Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХ

Л. Я. Ройтенберг

(Москва)

Гироскопические следящие системы могут быть предназначены для отслеживания многомерных входных сигналов. Так, например, на базе трехосных силовых гироскопических систем [1] могут быть построены следящие системы для отслеживания трехмерного сигнала по трем осям ориентированного надлежащим образом в пространстве координатного трехгранника. При помощи двухосной силовой гироскопической системы возможно отслеживание двумерного входного сигнала.

Ниже, на основании теории многомерных случайных процессов [2-5], рассматривается задача о построении оптимальной гироскопической следящей системы, предназначенной для отслеживания двумерного входного сигнала при наличии не только помех на входе, но и возмущений, вызываемых движением объекта, на котором установлена следящая система. Как показано в работе, указанные возмущения обусловливают взаимную корреляцию определяющих оптимальную функцию веса приведенных входных сигналов, даже в случае, когда сами входные сигналы не коррелированы между собой. Взаимная корреляционная функция приведенных входных сигналов определяется как статистическими характеристиками возмущений, так и структурой и параметрами матричной передаточной функции силового гироскопического устройства. Поэтому оптимальная функция веса всей следящей системы в целом, а не только ее корректирующей цепи, существенно зависит от динамических характеристик силового гироскопического устройства.

1. Гироскопическая следящая система с обратной связью. Ошибка воспроизведения полезного входного сигнала. Следящая система, предназначенная для отслеживания двумерного входного сигнала, состоит из гироскопа с тремя степенями свободы и преобразователя входных сигналов, передаточная функция которого должна быть выбрана так, чтобы среднее квадратическое значение ошибки воспроизведения полезного входного сигнала было минимальным.

Уравнения движения гироскопа имеют следующий вид:

$$A\alpha'' + \sigma\alpha' - H\beta' = -l[y_2(t) + \psi_2(t)]$$
$$B\beta'' + H\alpha' = S[y_1(t) + \psi_1(t)] \qquad (1.1)$$

Здесь α — угол поворота внешнего карданова кольца гироскопа, β — угол поворота кожуха гироскопа, H — кинетический момент гироскопа, A — момент инерции гироскопа вместе с кожухом и внешним кардановым кольцом относительно оси этого кольца, B — момент инерции гироскопа вместе с кожухом относительно оси кожуха, — $\sigma\alpha'$ — момент сил трения в опорах оси внешнего карданова кольца гироскопа,— $l\psi_2(t)$ и $S\psi_1(t)$ — возмущающие моменты относительно оси внешнего карданова кольца гироскопа и оси кожуха гироскопа, соответственно, возникающие, например, вследствие качки корабля, на котором установлена следящая система. Далее будем предполагать, что $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — стационарные случайные процессы с математическими ожиданиями, равными нулю.

Через $-ly_2(t)$ и $Sy_1(t)$ обозначены, соответственно, моменты относительно оси внешнего кольца и кожуха гироскопа, накладываемые коррекционными электромагнитами. Эти моменты пропорциональны сигналам $y_2(t)$ и $y_1(t)$, которые формируются в преобразователе по следующему закону:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= X_{11}(D)\,[\theta_1(t)-\alpha(t)] + X_{12}(D)\,[\theta_2(t)-\beta(t)] \\ y_2(t) &= X_{21}(D)\,[\theta_1(t)-\alpha(t)] + X_{22}(D)\,[\theta_2(t)-\beta(t)] \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь

$$\theta_i(t) = m_i(t) + n_i(t) \qquad (i=1,\,2) \tag{1.3}$$

поступающие в систему входные сигналы, причем $m_i(t)$ — полезный сигнал, а $n_i(t)$ — помеха. Полезный сигнал $m_i(t)$ и помеха $n_i(t)$ — некоррелированные между собой стационарные случайные процессы с математическими ожиданиями, равными нулю.

Через $X_{jk}(D)\,(j,\,k=1,\,2)$ обозначены элементы матричной передаточной функции

$$X(D) = \| X_{jk}(D) \| \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.4}$$

преобразователя. Как указано выше, функция $X(D)$ подлежит определению из условий оптимального воспроизведения системой полезных составляющих входных сигналов с тем, чтобы угол поворота внешнего карданова кольца $\alpha(t)$ был возможно ближе к $m_1(t)$, а угол поворота кожуха гироскопа $\beta(t)$ был возможно ближе к $m_2(t)$.

Уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \alpha'' + \frac{\sigma}{A}\alpha' - \frac{H}{A}\beta' &= -\frac{l}{A}[y_2(t)+\psi_2(t)] \\ \beta'' + \frac{H}{B}\alpha' &= \frac{S}{B}[y_1(t)+\psi_1(t)] \end{aligned} \tag{1.5}$$

Введем матрицы

$$L(D) = \left\| \begin{matrix} D^2+(\sigma/A)\,D & -(H/A)\,D \\ (H/B)\,D & D^2 \end{matrix} \right\|, \qquad z(t) = \left\| \begin{matrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{matrix} \right\| \tag{1.6}$$

$$e(D) = \left\| \begin{matrix} 0 & -l/A \\ S/B & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad y(t) = \left\| \begin{matrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{matrix} \right\|, \qquad \psi(t) = \left\| \begin{matrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{matrix} \right\| \tag{1.7}$$

Тогда систему (1.5) можно заменить матричным уравнением

$$L(D)\,z(t) = e(D)\,[y(t)+\psi(t)] \tag{1.8}$$

Из уравнения (1.8) следует, что

$$z(t) = Y(D)\,y(t) + Y(D)\,\psi(t) \qquad \left(Y(D) = \frac{L^*(D)\,e(D)}{\Delta(D)}\right) \tag{1.9}$$

Здесь $L^*(D)$ — присоединенная матрица для матрицы $L(D)$, а $\Delta(D)$ — определитель матрицы $L(D)$.

Чтобы представить в матричной форме соотношения (1.2), описывающие формирование сигналов в преобразователе, введем матрицы

$$\theta(t) = \left\| \begin{matrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{matrix} \right\|, \qquad m(t) = \left\| \begin{matrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{matrix} \right\|, \qquad n(t) = \left\| \begin{matrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{matrix} \right\| \tag{1.10}$$

В соответствии с (1.2), (1.4), (1.6) и (1.7) получим следующее матричное соотношение:

$$y(t) = X(D)[\theta(t) - z(t)] \tag{1.11}$$

Так как согласно (1.3) и (1.10)

$$\theta(t) = m(t) + n(t) \tag{1.12}$$

где $m(t)$ — матрица полезных сигналов, а $n(t)$ — матрица помех, то соотношение (1.11) принимает вид

$$y(t) = X(D)[m(t) + n(t)] - X(D) z(t) \tag{1.13}$$

Подставляя в (1.9) значение $y(t)$ согласно (1.13), получим матричное дифференциальное уравнение, описывающее следящую систему вместе с преобразователем

$$[E + Y(D)X(D)] z(t) = Y(D) X(D) m(t) + Y(D) X(D) n(t) + Y(D) \psi(t) \tag{1.14}$$

Здесь через E обозначена единичная матрица. Обозначим теперь через $Z(D)$ обратную матрицу для матрицы $E + Y(D) X(D)$:

$$Z(D) = [E + Y(D) X(D)]^{-1} \tag{1.15}$$

Умножим уравнение (1.14) слева на матрицу $Z(D)$:

$$z(t) = Z(D) Y(D) X(D) m(t) + Z(D) Y(D) X(D) n(t) + Z(D) Y(D) \psi(t) \tag{1.16}$$

Обозначим через $\varepsilon(t)$ матрицу ошибок воспроизведения полезных сигналов $m_1(t)$ и $m_2(t)$

$$\varepsilon(t) = m(t) - z(t) \tag{1.17}$$

Так как согласно (1.15)

$$Z(D)[E + Y(D) X(D)] = E \tag{1.18}$$

то имеет место тождество

$$m(t) = Z(D) m(t) + Z(D) Y(D) X(D) m(t) \tag{1.19}$$

Подставляя $m(t)$ и $z(t)$ согласно (1.19) и (1.16) в (1.17), приведем матрицу ошибок воспроизведения полезных сигналов к виду:

$$\varepsilon(t) = Z(D)[m(t) - Y(D) \psi(t) - Y(D) X(D) n(t)] \tag{1.20}$$

В выражение (1.20) входит явно, а также через $Z(D)$, подлежащая определению матричная передаточная функция преобразователя $X(D)$.

2. Приведение возмущающих сил к входу преобразователя. Для решения задачи приведения возмущающих сил $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ к входу преобразователя нужно поставить описанной в п. 1 следящей системе в соответствие другую следящую систему, у которой отсутствуют возмущающие силы, но входной сигнал

$$\theta^*(t) = M(t) + N(t) \tag{2.1}$$

где $M(t) = \|M_i(t)\|$ — матрица полезных сигналов, а $N(t) = \|N_i(t)\|$ — матрица помех, подобран так, что матрица $\varepsilon^*(t)$ ошибок воспроизведения сигнала $M(t)$ тождественно совпадает с матрицей $\varepsilon(t)$, определяемой выражением (1.20).

Для рассматриваемой в этом параграфе системы выражение (1.9), определяющее сигнал на выходе системы, должно быть заменено следующим выражением

$$z^*(t) = Y(D)\,y^*(t) \tag{2.2}$$

где звездочки у соответствующих символов указывают, что имеется в виду вновь рассматриваемая следящая система.

Сигнал на выходе преобразователя, как следует из (1.13) и (2.1), теперь будет иметь вид

$$y^*(t) = X(D)\,[M(t) + N(t)] - X(D)\,z^*(t) \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что

$$[E + Y(D)\,X(D)]\,z^*(t) = Y(D)\,X(D)\,M(t) + Y(D)\,X(D)\,N(t) \tag{2.4}$$

где, как и выше, через E обозначена единичная матрица.

Умножая левую и правую части уравнения (2.4) слева на матрицу $Z(D)$, определяемую согласно (1.15), будем иметь

$$z^*(t) = Z(D)\,Y(D)\,X(D)\,M(t) + Z(D)\,Y(D)\,X(D)\,N(t) \tag{2.5}$$

Ошибка $\varepsilon^*(t)$ воспроизведения сигнала $M(t)$ будет

$$\varepsilon^*(t) = M(t) - z^*(t) \tag{2.6}$$

В соответствии с (1.18)

$$M(t) = Z(D)\,M(t) + Z(D)\,Y(D)\,X(D)\,M(t) \tag{2.7}$$

Подставляя выражения (2.7) и (2.5) в (2.6), получим

$$\varepsilon^*(t) = Z(D)\,M(t) - Z(D)\,Y(D)\,X(D)\,N(t) \tag{2.8}$$

Из сравнения выражений (2.8) и (1.20) видно, что для того чтобы имело место тождество

$$\varepsilon^*(t) \equiv \varepsilon(t) \tag{2.9}$$

необходимо принять

$$M(t) = m(t) - Y(D)\,\psi(t), \qquad N(t) = n(t) \tag{2.10}$$

Сигналы, определяемые выражением (2.10), можно назвать приведенными входными сигналами.

В соответствии с (2.10) и (2.1) матрица входных сигналов $\theta^*(t)$ принимает вид

$$\theta^*(t) = \begin{Vmatrix} \theta_1^*(t) \\ \theta_2^*(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m_1(t) - Y_{11}(D)\,\psi_1(t) - Y_{12}(D)\,\psi_2(t) + n_1(t) \\ m_2(t) - Y_{21}(D)\,\psi_1(t) - Y_{22}(D)\,\psi_2(t) + n_2(t) \end{Vmatrix} \tag{2.11}$$

Как видно из (2.11), приведенный входной сигнал $\theta^*(t)$ является двумерным случайным процессом, элементы которого $\theta_1^*(t)$ и $\theta_2^*(t)$ коррелированы между собой даже в случае, когда

$$\theta_1(t) = m_1(t) + n_1(t), \qquad \theta_2(t) = m_2(t) + n_2(t)$$

не коррелированы между собой.

При рассмотрении задачи о минимуме средней квадратической ошибки воспроизведения $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$ удобнее исходить из схемы, рассмотренной в п. 2, так как при этом можно непосредственно применить метод Винера, как это показано ниже.

3. Эквивалентная система без обратной связи. Рассмотрим теперь систему без обратной связи, т. е. некоторый фильтр, на вход которого подается сигнал (2.1)

$$\theta^*(t) = M(t) + N(t)$$

где $M(t)$ и $N(t)$ определены выражениями (2.10). Будем считать $M(t)$ полезным сигналом, который фильтр должен воспроизвести, а $N(t)$ — помехой. Матричную передаточную функцию фильтра обозначим через $\Phi(D)$. Сигнал на выходе фильтра будет следующим:

$$z^{**}(t) = \Phi(D)\,[M(t) + N(t)] \tag{3.1}$$

Ошибка воспроизведения сигнала $M(t)$

$$\varepsilon^{**}(t) = M(t) - z^{**}(t) \tag{3.2}$$

или, в соответствии с (3.1)

$$\varepsilon^{**}(t) = [E - \Phi(D)]\,M(t) - \Phi(D)\,N(t) \tag{3.3}$$

где, как и выше, E — единичная матрица.

Пусть $\Phi(D)$ — оптимальная передаточная функция фильтра, доставляющая минимум средним квадратическим ошибкам

$$\sqrt{\overline{\varepsilon_j^{**2}}} \quad (j = 1, 2)$$

воспроизведения сигналов $M_j(t)$ $(j = 1, 2)$. Определение функции $\Phi(D)$ будет выполнено ниже.

Согласно (2.9) $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon^*(t)$; поэтому оптимальное воспроизведение полезных сигналов $m_j(t)\,(j = 1, 2)$ в исходной задаче (п. 1) будет иметь место при выполнении условия

$$\varepsilon^{**}(t) \equiv \varepsilon^*(t) \tag{3.4}$$

где $\varepsilon^*(t)$ определяется выражением (2.8).

Нетрудно показать, что условие (3.4) будет выполняться, если выбрать матрицу $X(D)$ так, чтобы она удовлетворяла соотношению

$$Z(D)\,Y(D)\,X(D) = \Phi(D) \tag{3.5}$$

Действительно, согласно (1.18)

$$Z(D) = E - Z(D)\,Y(D)\,X(D) \tag{3.6}$$

В соответствии с (3.6) и (3.5) выражение (2.8) принимает вид

$$\varepsilon^*(t) = [E - \Phi(D)]\,M(t) - \Phi(D)\,N(t) \tag{3.7}$$

т. е. полностью совпадает с выражением (3.3) для $\varepsilon^{**}(t)$.

Остается еще определить из соотношения (3.5) неизвестную матрицу $X(D)$. Для этого умножим левую и правую части соотношения (3.5) слева на матрицу $E + Y(D)\,X(D)$. Учитывая (1.18), будем иметь

$$Y(D)\,X(D) = [E + Y(D)\,X(D)]\,\Phi(D) \tag{3.8}$$

Отсюда

$$Y(D)\,X(D)\,[E-\Phi(D)]=\Phi(D) \tag{3.9}$$

и, следовательно, искомая матричная передаточная функция преобразователя $X(D)$ будет иметь вид

$$X(D)=Y^{-1}(D)\,\Phi(D)\,[E-\Phi(D)]^{-1} \tag{3.10}$$

4. Один из вариантов реализации преобразователя. Рассмотрим возможность реализации при помощи вычислительных устройств преобразователя с матричной передаточной функцией $X(D)$, определяемой выражением (3.10). Введем обозначения

$$r_1(t)=\theta_1(t)-\alpha(t), \qquad r_2(t)=\theta_2(t)-\beta(t) \tag{4.1}$$

Уравнения (1.2), в соответствии с которыми функционирует преобразователь, приведем к виду

$$y_1(t)=X_{11}(D)\,r_1(t)+X_{12}(D)\,r_2(t), \quad y_2(t)=X_{21}(D)\,r_1(t)+X_{22}(D)\,r_2(t) \tag{4.2}$$

Введем матрицу

$$r(t)=\begin{Vmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

Учитывая, что согласно (1.10) и (1.7)

$$r(t)=\theta(t)-z(t) \tag{4.4}$$

заменим уравнения (1.2) матричным дифференциальным уравнением

$$y(t)=X(D)\,r(t) \tag{4.5}$$

Подставляя в (4.5) найденное для $X(D)$ выражение (3.10), получим

$$y(t)=Y^{-1}(D)\,\Phi(D)\,[E-\Phi(D)]^{-1}r(t) \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что

$$Y(D)\,y(t)=\Phi(D)\,[E-\Phi(D)]^{-1}\,r(t) \tag{4.7}$$

Обозначая через $\zeta(t)$ функцию

$$\zeta(t)=[E-\Phi(D)]^{-1}r(t) \tag{4.8}$$

получим, что

$$\zeta(t)-\Phi(D)\,\zeta(t)=r(t) \tag{4.9}$$

Через $\Gamma(t)$ обозначим функцию веса оптимального фильтра, т. е. фильтра с передаточной функцией $\Phi(D)$. Как известно, указанные функции связаны операционным соотношением

$$p\Phi(p) \mathrel{\dot{\to}} \Gamma(t) \tag{4.10}$$

т. е. функция $p\Phi(p)$ является изображением по Карсону — Хевисайду для оригинала $\Gamma(t)$. При помощи (4.10) можно перейти от соотношения (4.9) к интегральному уравнению

$$\zeta(t)-\int_0^t \Gamma(t-\tau)\,\zeta(\tau)\,d\tau=r(t) \tag{4.11}$$

относительно неизвестной функции $\zeta(t)$.

Будем предполагать, что в состав преобразователя входит вычислительное устройство для решения интегрального уравнения (4.11). Если подать решение уравнения (4.11) на вход фильтра с передаточной функцией $\Phi(D)$, то на выходе этого фильтра получим сигнал

$$\xi(t) = \Phi(D)\zeta(t) \tag{4.12}$$

Сравнивая выражения (4.8), (4.12) и (4.7) найдем, что

$$Y(D)y(t) = \xi(t) \tag{4.13}$$

В выражении (4.13) $\xi(t)$ — известная функция, а функцию $y(t)$ требуется определить. Функция $Y(D)$ согласно (1.9) представляет собой передаточную функцию гироскопа. Обозначая функцию веса гироскопа через $W(t)$, т. е. полагая

$$pY(p) \doteq W(t) \tag{4.14}$$

перейдем от соотношения (4.13) к интегральному уравнению относительно неизвестной функции $y(t)$

$$\int_0^t W(t-\tau)\,y(\tau)\,dt = \xi(t) \tag{4.15}$$

Решение интегрального уравнения (4.15) и представляет собой сигнал $y(t)$, который должен поступать из преобразователя на вход гироскопа.

Таким образом, входящий в состав следящей системы преобразователь, матричная передаточная функция которого равна $X(D)$, будет представлять собой комплекс из трех последовательно соединенных устройств: вычислительного устройства для решения интегрального уравнения (4.11), фильтра с передаточной функцией $\Phi(D)$, на вход которого подается решение уравнения (4.11), и вычислительного устройства для решения интегрального уравнения (4.15). Этот вариант преобразователя имеет преимущество в том смысле, что при изменении вида входных сигналов $\theta_1^*(t)$ и $\theta_2^*(t)$ он потребует лишь замены оптимального фильтра и видоизменения ядра $\Gamma(t-\tau)$ в уравнении (4.11).

5. Определение передаточной функции Φ (D) оптимального фильтра

Матричная функция веса

$$\Gamma(t) = \begin{Vmatrix} \Gamma_{11}(t) & \Gamma_{12}(t) \\ \Gamma_{21}(t) & \Gamma_{22}(t) \end{Vmatrix} \tag{5.1}$$

оптимального фильтра, рассмотренного в п. 3, должна удовлетворять интегральному уравнению, полученному Винером [3]

$$\int_0^\infty R(\tau_2-\tau_1)\,\Gamma'(\tau_1)\,d\tau_1 = U(\tau_2) \quad \text{при } \tau_2 \geqslant 0 \tag{5.2}$$

и условию

$$\Gamma(t) = 0 \quad \text{при } t < 0 \tag{5.3}$$

Здесь $\Gamma'(t)$ — матрица, транспонированная для матрицы $\Gamma(t)$, а через $R(\tau)$ и $U(\tau)$ обозначены матрицы

$$R(\tau) = \begin{Vmatrix} R_{11}(\tau) & R_{12}(\tau) \\ R_{21}(\tau) & R_{22}(\tau) \end{Vmatrix}, \qquad U(\tau) = \begin{Vmatrix} U_{11}(\tau) & U_{12}(\tau) \\ U_{21}(\tau) & U_{22}(\tau) \end{Vmatrix} \tag{5.4}$$

где $R_{ij}(\tau)$ $(i, j = 1,2)$ — корреляционные функции случайных процессов $\theta_i^*(t)$ и $\theta_j^*(t)$, а $U_{ij}(\tau)$ $(i, j = 1, 2)$ — корреляционные функции случайных процессов $M_i(t)$ и $\theta_j^*(t)$.

Соответствующие $R(\tau)$ и $U(\tau)$ матрицы спектральных плотностей обозначим через $G^{(R)}(\omega)$ и $G^{(U)}(\omega)$

$$G^{(R)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \qquad G^{(U)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{5.5}$$

Дисперсия ошибки воспроизведения оптимальным фильтром сигнала $M_j(t)$ $(j = 1, 2)$ будет определяться выражением [3]

$$\overline{\varepsilon_j^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{M_jM_j}(\omega)\, d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{2} \sum_{\mu=1}^{2} \Phi_{jk}(-i\omega)\, \Phi_{j\mu}(i\omega)\, G_{k\mu}{}^{(R)}(\omega)\, d\omega$$
$$(j = 1, 2) \tag{5.6}$$

где

$$\Phi_{jk}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{jk}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{5.7}$$

а через $G_{M_jM_j}(\omega)$ $(j = 1, 2)$ обозначена спектральная плотность случайного процесса $M_j(t)$.

Матричное интегральное уравнение (5.2) и условие (5.3) эквивалентны системе скалярных интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{0}^{\infty} \Gamma_{jk}(\tau_1) R_{\mu k}(\tau_2 - \tau_1)\, d\tau_1 - U_{\mu j}(\tau_2) = 0 \quad \text{при } \tau_2 \geqslant 0 \qquad (j, \mu = 1, 2) \tag{5.8}$$

и условиям

$$\Gamma_{jk}(t) = 0 \quad \text{при } t < 0 \tag{5.9}$$

Чтобы получить вместо (5.8) уравнения, справедливые для любого значения τ_2 — положительного и отрицательного, — введем функции $f_{j\mu}(\tau_2)$ $(j, \mu = 1, 2)$, определяемые соотношениями

$$f_{j\mu}(\tau_2) = \sum_{k=1}^{2} \int_{0}^{\infty} \Gamma_{jk}(\tau_1) R_{\mu k}(\tau_2 - \tau_1)\, d\tau_1 - U_{\mu j}(\tau_2) \quad \text{при } \tau_2 < 0 \tag{5.10}$$
$$f_{j\mu}(\tau_2) = 0 \quad \text{при } \tau_2 \geqslant 0$$

При помощи (5.8) и (5.10) получим систему интегральных уравнений, справедливую для любых значений τ_2

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{0}^{\infty} \Gamma_{jk}(\tau_1) R_{\mu k}(\tau_2 - \tau_1)\, d\tau_1 - U_{\mu j}(\tau_2) = f_{j\mu}(\tau_2) \qquad (j, \mu = 1, 2) \tag{5.11}$$

Умножая левые и правые части уравнений (5.11) на $e^{-i\omega\tau_2}$ и интегрируя их по τ_2 в пределах от $-\infty$ до ∞, получим

$$\sum_{k=1}^{2} \Phi_{jk}(i\omega)\, G_{\mu k}{}^{(R)}(\omega) - G_{\mu j}{}^{(U)}(\omega) = F_{j\mu}{}^{-}(\omega) \qquad (j, \mu = 1, 2) \tag{5.12}$$

где

$$F_{j\mu}^{-}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{j\mu}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau \tag{5.13}$$

Заметим, что $f_{j\mu}(\tau_2)=0$ при $\tau_2 \geqslant 0$, согласно (5.10); поэтому функция $F_{j\mu}^{-}(\omega)$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости ω.

В матричной форме систему скалярных уравнений (5.12) можно представить так

$$\Phi(i\omega)\,G^{(R)'}(\omega)-G^{(U)'}(\omega)=F^{-}(\omega) \tag{5.14}$$

где $G^{(R)'}(\omega)$ и $G^{(U)'}(\omega)$ — матрицы, транспонированные для матриц $G^{(R)}(\omega)$ и $G^{(U)}(\omega)$, соответственно. Из (5.14) следует, что

$$\Phi(i\omega)=G^{(U)'}(\omega)\,[G^{(R)'}(\omega)]^{-1}+F^{-}(\omega)\,[G^{(R)'}(\omega)]^{-1} \tag{5.15}$$

где при помощи символа $[\ ]^{-1}$ обозначена обратная матрица.

Обозначим через Ω_{jk} алгебраические дополнения элементов $G_{jk}^{(R)}(\omega)$ в определителе матрицы $G^{(R)}(\omega)$. Матрица $\Omega=\|\Omega_{jk}\|$ будет иметь следующий вид:

$$\Omega=\begin{Vmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}G_{22}^{(R)}(\omega) & -G_{21}^{(R)}(\omega)\\ -G_{12}^{(R)}(\omega) & G_{11}^{(R)}(\omega)\end{Vmatrix} \tag{5.16}$$

Через G обозначим определитель матрицы $G^{(R)}(\omega)$

$$G=\det G^{(R)}(\omega) \tag{5.17}$$

При помощи (5.16) и (5.17) получим, что

$$[G^{(R)'}(\omega)]^{-1}=\frac{\Omega}{G} \tag{5.18}$$

Выражение (5.15) теперь принимает вид

$$\Phi(i\omega)=\frac{1}{G}\,[G^{(U)'}(\omega)+F^{-}(\omega)]\,\Omega \tag{5.19}$$

Элементы матрицы $\Phi(i\omega)$ будут

$$\Phi_{jk}(i\omega)=\frac{1}{G}\sum_{\mu=1}^{2}[G_{\mu j}^{(U)}(\omega)+F_{j\mu}^{-}(\omega)]\,\Omega_{\mu k} \qquad (j,\ k=1,\ 2) \tag{5.20}$$

В случае, когда спектральные плотности $G_{ij}^{(R)}(\omega)$ являются дробно-рациональными функциями от ω, можно определитель G матрицы $G^{(R)}(\omega)$ представить в виде

$$G=G^{+}G^{-} \tag{5.21}$$

где G^{+} и G^{-} — комплексные сопряженные функции, причем все нули и полюсы функции G^{+} расположены в верхней полуплоскости, а все нули и полюсы функции G^{-} — в нижней полуплоскости комплексного переменного ω.

При помощи (5.21) приведем выражение (5.20) к виду

$$G^{+}\Phi_{jk}(i\omega)=\frac{1}{G^{-}}\sum_{\mu=1}^{2}G_{\mu j}^{(U)}(\omega)\,\Omega_{\mu k}+\frac{1}{G^{-}}\sum_{\mu=1}^{2}F_{j\mu}^{-}(\omega)\,\Omega_{\mu k} \qquad (j,\ k=1,\ 2) \tag{5.22}$$

Выполняя разложение на элементарные дроби, можно представить первое слагаемое в правой части (5.22) в таком виде

$$\frac{1}{G^-}\sum_{\mu=1}^{2} G_{\mu j}^{(U)}(\omega)\,\Omega_{\mu k} = T_{jk}^{+}(\omega) + T_{jk}^{-}(\omega) \qquad (j,\ k = 1,\ 2) \qquad (5.23)$$

где у функции $T_{jk}^{+}(\omega)$ все полюсы расположены в верхней полуплоскости, а у функции $T_{jk}^{-}(\omega)$ — в нижней полуплоскости комплексного переменного ω. Разложение (5.23) можно эффективно выполнить, так как рассматриваемая функция полностью известна.

Второе слагаемое в правой части (5.22) запишем так

$$\frac{1}{G^-}\sum_{\mu=1}^{2} F_{j\mu}^{-}(\omega)\,\Omega_{\mu k} = \sum_{i}\sum_{l=1}^{q_i}\frac{C_{il}^{(jk)}}{(\omega-\gamma_i)^l} + P_{jk}^{-} \qquad (j,\ k = 1,\ 2) \qquad (5.24)$$

где P_{jk}^{-} — функция, все полюсы которой расположены в нижней полуплоскости комплексного переменного ω, а γ_i — полюсы функций Ω_{1k} и Ω_{2k}, расположенные в верхней полуплоскости комплексного переменного ω; через q_i обозначена кратность этих полюсов. Так как о функциях $F_{j\mu}^{-}(\omega)$ известно лишь, что они не имеют полюсов в верхней полуплоскости ω, а сами эти функции неизвестны, то коэффициенты $C_{il}^{(jk)}$ остаются пока неопределенными.

Так как функции $\Gamma_{jk}(t) = 0$ $(j,\ k = 1,\ 2)$ при $t < 0$, то функции $\Phi_{jk}(i\omega)$ не имеют полюсов в нижней полуплоскости ω и, следовательно, левая часть (5.22) представляет собой функцию, все полюсы которой расположены в верхней полуплоскости ω.

Поэтому искомые передаточные функции $\Phi_{jk}(i\omega)$ $(j,\ k = 1,\ 2)$ в соответствии с (5.22), (5.23) и (5.24) будут

$$\Phi_{jk}(i\omega) = \frac{1}{G^+}\left[T_{jk}^{+}(\omega) + \sum_{i}\sum_{l=1}^{q_i}\frac{C_{il}^{(jk)}}{(\omega-\gamma_i)^l}\right] \qquad (j,\ k = 1,\ 2) \qquad (5.25)$$

Определение неизвестных коэффициентов $C_{il}^{(jk)}$ можно выполнить подстановкой найденных функций $\Phi_{jk}(i\omega)$ в уравнения (5.12) и нахождением для входящих в (5.12) функций всех их полюсов, расположенных в верхней полуплоскости комплексного переменного ω. Тогда придем к соотношениям вида

$$\left[\sum_{k=1}^{2}\Phi_{jk}(i\omega)\,G_{\mu k}^{(R)}(\omega)\right]^{+} = [G_{\mu j}^{(U)}(\omega)]^{+} \qquad (j,\ \mu = 1,\ 2) \qquad (5.26)$$

Здесь символом $[\ ]^{+}$ обозначены функции, образованные аналогично функции $T_{jk}^{+}(\omega)$ в выражении (5.23).

Приравнивая друг другу вычеты по совпадающим между собой особым точкам у функций, расположенных в левой и правой частях (5.26), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_{il}^{(jk)}$, которые отсюда определятся единственным образом.

6. Пример. В качестве примера рассмотрим случай, когда спектральные плотности входного сигнала имеют вид

$$G_{m_i m_i} = \frac{2\varkappa_i \chi_i}{\omega^2 + \varkappa_i^2}, \qquad G_{n_i n_i} = K_i \qquad (i = 1,\ 2) \tag{6.1}$$

Случайные процессы $m_i(t)$ и $n_i(t)$ $(i = 1, 2)$ не коррелированы между собой.

Возмущающий момент относительно оси внутреннего карданова кольца гироскопа примем равным нулю

$$\psi_1(t) \equiv 0 \tag{6.2}$$

Для определения возмущающего момента относительно оси внешнего карданова кольца гироскопа заметим, что при учете сил трения в опорах оси внешнего карданова кольца первое уравнение (1.1) примет вид

$$A\alpha'' - H\beta' = -ly_2(t) - \sigma(\alpha' - \vartheta') \tag{6.3}$$

где ϑ' — угловая скорость колебаний объекта (качки корабля), на котором установлена следящая система. Сравнивая уравнение (6.3) с первым уравнением (1.1), получим, что

$$\psi_2(t) = -\frac{\sigma}{l} D\vartheta \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right) \tag{6.4}$$

где ϑ — угол качки объекта, который полагаем стационарным случайным процессом со спектральной плотностью

$$G_{\vartheta\vartheta} = Q \tag{6.5}$$

Согласно (2.10), (2.11) и (6.2) приведенные сигналы $M_i(t)$ $(i = 1,2)$ будут

$$M_i(t) = m_i(t) + m_i^*(t) \qquad (i = 1,\ 2) \tag{6.6}$$

где

$$m_1^*(t) = -Y_{12}(D)\,\psi_2(t), \qquad m_2^*(t) = -Y_{22}(D)\,\psi_2(t) \tag{6.7}$$

Здесь $Y_{jk}(D)$ — элементы матричной передаточной функции гироскопа $Y(D)$, которая определена выражением (1.9). Согласно (6.7) и (1.9)

$$\begin{aligned} m_1^*(t) &= \frac{-\sigma_1 D}{D^2 + \sigma_1 D + q^2}\,\vartheta(t) \\ m_2^*(t) &= \frac{\sigma_1 H/B}{D^2 + \sigma_1 D + q^2}\,\vartheta(t) \end{aligned} \qquad \left(\sigma_1 = \frac{\sigma}{A},\ q^2 = \frac{H^2}{AB}\right) \tag{6.8}$$

Чтобы получить матрицу спектральных плотностей случайных процессов $m_1^*(t)$ и $m_2^*(t)$, заметим, что так как согласно (6.8)

$$m_1^*(t) = -(B / H)\,Dm_2^*(t) \tag{6.9}$$

то взаимные спектральные плотности будут

$$G_{m_2^* m_1^*} = -G_{m_1^* m_2^*} = -i\omega\,(B / H)\,G_{m_2^* m_2^*} \tag{6.10}$$

Таким образом, матрица спектральных плотностей случайных процессов $m_1^*(t)$ и $m_2^*(t)$ будет иметь вид

$$G^{(m^*)}(\omega) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\sigma_1^2\omega^2 Q}{(\omega^2 - q^2)^2 + \sigma_1^2\omega^2} & \dfrac{i\omega\sigma_1^2 QH / B}{(\omega^2 - q^2)^2 + \sigma_1^2\omega^2} \\ \dfrac{-i\omega\sigma_1^2 QH / B}{(\omega^2 - q^2)^2 + \sigma_1^2\omega^2} & \dfrac{\sigma_1^2 QH^2 / B^2}{(\omega^2 - q^2)^2 + \sigma_1^2\omega^2} \end{matrix} \right\| \tag{6.11}$$

Спектральные плотности случайных процессов $M_1(t)$ и $M_2(t)$ в (5.6) будут

$$G_{M_1M_1} = G_{m_1m_1} + G_{m_1^*m_1^*}, \qquad G_{M_2M_2} = G_{m_2m_2} + G_{m_2^*m_2^*} \tag{6.12}$$

Матрицы спектральных плотностей $G^{(R)}(\omega)$ и $G^{(U)}(\omega)$, которые определены выражениями (5.5) в соответствии с (2.10) и (6.6) будут

$$G^{(R)}(\omega) = \left\| \begin{matrix} G_{m_1m_1} + G_{m_1^*m_1^*} + G_{n_1n_1} & G_{m_1^*m_2^*} \\ G_{m_2^*m_1^*} & G_{m_2m_2} + G_{m_2^*m_2^*} + G_{n_2n_2} \end{matrix} \right\| \tag{6.13}$$

$$G^{(U)}(\omega) = \left\| \begin{matrix} G_{m_1m_1} + G_{m_1^*m_1^*} & G_{m_1^*m_2^*} \\ G_{m_2^*m_1^*} & G_{m_2m_2} + G_{m_2^*m_2^*} \end{matrix} \right\| \tag{6.14}$$

Параметры спектральных плотностей, заданных выражениями (6.1) и (6.2), примем следующими:

$$\chi_1 = 0.01, \quad \varkappa_1 = 0.5 \text{ сек}^{-1}, \quad \chi_2 = 0.02, \quad \varkappa_2 = 0.3 \text{ сек}^{-1}$$
$$K_1 = 16 \cdot 10^{-6}, \quad K_2 = 9 \cdot 10^{-6}, \quad Q = 10^{-8}$$

Параметры гироскопа

$$H / A = 2.5 \text{ сек}^{-1}, \quad H / B = 1000 \text{ сек}^{-1}, \quad l / A = 2.5 \text{ сек}^{-2}$$
$$S / B = 100 \text{ сек}^{-2}, \quad \sigma_1 = \sigma / A = 10 \text{ сек}^{-1}$$

При этих данных частота нутационных колебаний гироскопа $q = 50$ сек$^{-1}$.

При $Q = 0$ в соответствии с (5.25) оптимальная передаточная функция $\Phi(D)$ будет

$$\Phi(D) = \begin{Vmatrix} 24.5\,(D + 25)^{-1} & 0 \\ 0 & 36\,(D + 36.6)^{-1} \end{Vmatrix} \tag{6.15}$$

По найденной здесь матрице $\Phi(D)$ можно при помощи (3.10) найти матричную передаточную функцию $X(D)$ преобразователя. Обозначая

$$\Xi(D) = \Phi(D)\,[E - \Phi(D)]^{-1} \tag{6.16}$$

будем согласно (6.16) иметь

$$\Xi(D) = \begin{Vmatrix} 24.5\,(D + 0{,}5)^{-1} & 0 \\ 0 & 36\,(D + 0.6)^{-1} \end{Vmatrix} \tag{6.17}$$

Матрица $X(D)$ в соответствии с (3.10) будет

$$X(D) = \begin{Vmatrix} \Xi_{11}\,(H / S)\,D & \Xi_{22}\,(B / S)\,D^2 \\ -\,\Xi_{11}(A / l)\,(D + \sigma / A)\,D & \Xi_{22}\,(H / l)\,D \end{Vmatrix} \tag{6.18}$$

где Ξ_{11} и Ξ_{22} — элементы матрицы (6.17).

Для приведенных выше параметров гироскопа матрица $X(D)$ принимает вид

$$X(D) = \begin{Vmatrix} 245D\,(D + 0.5)^{-1} & 0.36D^2\,(D + 0.6)^{-1} \\ -\,9.8D\,(D + 10)\,(D + 0.5)^{-1} & 36D\,(D + 0.6)^{-1} \end{Vmatrix} \tag{6.19}$$

Дисперсия ошибки воспроизведения полезного сигнала, в соответствии с (5.6) будет

$$\overline{\varepsilon_1^2} = 4 \cdot 10^{-4}, \qquad \overline{\varepsilon_2^2} = 4.9 \cdot 10^{-4}$$

Средние квадратические значения ошибок воспроизведения

$$\sqrt{\overline{\varepsilon_1^2}} = 2 \cdot 10^{-2}, \qquad \sqrt{\overline{\varepsilon_2^2}} = 2.21 \cdot 10^{-2}$$

Автор приносит благодарность А. Ю. Ишлинскому за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Поступила 22 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории сложных систем гироскопической стабилизации. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
2. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. Изв. АН СССР, серия математическая, 1941, т. V, № 1.
3. Wiener N. Extrapolation, interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, J. Wiley, New York, 1949.
4. Яглом А. М. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром. Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. V, вып. 3.
5. Розанов Ю. А. Спектральные свойства многомерных стационарных процессов и граничные свойства аналитических матриц. Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. V, вып. 4.