$.

Примем $t_0 = 0$.

В силу (3.3 — 3.5) справедливо неравенство

$$|v_k(x, \gamma)| < \int_0^\infty \sum_{i,j}^{n} \left\{|\beta_{ij}^{(k)}|\, B^2 e^{-2\alpha t} \sum_{p,q}^{n} |x_p x_q|\right\} dt \tag{3.6}$$

Из теории квадратичных форм имеем

$$\sum_{p,q}^{n} |x_p x_q| = \left(\sum_{m=1}^{n} |x_m|\right)^2 \leqslant n \sum_{m=1}^{n} x_m^2 \tag{3.7}$$

Поэтому

$$|v_k(x,\gamma)| < \frac{n}{2\alpha} B^2 \left(\sum_{i,j}^{n} |\beta_{ij}^{(k)}|\right)\left(\sum_{m=1}^{n} x_m^2\right) \tag{3.8}$$

Предположим, что при каждом значении $s = 0, 1, \ldots, k-1$ коэффициенты $b_{ij}^{(s)}$ вычислены. Введем обозначения

$$\max |b_{ij}^{(s)}| = L_s, \qquad \max |c_i c_j| = N \tag{3.9}$$

Для интеграла в правой части (3.2) можно составить оценку

$$\int_{\eta_2}^{\eta_1} |[\beta_{ml}^{(k-1)}(\lambda) - b_{ml}^{(k-1)}(\gamma)]|\, d_\lambda r(\gamma, \lambda) \leqslant 2L_{k-1} r(\gamma)$$

Оценка всего коэффициента $\beta_{ij}^{(k)}$ имеет вид:

$$|\beta_{ij}^{(k)}| < 2Nn^2 \sum_{s=1}^{k-1} L_s L_{k-s} + 4L_{k-1} r(\gamma) \tag{3.10}$$

Подберем для формы $v(x,\gamma)$ число $c>0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\max |v_k(x,\gamma)| \geqslant cL_k \sum_{n} x_m^2 \tag{3.11}$$

Очевидно, коэффициент c выбирается независимо от числа k.

Используя (3.6) — (3.11), для L_k имеем оценки через известные числа $L_s (s = 0, 1, \ldots, k-1)$:

$$cL_k < \frac{B^2Nn^5}{\alpha} \sum_{s=1}^{k-1} L_s L_{k-s} + 4n^2 L_{k-1} r_{\max} \qquad (r_{\max} = \max r(\eta)) \tag{3.12}$$

Числа c, B, α, N выбраны независимо от k и η общими для любых k и η. Представим (3.12) в виде

$$L_k < A \sum_{s=1}^{k-1} L_s L_{k-s} + AL_{k-1} \tag{3.13}$$

Здесь

$$A = \max A_i \quad (i = 1, 2), \qquad A_1 = \frac{B^2Nn^5}{\alpha c} > 0, \qquad A_2 = \frac{4n^2 r_{\max}}{c} > 0$$

Дальнейшее доказательство заключается в применении метода мажорантных рядов [12]. Рассмотрим квадратное уравнение

$$\rho^2 + (a+\mu)\rho + b = 0 \tag{3.14}$$

где a, b, μ — некоторые числа.

Если число μ достаточно мало, то корни (3.14) всегда можно записать в виде сходящегося ряда по μ:

$$\rho^{(1,2)} = -\frac{a+\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+\mu}{2}\right)^2 - b} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \rho_k \tag{3.15}$$

Покажем, что при определенных значениях a, b в (3.15) один из корней $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ представляется рядом, мажорантным для ряда (1.3).

Подставим (3.15) в (3.14) и приравняем нулю коэффициенты при μ_k ($k = 0, 1, \ldots$). В результате получим выражение ρ_k через $\rho_0, \ldots, \rho_{k-1}$:

$$\rho_k = -\frac{1}{2\rho_0 + a}\left(\sum_{s=1}^{k-1} \rho_s \rho_{k-s} + \rho_{k-1}\right) \tag{3.16)}$$

Значения ρ_0 находятся из уравнения

$$\rho_0^2 + a\rho_0 + b = 0 \tag{3.17}$$

Из (3.16) и (3.13) следует, что построенный сходящийся ряд (3.15 будет мажорантным для ряда (1.3), если принять

$$\rho_0 = L_0, \qquad -\frac{1}{2\rho_0 + a} = A$$

Отсюда значения коэффициентов a и b в уравнении (3.14) будут

$$a = -\frac{1 + 2L_0 A}{A} < 0, \qquad b = \frac{1 + L_0 A}{A} L_0 > 0$$

По известным a и b из (3.17) находим, что мажорирующим для (1.3) является тот из корней (3.14), значение которого определяется нулевым коэффициентом

$$\rho_0 = L_0 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Сходимость ряда (1.3) доказана.

2. Порядок исследования случая 1.2 будет аналогичным.

Уравнение (2.11) представим в виде

$$\left(\frac{dM\{v_k\}}{dt}\right)_{\eta=\gamma} = \sum_{i,j}^{n} \beta_{ij}^{(k)} x_i x_j \tag{3.18}$$

Здесь коэффициенты формы $\beta_{ml}^{(k)}$ равны правым частям соответствующих уравнений системы (2.12).

Покажем [4], что из (3.18) следует равенство

$$v(x, \gamma) = -\int_0^\infty M\left\{\sum_{i,j}^{n} \beta_{ij}^{(k)} x_i x_j \,/\, x, \gamma\right\} dt \tag{3.19}$$

Здесь символ $M\{S / x, \gamma\}$ — математическое ожидание величины S при начальных условиях x, γ.

Рассмотрим производную $dM\{v_k(x(t), \eta(t)) / x_0, \gamma, t_0\} / dt$, составленную в силу уравнения (2.9). Осредняя по x, η, получим равенство

$$\frac{dM\{v_k(x, \eta) / x_0, \gamma, t_0\}}{dt} = M\left\{\frac{dM\{v_k\}}{dt} \Big/ x_0, \gamma, t_0\right\} = M\left\{\sum_{i,j}^{n} \beta_{ij}^{(k)} x_i x_j / x_0, \gamma, t_0\right\}$$

В результате интегрирования имеем

$$M\{v_k(x(T), \eta(T)) / x_0, \gamma, t_0\} - v(x_0, \gamma) = \int_0^T M\left\{\sum_{i,j}^{n} \beta_{ij}^{(k)} x_i x_j / x_0, \gamma\right\} dt$$

Так как система асимптотически устойчива, то $M\{v_k\} \to 0$ при $T \to \infty$, что и доказывает (3.19).

Опуская преобразования, подобные выполнявшимся ранее, выпишем оценку коэффициентов v_k ряда (1.3):

$$|v_k(x, \gamma)| < \frac{n}{2\alpha} B^2 \left(\sum_n x_m^2\right) M \left\{\sum_{i,j}^{n} |\beta_{ij}^{(\omega)}| / \eta = \gamma\right\}$$

Если обозначить $\delta = \max |r_{ij}(\eta)|$ при $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$, то с учетом обозначений (3.9) получаем

$$cL_k < \frac{B^2 n^5 N}{\alpha} \sum_{s=1}^{k-1} L_s L_{k-s} + 4n^3 \delta L_{k-1}$$

Дальнейшее доказательство повторяет рассуждения, изложенные выше.

Примечание 3.1. Построенный мажорирующий ряд позволяет не только доказать сходимость ряда (1.3), но и определить известным образом радиус сходимости.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 3.1. Если для системы (1.1) на отрезке $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ коэффициенты $A(\eta)$ и $c(\eta)$ непрерывны и выполняются следующие условия: 1) система векторов $c(\eta)$, $A(\eta)c(\eta), \ldots, A^{n-1}(\eta)c(\eta)$ линейно независима, 2) малы вероятности переходов $\eta = \alpha \to \eta = \beta$, или же правые части (1.1) можно представить в виде (1.5), то функция Ляпунова $v(x, \eta)$ и оптимальное управление $\xi(x, \eta)$ представляются в виде рядов (1.3). Коэффициенты этих рядов находятся решением линейных систем алгебраических, или интегральных уравнений.

Поступила 18 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.— Л., Л., 1950.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, М., 1956.
3. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов, ч. I—IV. Авт. и телемех., 1960, 4—6 и 1961, № 4.
4. Красовский Н. Н. и Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами, ч. I — III. [Авт. и телемех., 1961, № 9—11.
5. Дуб Дж. Вероятностные процессы, ИИЛ, 1956.
6. Беллман Р. Динамическое программирование. ИИЛ, 1960.
7. Кириллова Ф. М. К задаче об оптимальном конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. XXV, № 3.
8. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, М.— Л., 1952.
9. Кац А. Я. и Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV. Гостехиздат, М.— Л., 1951.
11. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат. М.— Л., 1949.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Гостехиздат, М.— Л., 1948. т. II.