Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

В. А. Троицкий

(Ленинград)

В вариационной постановке рассматриваются задачи оптимизации процессов управления в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями. Излагаются необходимые условия минимума функционала, которые затем используются при решении задач оптимизации режимов работы вибротранспортеров.

1. Постановка задачи. В открытой области R $n+m$-мерного пространства координат $x_1,\ldots,x_n$ и управлений $u_1,\ldots,u_m$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ заданы система n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$g_s^{\pm} = \dot{x}_s - f_s^{\pm}(x_1,\ldots,x_n, u_1,\ldots,u_m, t) = 0 \qquad (1.1)$$

и система r конечных соотношений

$$\psi_k^{\pm} = \psi_k^{\pm}(u_1,\ldots,u_m, t) = 0 \qquad (k = 1,\ldots,r < m) \qquad (1.2)$$

Начальные $x_s(t_0)$ и конечные $x_s(T)$ значения координат $x_s(t)$ связаны p зависимостями

$$\varphi_l = \varphi_l[x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0), t_0, x_1(T),\ldots,x_n(T), T] = 0 \quad (l=1,\ldots,p\leqslant 2n+1) \qquad (1.3)$$

Уравнением

$$\vartheta = \vartheta(x_1,\ldots,x_n, t) = 0 \qquad (1.4)$$

определена поверхность S, делящая область R (и интервал $t_0 \leqslant t \leqslant T$) на две части: $R^-(t_0 \leqslant t < t')$ и $R^+(t' < t \leqslant T)$. В части R^-, для которой выполняется неравенство $\vartheta < 0$, справедливы уравнения (1.1) и (1.2) с нижними значками — у функций f_s и ψ_k, а в части R^+ при $\vartheta > 0$ эти же уравнения с верхними значками $+$.

Непрерывные и имеющие непрерывные производные нужных для дальнейшего порядков функции f_s^+ и f_s^- могут быть различными, и при переходе через поверхность S могут претерпевать разрывы непрерывности первого рода. Аналогичные предположения делаются относительно функций ψ_2^+ и ψ_k^-.

Уравнения (1.1) записываются иногда в виде $\dot{x}_s = f_s^{\pm}$, поэтому их будем называть уравнениями с разрывными правыми частями.

Для уравнений (1.1) и (1.2) поставим следующую задачу оптимизации. Среди удовлетворяющих в областях R^- и R^+ уравнениям (1.1) и (1.2) с соответствующими значками — или $+$ функций $x_s(t)$, $(s = 1,\ldots,n)$

и $u_k(t)$, $(k=1,\ldots,m)$ и величин t_0, t_i' и T, связанных зависимостями (1.3) и (1.4), найти такие, которые сообщают функционалу

$$J = g\,[x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0),\,t_0,\,x_1(T),\ldots,x_n(T),\,T] + \\ + \int_{t_0}^{T} f_0^{\pm}(x_1,\ldots,x_n,\,u_1,\ldots,u_m,\,t)\,dt \tag{1.5}$$

в котором значки $\pm$ имеют описанный выше смысл, минимальное (или максимальное) значение. Здесь и в дальнейшем предполагается, что кривые сравнения пересекают поверхность (1.4).

Моменты t_0, t_i' или T могут быть заданы заранее. Тогда в задаче будут фиксированные моменты начала или конца процесса или разрывов непрерывности правых частей уравнений задачи.

В такой постановке задача становится вариационной проблемой Майера — Больца [1], усложненной наличием управлений $u_k(t)$, производные которых не входят в уравнения задачи, равенств (1.2) и, что весьма существенно, разрывов непрерывности правых частей уравнений движения. К ней приводятся, например, задачи расчета оптимальных режимов работы вибротранспортеров [2], вибропогружателей свай [3] и т. п.

Еще одной характерной особенностью задач оптимизации процессов управления является замкнутость области допустимых изменений управлений, о которой ничего не сказано в формулировке задачи. Задачи такого рода легко сводятся к описанной постановке приемами, рассмотренными в работах [4, 5]. Эти приемы существенно используют равенства вида (1.2).

Наличие ограничений на управления приводит к необходимости изучения разрывных решений задач оптимизации. Поэтому функции, сообщающие минимум функционалу J, будем искать среди непрерывных функций $x_s(t)$ с кусочно-непрерывными производными $\dot{x}_s(t)$ и среди кусочно-непрерывных управлений $u_k(t)$.

В дальнейшем рассматривается задача минимизации функционала J. Случай максимума сводится к ней изменением знака функционала.

Основное внимание в настоящей статье уделено выявлению изменений, которые вносят в решение задачи оптимизации разрывы непрерывности правых частей уравнений движения. Наличие таких разрывов требует проведения специального исследования для выяснения возможности использования в этом случае известных теорем и правил вариационного исчисления.

Такое исследование выполняется приемами, близкими к изложенным в книге Г. А. Блисса [1]. Однако оно оказывается слишком громоздким для того, чтобы быть полностью помещенным в этой работе. Поэтому нам пришлось в приложении к статье ограничиться приведением формулировки применяемых здесь теорем и правил и кратких пояснений, относящихся к их доказательству.

Излагаются только два широко используемых при решении задач оптимизации процессов управления необходимых условия минимума функционала — необходимое условие стационарности и необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума. Легко получаемое [5] из условия Вейерштрасса условие Клебша слабого минимума и требующее громоздкого обоснования необходимое условие Якоби, мало используемые при решении задач оптимизации, в статье не приводятся.

2. Условие стационарности функционала J. В приложении к статье показано, что одно из необходимых условий минимума функционала J — условие его стационарности — суть равенство нулю первой вариации $\triangle I$ функционала I, образуемого по формуле

$$I = \varphi + \sum_{i=1}^{q} \nu_i \vartheta\,[x_1(t_i'),\ldots,x_n(t_i'),\,t_i'] + \int_{t_0}^{T} L\,dt \tag{2.1}$$

в которой

$$\varphi = g + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l \tag{2.2}$$

$$L = f_0^{\pm} + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s g_s^{\pm} - \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k^{\pm} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \dot{x}_s - H \tag{2.3}$$

$$H = H_\lambda + H_\mu = \sum_{s=0}^{n} \lambda_s^{\pm} f_s^{\pm} + f_s^{\pm} \sum_{k=1}^{r} \mu_k^{\pm} \psi_k^{\pm} \; (\lambda_0 = -1) \tag{2.4}$$

Здесь ρ_l, ν_i, $\lambda_s(t)$, $\mu_k(t)$ — подлежащие вычислению неопределенные множители Лагранжа. Здесь и в дальнейшем значки $\pm$ в тех случаях, где это не может вызвать недоразумений, опускаются и символами δ и $\triangle$ обозначаются «вариация в точке» и «вариация точки». Разница между ними подробно пояснялась в статье [4]. Суммирование во втором члене правой части формулы (2.1) ведется по всем $i = 1, \ldots, q$, где q — число моментов $t = t'$ разрыва правых частей уравнений движения.

Во избежание путаницы через $t = t^*$ будем обозначать моменты разрыва непрерывности управлений $u_k(t)$, а через $t = t'$ — моменты разрыва непрерывности правых частей уравнений движения. Кроме моментов $t = t'$ разрыва непрерывности правых частей уравнений движения при непрерывных управлениях, в число q мы будем также включать моменты $t = t'^*$ разрыва непрерывности и правых частей уравнений движения и непрерывности управлений $u_k(t)$.

Остановимся сначала на моментах разрыва непрерывности правых частей уравнений движения. Предположим для простоты, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется только одна точка $t = t'$ разрыва функций f_s и ψ_k, причем для определенности будем считать, что в подинтервале $t_0 \leqslant t < t'$ изображающая точка принадлежит подобласти R^- области R. Тогда, использовав дополнительно равенство (2.3), функционал (2.1) можно будет представить в виде

$$I = \varphi + \nu\vartheta + \int_{t_0}^{t'} \Big(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^- \dot{x}_s^- - H^-\Big) dt + \int_{t'}^{T} \Big(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^+ \dot{x}_s^+ - H^+\Big) dt \tag{2.5}$$

Составив его первую вариацию $\triangle I$, будем иметь

$$\begin{aligned} \triangle I = {} & \triangle\varphi + \nu \triangle \vartheta + (f_0^- - f_0^+)_{t'} \delta t' - (f_0)_{t_0} \delta t_0 + (f_0)_T \delta T + \\ & + \int_{t_0}^{t'} \Big\{ \sum_{s=1}^{n} \Big(\lambda_s^- \delta \dot{x}_s^- - \frac{\partial H^-}{\partial x_s^-} \delta x_s^-\Big) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H^-}{\partial u_k^-} \delta u_k^- \Big\} dt + \\ & + \int_{t'}^{T} \Big\{ \sum_{s=1}^{n} \Big(\lambda_s^+ \delta \dot{x}_s^+ - \frac{\partial H^+}{\partial x_s^+} \delta x_s^+\Big) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H^+}{\partial u_k^+} \delta u_k^+ \Big\} dt \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь введены обозначения

$$\triangle \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} \delta t_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \delta T + \sum_{s=1}^{n} \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s(t_0)} \triangle x_s(t_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_s(T)} \triangle x_s(T) \Big) \tag{2.7}$$

$$\triangle \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial t'} \delta t' + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_s(t')} \triangle x_s(t') \tag{2.8}$$

и использованы равенства

$$\dot{x}_s^{\pm} = \frac{\partial H^{\pm}}{\partial \lambda_s^{\pm}} \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\partial H^{\pm}}{\partial \mu_k^{\pm}} = 0 \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{2.9}$$

эквивалентные уравнениям (1.1) и (1.2), и зависимости (1.3) и (1.4). В правой части соотношения (2.6) символ $(f_0^-)t'$, например, отмечает, что значение функции f_0^- следует вычислять в момент $t = t'$.

Проинтегрировав по частям первые суммы подинтегральных выражений в равенстве (2.6), получим зависимости

$$\begin{gathered}\int\limits_{t_0}^{t'} \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^- \delta \dot{x}_s^- dt = \sum_{s=1}^{n} \left\{ \lambda_s^-(t') \delta x_s^-(t') - \lambda_s^-(t_0) \delta x_s^-(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t'} \dot{\lambda}_s^- \delta x_s^- dt \right\} \\ \int\limits_{t'}^{T} \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^+ \delta \dot{x}_s^+ dt = \sum_{s=1}^{n} \left\{ \lambda_s^+(T) \delta x_s^+(T) - \lambda_s^+(t') \delta x_s^+(t') - \int\limits_{t'}^{T} \dot{\lambda}_s^+ \delta x_s^+ dt \right\}\end{gathered} \tag{2.10}$$

Воспользовавшись ими и формулами (2.7), (2.8) и

$$\triangle x_s(t) = \delta x_s(t) + \dot{x}_s(t) \delta t \tag{2.11}$$

где под t следует понимать его значения t', t_0, T, можно преобразовать первую вариацию (2.6) функционала I к следующему виду:

$$\begin{aligned}\triangle I = &\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(t_0) \dot{x}_s(t_0) - (f_0)_{t_0} \right] \delta t_0 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial T} - \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(T) \dot{x}_s(T) + (f_0)_T \right] \delta T + \\ &+ \left\{ \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial t'} + (f_0^-)_{t'} - (f_0^+)_{t'} - \sum_{s=1}^{n} [\lambda_s^-(t') \dot{x}_s^-(t') - \lambda_s^+(t') \dot{x}_s^+(t')] \right\} \delta t' + \\ &+ \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_s(t_0)} - \lambda_s(t_0) \right] \triangle x_s(t_0) + \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial T} + \lambda_s(T) \right] \triangle x_s(T) + \\ &+ \sum_{s=1}^{n} \left[\lambda_s^-(t') - \lambda_s^+(t') + \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial x_s(t')} \right] \triangle x_s(t') - \\ &- \int\limits_{t_0}^{t'} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \left(\dot{\lambda}_s^- + \frac{\partial H^-}{\partial x_s^-} \right) \delta x_s^- + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H^-}{\partial u_k^-} \delta u_k^- \right\} dt - \\ &- \int\limits_{t'}^{T} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \left(\dot{\lambda}_s^+ + \frac{\partial H^+}{\partial x_s^+} \right) \delta x_s^+ + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H^+}{\partial u_k^+} \delta u_k^+ \right\} dt\end{aligned} \tag{2.12}$$

Это выражение должно быть равно нулю. Чтобы выполнить такое требование, нужно поступить следующим образом.

Выбираем множители $\lambda_s(t)$ так, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям

$$\dot{\lambda}_s^{\pm} + \frac{\partial H^{\pm}}{\partial x_s^{\pm}} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.13}$$

Коэффициенты при $2(m - r)$ независимых вариациях $\delta u_k^{\pm}$ должны быть равны нулю. Остальные $2r$ коэффициентов при зависимых вариациях $\delta u_k^{\pm}$ обращаем в нуль за счет выбора $2r$ множителей $\mu_k^{\pm}$. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial H^{\pm}}{\partial u_k^{\pm}}=0 \qquad (k=1,\ldots,m) \tag{2.14}$$

Коэффициенты при $2n+2-p$ независимых вариациях совокупности δt_0, $\triangle x_s(t_0)$, δT, $\triangle x_s(T)$ должны быть равны нулю. Выбрав множители ρ_l так, чтобы обратить в нуль коэффициенты при остальных p вариациях, получим равенства

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}+\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(t_0)\dot{x}_s(t_0)-(f_0)_{t_0}=0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial T}-\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(T)\dot{x}_s(T)+(f_0)_T=0 \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(t_0)}-\lambda_s(t_0)=0 \quad (s=1,\ldots,n), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_s(T)}+\lambda_s(T)=0 \quad (s=1,\ldots,n) \tag{2.16}$$

Наконец, совокупность вариаций $\delta t'$, $\triangle x_s(t')$ связана одним соотношением. Поэтому, коэффициенты при n независимых из них равны нулю, а множитель ν можно выбрать так, чтобы обратить в нуль последний коэффициент при зависимой вариации. Тогда найдем

$$\lambda_s^-(t')-\lambda_s^+(t')+\nu\frac{\partial\vartheta}{\partial x_s(t')}=0 \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{2.17}$$

$$\nu\frac{\partial\vartheta}{\partial t'}+(f_0^-)_{t'}-(f_0^+)_{t'}-\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s^-(t')\dot{x}_s^-(t')-\lambda_s^+(t')\dot{x}_s^+(t')]=0 \tag{2.18}$$

Эта система равенств заменяет обычные условия Эрдманна — Вейерштрасса.

Система соотношений (2.13) — (2.18) составляет условие стационарности функционала J. Для решения задачи оптимизации она должна быть дополнена уравнениями (2.9), зависимостями (1.3) и (1.4) и условиями непрерывности координат

$$x_s^-(t')=x_s^+(t') \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{2.19}$$

Тогда при сделанных выше предположениях относительно числа точек разрыва непрерывности правых частей $4n+2m+2r$ функций $x_s^{\pm}(t)$, $\lambda_s^{\pm}(t)$, $u_k^{\pm}(t)$ и $\mu_k^{\pm}(t)$ определяются $4n+2m+2r$ уравнениями (2.9), (2.13) и (2.14). Интегрирование $4n$ дифференциальных уравнений первого порядка [уравнения (2.13) и первая группа уравнений (2.9)] вводит $4n$ произвольных постоянных. Для вычисления их вместе с $p+1$ множителями ρ_l и ν и величинами t_0, t' и T служат $4n+p+4$ условий (2.15) — (2.19), (1.3) и (1.4).

Равенства (2.15) после подстановки в них значений $\lambda_s(t_0)$ и $\lambda_s(T)$ из соотношений (2.16) можно переписать в форме

$$\frac{d\varphi}{dt_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(t_0)}\dot{x}_s(t_0)=(f_0)_{t_0} \tag{2.20}$$

$$\frac{d\varphi}{dT}=\frac{\partial\varphi}{\partial T}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(T)}\dot{x}_s(T)=-(f_0)_T \tag{2.21}$$

Если подставить в них производные $\dot{x}$ из уравнений (1.1) и воспользоваться обозначениями (2.4) при учете тождества $H_\mu \equiv 0$, то получатся формулы

$$\partial\varphi/\partial t_0 = -(H)_{t_0}, \qquad \partial\varphi/\partial T = (H)_T \tag{2.22}$$

Аналогичным преобразованиям можно подвергнуть и условие (2.18), после чего придем к зависимости

$$\nu \frac{\partial\vartheta}{\partial t'} + (H^+)_{t'} - (H^-)_{t'} = 0 \tag{2.23}$$

Рассмотрим теперь разрывы непрерывности управлений $u_k(t)$. Будем снова считать, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется только одна точка $t = t^*$ разрыва непрерывности управлений. Правые части уравнений движения будем сначала считать непрерывными. Тогда можно использовать все результаты, установленные в работах [4,5] для задач оптимизации процессов управления для уравнений с непрерывными правыми частями. Сравнением их с приведенными здесь соотношениями убеждаемся, что уравнения (2.9), (2.13) и (2.14) сохраняют свою силу, так же как условия (2.15), (2.16), (2.19) и (1.3). Отпадет уравнение (1.4), а условия Эрдманна — Вейерштрасса примут следующий вид:

$$\lambda_s^-(t^*) - \lambda_s^+(t^*) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad (H^-)_{t^*} - (H^+)_{t^*} = 0 \tag{2.24}$$

В этих зависимостях значками $-$ и $+$ отмечается принадлежность соответствующих функций интервалам $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ и $t^* \leqslant t \leqslant T$.

Если предположить, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется только одна точка $t = t'^*$ разрыва непрерывности правых частей уравнений движения, в которой рвутся и управления $u_k(t)$, то повторение соответствующих выкладок приводит к уравнениям и условиям, совпадающим с установленными выше при рассмотрении точки $t = t'$ разрыва только правых частей уравнений движения.

Подсчет числа функций и постоянных, подлежащих определению при решении задачи, и числа уравнений и условий, получающихся разворачиванием условия стационарности, выполняется так же, как это делалось выше. В результате такого подсчета оказывается, что в двух последних случаях уравнений и условий будет ровно столько, сколько нужно для построения решения, удовлетворяющего условию стационарности функционала J.

Более сложные случаи, когда кривая, сообщающая минимум функционалу J, имеет несколько угловых точек в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, здесь не рассматриваются. Такое предположение не вносит изменений в приведенные выше соотношения, но сильно усложняет процесс их установления.

Сопоставив равенства (2.24), (2.17) и (2.18), приходим к заключению, что точки $t = t'$ и $t = t'^*$, в которых имеют место разрывы непрерывности правых частей уравнений движения, существенным образом отличаются от момента $t = t^*$ разрыва непрерывности управлений $u_k(t)$. Действительно, если при $t = t^*$ лагранжевы множители $\lambda_s(t)$ и функция H не претерпевают разрывов непрерывности, то при $t = t'$ или $t = t'^*$ эти функции могут иметь разрывы непрерывности [7].

Следует отметить еще одно важное обстоятельство. Если уравнение поверхности S не зависит явно от времени t, то функция H, как показывает зависимость (2.23), будет непрерывной, хотя λ_s при этом могут оказаться разрывными.

Если, кроме этого, не зависят от времени функции f_s и ψ_k, то приведенная выше система уравнений допускает первый интеграл

$$H = H_\lambda = h = \mathrm{const} \tag{2.25}$$

причем вместо условий (2.15) в этом случае будем иметь

$$\partial\varphi / \partial t_0 = -h, \qquad \partial\varphi / \partial T = h \tag{2.26}$$

на что указывают соотношения (2.22).

3. Необходимое условие Вейерштрасса. После того как решение, удовлетворяющее условию стационарности, построено, нужно убедиться, что для этого решения функционал J имеет минимум. Учитывая разрывность решения, для проверки минимума следует использовать условие Вейерштрасса сильного минимума функционала J.

Формулировка необходимого условия Вейерштрасса дана в приложении к статье, где указано, что оно строится при помощи функции E Вейерштрасса, имеющей в рассматриваемых здесь задачах следующий вид:

$$\begin{aligned} E = {} & L(x_1, \ldots, x_n, \dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_n, U_1, \ldots, U_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) - \\ & - L(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, u_1, \ldots, u_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) - \\ & - \sum_{s=1}^{n} (\dot{X} - \dot{x}_s) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \end{aligned} \tag{3.1}$$

где x_s и u_k — координаты и управления, сообщающие минимум функционалу J, а под X_s и U_k понимаются любые допустимые функции, удовлетворяющие уравнениям (2.9). Функция L может быть разрывной, но в точке разрыва $t = t'$ она имеет левый и правый пределы.

Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала J формулируется в виде неравенства

$$E \geqslant 0 \tag{3.2}$$

причем в точках разрыва непрерывности правых частей уравнений движения оно должно проверяться дважды — для левого и правого пределов функции E в точке разрыва. После подстановки L из выражения (2.3) в равенство (3.1) придем к следующей формуле:

$$\begin{aligned} E = {} & H(x_1 \ldots, x_n, U_1 \ldots, U_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) - \\ & - H(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

причем вследствие того, что $H_\mu \equiv 0$, условие (3.2) может быть заменено неравенством

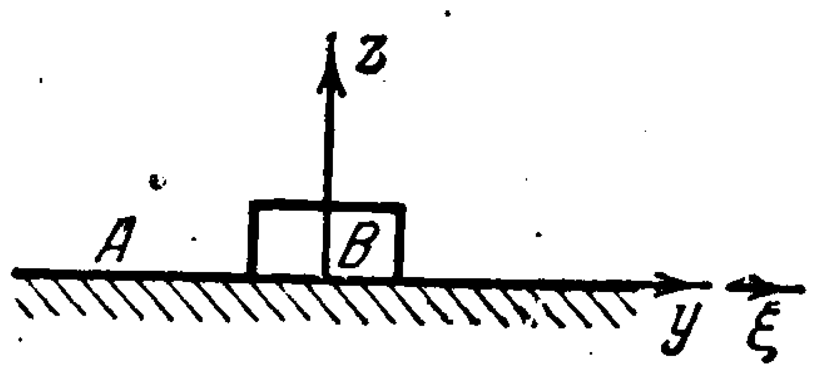
$$\begin{aligned} & H_\lambda(x_1, \ldots, x_n, U_1, \ldots, U_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, t) \leqslant \\ & \leqslant H_\lambda(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

которое в точках $t = t'$ и $t = t'^*$ проверяется для левого и правого пределов функции H_λ.

Это усложнение задачи отпадает в тех случаях, когда функция ϑ в уравнении (1.4) поверхности S разрывов правых частей уравнений движения не содержит явно времени t и H_χ является непрерывной функцией во всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. В книге [7] имеется указание, из которого следует, что решение задачи оптимизации для уравнений с разрывными правыми частями может быть построено при помощи приемов, вытекающих из принципа максимума Л. С. Понтрягина.

4. Пример. Простейшая задача оптимизации процесса вибротранспортировки. На горизонтальной шероховатой плоскости A находится материальная частица B (фиг. 1). Плоскость совершает горизонтальное периодическое движение заданного периода T_0. При некоторых движениях такого типа частица B перемещается по плоскости A. Требуется построить периодическое движение плоскости A, при котором средняя скорость перемещения частицы B по плоскости за период T_0 будет наибольшей по сравнению со всеми другими движениями плоскости того же периода T_0.

Введем связанные с плоскостью A оси y и z, показанные на фиг. 1, и обозначим через $\xi(t)$ перемещение плоскости. Тогда уравнение движения частицы B запишется в виде [2]



Фиг. 1

$$\ddot{y} = -\ddot{\xi} - fg\,\mathrm{sign}\,\dot{y} \qquad \text{или} \qquad g_1^{\pm} = \dot{x} + u \pm fg = 0 \tag{4.1}$$

Здесь

$$x = \dot{y}, \qquad \ddot{\xi} = u \tag{4.2}$$

Уравнение «поверхности» разрыва правой части доставится равенством

$$\vartheta = x = 0 \tag{4.3}$$

Будем считать далее $u(t)$ ограниченной по модулю функцией

$$|u(t)| \leqslant U^* \tag{4.4}$$

Если ускорение $u(t)$ не превосходит по модулю величину fg, так что

$$|u(t)| \leqslant fg \tag{4.5}$$

то точка B может двигаться по плоскости с длительными остановками. Для таких остановок будет справедливо уравнение

$$g_1^{\bullet} = x = 0 \tag{4.6}$$

Для того чтобы различать эти два возможных случая, будем поступать следующим образом. Когда выполняются уравнение (4.1) и неравенства (4.4), будем говорить, что частица B находится в зоне движения, а при выполнении уравнения (4.6) и неравенства (4.5) — в зоне покоя. Будет накладываться естественное требование $U^* > fg$.

Разыскиваются периодические движения частицы B. Тогда начальная и конечная скорости ее движения должны быть связаны равенством

$$\varphi_1 = x(T) - x(t_0) = 0 \tag{4.7}$$

Кроме того, будем иметь соотношения

$$\varphi_2 = t_0 = 0, \quad \varphi_3 = T - T_0 = 0 \tag{4.8}$$

и зависимость

$$\varphi_4 = \int_0^{T_0} u(t)dt = 0 \tag{4.9}$$

отражающие фиксированность абсцисс начала и конца периода и периодичность функции $u(t)$.

Для перехода к открытым областям изменения «управлений» в обеих зонах составляем зависимости

$$\psi^{\pm} = u - \chi(v) = 0 \tag{4.10}$$

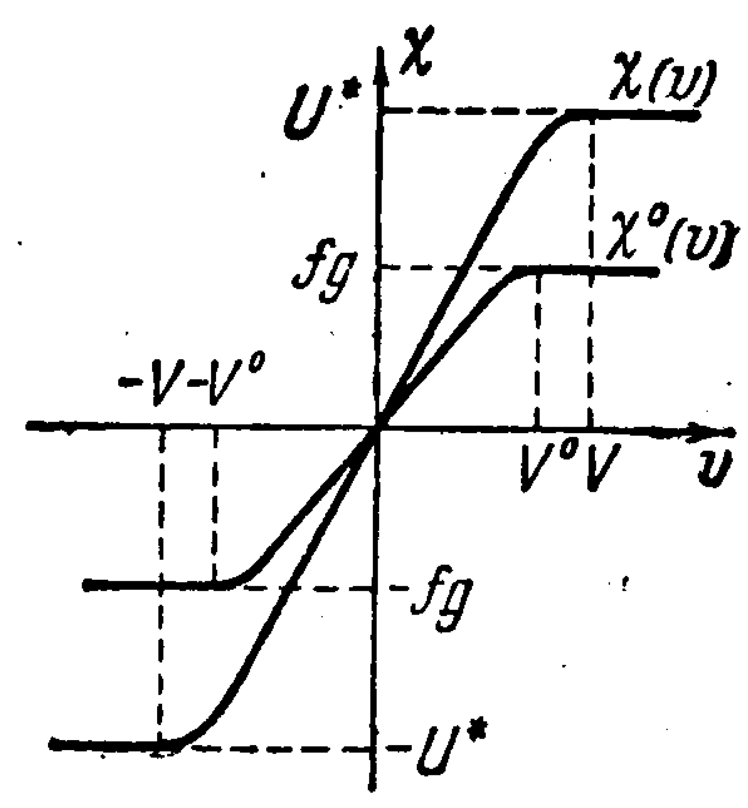
$$\psi^{\bullet} = u - \chi^{\circ}(v) = 0 \tag{4.11}$$

Графики функций $\chi(v)$ и $\chi^{\circ}(v)$ показаны на фиг. 2. Теперь задача оптимизации процесса вибротранспортировки может быть сформулирована следующим образом.

Среди функций $x(t)$ и $u(t)$, удовлетворяющих в зоне движения уравнениям (4.1) и (4.10), а в зоне покоя уравнениям (4.6) и (4.11) и условиям (4.3), (4.7) — (4.9), найти такие, которые собщают функционалу

$$J = \int_0^{T_0} x(t)\,dt \qquad (4.12)$$

максимальное значение.



Фиг. 2

Здесь вместо средней скорости транспортировки частицы за период $V = J/T_0$ рассматривается перемещение ее за тот же период T_0; ставится задача на максимум и в условии Вейерштрасса следует изменить знак неравенства.

Задача оптимизации в описанной только что постановке сложнее изученной в предыдущих разделах. В ней, кроме разрывов правой части уравнения движения, имеется еще переход от зоны движения к зоне покоя, т. е. от дифференциального уравнения (4.1) к алгебраическому соотношению (4.6). Задачи такого типа исследуются приемами, аналогичными описанным выше. Изложение соответствующих обобщений привело бы к значительному увеличению объема настоящей статьи. В связи с этим оно здесь не приводится, но основные результаты такого анализа, выписанные для рассматриваемой простой задачи, используются в дальнейшем.

Составляем нужные для решения задачи функции H и φ. В зоне движения будем иметь [6]

$$H = -x(t) - \lambda(t)[u \pm fg] + \rho u + \mu(t)[u - \chi(v)] \qquad (4.13)$$

тогда как в зоне покоя функция H дается формулой

$$H^{\circ} = \rho u + \mu^{\circ}(t)[u - \chi^{\circ}(v)] \qquad (4.14)$$

Функция H непрерывна во всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Далее имеем

$$\varphi = \rho_1[x(T) - x(t_0)] + \rho_2 t_0 + \rho_3(T - T_0) \qquad (4.15)$$

В соответствии с полученными в разделе 2 соотношениями составляются следующие зависимости:

$$\dot{\lambda}^{\pm} = 1, \ -\lambda(t) + \rho + \mu(t) = 0, \ -\mu(t)\chi'(v) = 0 \qquad (4.16)$$

справедливые в зоне движения, и равенства

$$\rho + \mu(t) = 0, \quad -\mu(t)\chi^{\circ}(v) = 0 \qquad (4.17)$$

которые должны удовлетворяться в зоне покоя. Кроме этих уравнений множители $\lambda(t)$, ρ_1, ρ_2 и ρ_3 связаны условиями

$$\lambda(0) = \lambda(T_0) = -\rho_1, \quad -\rho_2 = \rho_3 = h \qquad (4.18)$$

где h — постоянная в соотношении $H = h$, дающем первый интеграл уравнений задачи. В зоне покоя $\lambda(t)$ остается неопределенным.

Условие Вейерштрасса для обеих зон может быть записано в форме неравенства

$$\mu(t)[U - u] \leqslant 0 \qquad (4.19)$$

причем под $\mu(t)$ понимаются функции, определяемые вторым из равенств (4.16) или первой из формул (4.17).

Два первых равенства (4.16) показывают, что в зоне движения $\mu(t)$ будет линейной функцией времени и может обратиться в нуль только в конечном числе точек интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Поэтому $\chi'(v) = 0$ и, следовательно,

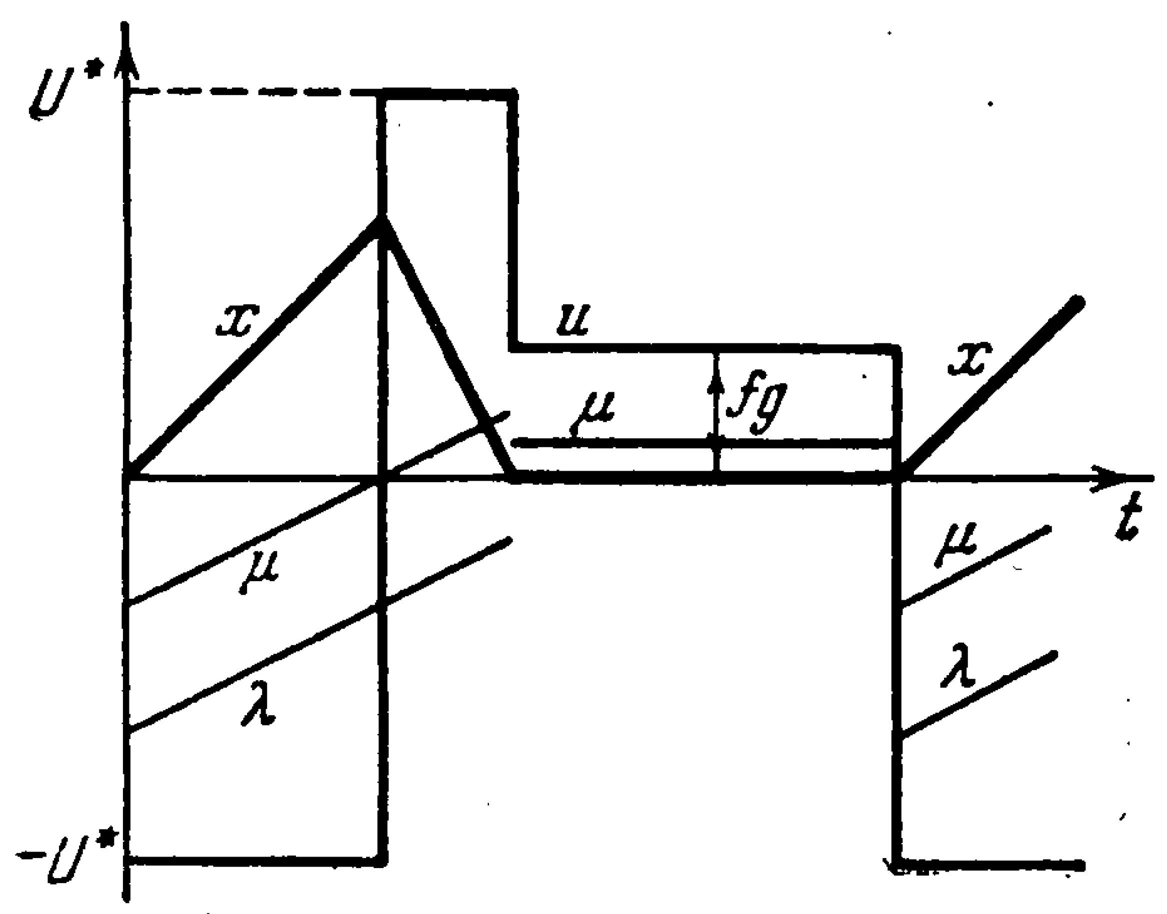
$$u = +U^* \text{ или } u = -U^* \qquad (4.20)$$

всюду, за исключением точек $t = t^*$, для которых $\mu(t^*) = 0$. Аналогично этому находим, что при $\rho \neq 0$ в зоне покоя имеют место равенства

$$u = + fg, \text{ или } u = - fg \tag{4.21}$$

Эти результаты сильно упрощают решение задачи. Однако и при учете их приходится рассматривать весьма большое число различных решений, подозреваемых на оптимальность. Процесс их построения может служить хорошей иллюстрацией описанных выше приемов исследования, но большинство их или не удовлетворяет условию Вейерштрасса, или для них не выполняются условия периодичности (4.7) или (4.9). На описании этих решений мы здесь не останавливаемся и рассмотрим лишь то решение, которое дает оптимум процесса вибротранспортировки.

Оптимальное периодическое решение рассматриваемой здесь простейшей задачи вибротранспортировки соответствует периодической функции $u(t)$, график которой приведен на фиг. 3, где для определенности начало отсчета времени $t = 0$ совмещено с моментом разрыва функции $u(t)$ от значения $+ fg$ к величине $-U^*$. Оно легко строится при помощи уравнений (4.1) и (4.6) и условий периодичности (4.7) и (4.9) и имеет следующий вид:



Фиг. 3

$$x(t) = (U^* - fg)t \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1)$$

$$x(t) = (U^* + fg)t + 2U^*t_1 \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

$$x(t) = 0 \qquad (t_2 \leqslant t \leqslant T) \tag{4.22}$$

причем

$$t_1 = \frac{U^* + fg}{U^*}\frac{T_0}{4}, \qquad t_2 = \frac{T_0}{2} \tag{4.23}$$

Переходим к построению лагранжевых множителей $\lambda(t)$, $\mu(t)$ и ρ. Для этого составляем выражение

$$\lambda(t) = -\rho_1 + t = \lambda^+(0) + t \tag{4.24}$$

удовлетворяющее первому уравнению (4.16) и первому условию (4.18). Второе равенство (4.18) дает $\lambda(T_0) = \rho_1$ и определяет разрыв непрерывности множителя $\lambda(t)$:

$$\lambda^-(t_2) = \lambda^+(0) + \frac{T}{2} \tag{4.25}$$

В момент $t = t_1$ имеет место равенство $\mu(t_1) = 0$, на основании которого будем иметь

$$\rho - \lambda^+(0) - \frac{U^* + fg}{U^*}\frac{T_0}{4} = 0 \tag{4.26}$$

Эти зависимости справедливы в зоне движения.

При переходе из зоны движения в зону покоя условие непрерывности функции H дает

$$\lambda^-(t_2)\,[U^* + fg] = \rho\,[U^* - fg] \tag{4.27}$$

Уравнения (4.25) — (4.27) определяют величины ρ, $\lambda^+(0)$ и $\lambda^-(t_2)$. Решив их, будем иметь следующие значения:

$$\rho = -\frac{U^{*2} - (fg)^2}{fgU^*}\frac{T_0}{8}$$
$$\lambda^+(0) = -\frac{(U^* + fg)^2}{fgU^*}\frac{T_0}{8}, \qquad \lambda^-(t_2) = -\frac{(U^* - fg)^2}{fgU^*}\frac{T_0}{8} \tag{4.28}$$

Теперь при помощи соотношений (4.16), (4.17) и (4.24) легко находится множитель $\mu(t)$, равный

$$\mu(t) = t - \frac{U^* + fg}{U^*}\frac{T_0}{4} \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_2)$$
$$\mu(t) = -\rho = \frac{U^{*2} - (fg)^2}{fgU^*}\frac{T_0}{8} \qquad (t_2 \leqslant t \leqslant T) \tag{4.29}$$

Графики функций $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ показаны на фиг. 3.

В подинтервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ имеем $\mu(t) \leqslant 0$ и $u(t) = -U^*$. Поэтому условие Вейерштрасса выполнятся при любых допустимых $u(t)$, удовлетворяющих неравенству $|u| \leqslant U^*$. В следующем подинтервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ будем иметь $\mu(t) \geqslant 0$ и $u = +U^*$, так что условие Вейерштрасса опять выполняется для всех допустимых управлений. Наконец, в последнем подинтервале $t_2 \leqslant t \leqslant T$ имеют место $\mu(t) > 0$ и $u = +fg$. Следовательно, условие Вейерштрасса выполнено во всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

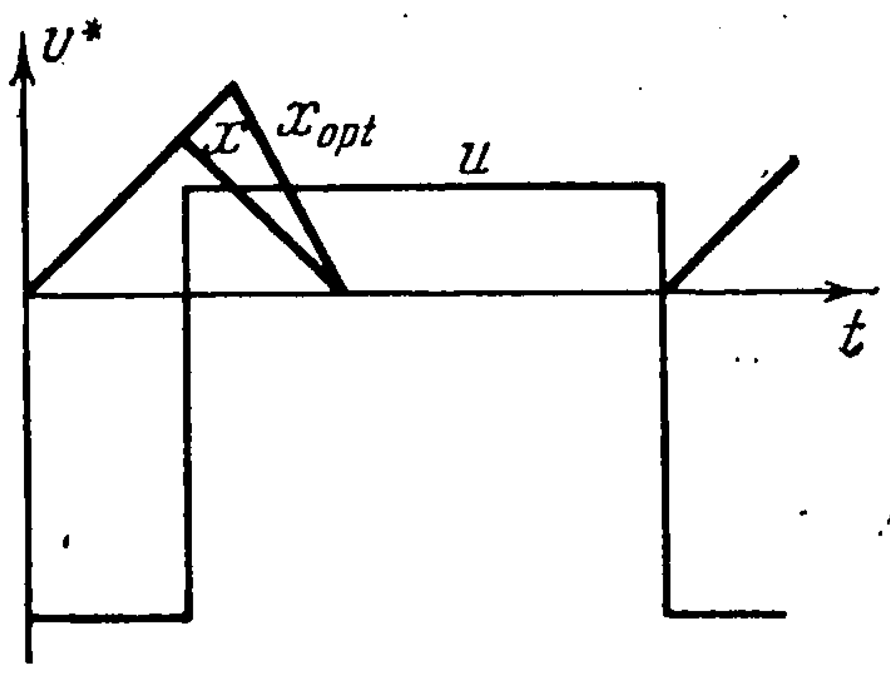
При поверхностном рассмотрении изученной выше задачи оптимизации процесса вибротранспортировки может показаться, что оптимальный режим движения частицы по плоскости имеет место при периодическом перемещении плоскости $\xi(t)$, график ускорения в котором имеет вид, показанный на фиг. 4. Поэтому мы в заключение статьи приведем формулы перемещения частицы B за период T_0 в найденном выше оптимальном режиме движения плоскости A и в только что указанном. Эти формулы имеют следующий вид:

$$J_{\text{opt}} = \frac{U^{*2} - (fg)^2}{U^*} \frac{T_0^2}{16} \tag{4.30}$$

$$J = \frac{U^* - fg}{U^* + fg} fg \frac{T_0^2}{4} \tag{4.31}$$

Первая соответствует оптимуму. Для оценки вычислим разность между этими перемещениями:

$$J_{\text{opt}} - J = \frac{T_0^2}{16} \frac{(U^* - fg)^3}{(U^* + fg)\, U^*} > 0 \quad \text{при } U^* > fg$$



Фиг. 4

Найденный результат иллюстрируется фиг. 4, на которой нанесены графики изменения скоростей в обоих рассмотренных режимах.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность А. И. Лурье за внимание и интерес к данной работе и Г. Ю. Джанелидзе и И. И. Блехману за предоставленную ими возможность совместного обсуждения ее результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В $n+m$-мерном пространстве координат $x_1, \ldots, x_n$ и управлений $u_1, \ldots, u_m$ рассмотрим нормальную кривую C, удовлетворяющую уравнениям (1.1) и (1.2) и условиям (1.3) и (1.4) и сообщающую минимум функционалу J. На этой кривой в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ управления $u_k(t)$ или правые части уравнений могут иметь конечное число точек разрыва непрерывности. Такие точки для сокращения мы будем называть угловыми точками кривой C.

Предположим, что матрица

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial u_\beta} \right\|$$

у которого k, β-м элементом будет производная $\partial \psi_k / \partial u_\beta$, на кривой C имеет ранг r, равный числу уравнений (1.2). Тогда, если провести рассуждения и выкладки, отличающиеся от описанных в книге Г. А Блисса [1] лишь необходимостью дополнительного построения функций $u_k(b_1, \ldots, b_p, t)$, удовлетворяющих уравнениям (1.2), то можно доказать следующую лемму о включении.

Если допустимая кривая C удовлетворяет уравнениям (1.1) и (1.2) и если p допустимых совокупностей постоянных и функций

$$\tau_{0\alpha},\ \tau_{t'\alpha},\ \tau_{T\alpha},\ \xi_{s\alpha}(t),\ \zeta(t) \tag{A.1}$$

связаны уравнениями вариаций вдоль C

$$\dot{\xi}_{s\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial x_\gamma} \xi_{\gamma\alpha} - \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial u_\beta} \zeta_{\beta\alpha} = 0, \qquad \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial \psi_k}{\partial u_\beta} \zeta_{\beta\alpha} = 0 \tag{A.2}$$

в которых производные $\partial f_s / \partial x_\gamma$, $\partial f_s / \partial u_\beta$, $\partial \psi_k / \partial u_\beta$ вычисляются на C, то существует допустимое p параметрическое семейство

$$\begin{aligned} &x_s(b_1, \ldots, b_p, t) \quad (s = 1, \ldots, n), \\ &u_k(b_1, \ldots, b_p, t) \quad (k = 1, \ldots, m), \end{aligned} \qquad t_0(b_1, \ldots, b_p) \leqslant t \leqslant T(b_1, \ldots, b_p) \tag{A.3}$$

содержащее C при $b_1 = \ldots = b_p = 0$ и состоящее из кривых, удовлетворяющих уравнениям (1.1) и (1.2). Это семейство таково, что для всякого $\alpha = 1, \ldots, p$ величины (А.1) являются вариациями его вдоль C по b_α:

$$\tau_{0\alpha} = \left(\frac{\partial t_0}{\partial b_\alpha}\right)_0, \quad \tau_{t'\alpha} = \left(\frac{\partial t'}{\partial b_\alpha}\right)_0, \quad \tau_{T\alpha} = \left(\frac{\partial T}{\partial b_\alpha}\right)_0$$
$$\xi_{s\alpha} = \left(\frac{\partial x_s}{\partial b_\alpha}\right)_0, \quad \zeta_{k\alpha} = \left(\frac{\partial u_k}{\partial b_\alpha}\right)_0 \tag{A.4}$$

где значком 0 отмечено то, что производные вычисляются при $b_1 = \ldots = b_p = 0$.

Будем считать, что нами построено $p + q + 1$ параметрическое семейство кривых (А.3); подставим функции (А. 3) в функционал J, после чего будем иметь

$$J = J(b_1, \ldots, b_{p+q+1}) \tag{A.5}$$

Составим полный дифференциал этой функции:

$$dJ = f_0 \delta t \,|_{t_0}^{T} + \sum_{i=1}^{q} [f_0^-(t_i') - f_0^+(t_i')]\, \delta t_i' + dg +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \left[\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_s}\delta x_s + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_s}\delta \dot{x}_s\right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_0}{\partial u_k}\delta u_k\right] dt \tag{A.6}$$

Здесь

$$\delta t_0 = \sum_{\alpha=1}^{p+q+1} \frac{\partial t_0}{\partial b_\alpha} db_\alpha, \quad \delta t_i' = \sum_{\alpha=1}^{p+q+1} \frac{\partial t_i'}{\partial b_\alpha} db_\alpha, \quad \delta T = \sum_{\alpha=1}^{p+q+1} \frac{\partial T}{\partial b_\alpha} db_\alpha$$
$$\delta x_s = \sum_{\alpha=1}^{p+q+1} \frac{\partial x_s}{\partial b_\alpha} db_\alpha, \quad \delta u_k = \sum_{\alpha=1}^{p+q+1} \frac{\partial u_k}{\partial b_\alpha} db_\alpha \tag{A.7}$$

Для кривой C этот дифференциал принимает вид:

$$dJ = \sum_{\alpha=1}^{p+q+1} J_1(\xi_\alpha, \zeta_\alpha, \tau_\alpha)\, db_\alpha \tag{A.8}$$

Здесь

$$J_1(\xi_\alpha, \zeta_\alpha, \tau_\alpha) = J_{1\alpha} = f_0 \tau_\alpha \,|_{t_0}^{T} + \sum_{i=1}^{q} (f_0^- - f_0^+)_{t_i'} \tau_{t_i\alpha}' + G_{1\alpha} +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \left[\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_s}\xi_{s\alpha} + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_s}\dot{\xi}_{s\alpha}\right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_0}{\partial u_k}\zeta_{k\alpha}\right] dt \tag{A.9}$$

и $G_{1\alpha}$ — линейная форма

$$G_{1\alpha} = G_1[\xi_{1\alpha}(t_0), \ldots, \xi_{n\alpha}(t_0), \tau_{0\alpha}, \xi_{1\alpha}(T), \ldots, \xi_{n\alpha}(T), \tau_{T\alpha}] =$$
$$= \frac{dg}{dt_0}\tau_{0\alpha} + \frac{dg}{dT}\tau_{T\alpha} + \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_s(t_0)}\xi_{s\alpha}(t_0) + \frac{\partial g}{\partial x_s(T)}\xi_{s\alpha}(T)\right] \tag{A.10}$$

Функцию $J_{1\alpha}$ называют [1] первой вариацией функционала J по b_α.

Введем в рассмотрение сумму

$$L(x, \dot{x}, u, \lambda, \mu, t) = f_0 + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s g_s - \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k \tag{A.11}$$

в которой $\lambda_s(t)$ и $\mu_k(t)$ — подлежащие определению множителя Лагранжа, и заметим, что если $\xi_{s\alpha}(t)$ и $\zeta_{k\alpha}(t)$ удовлетворяют уравнениям вариаций (A.2), то мы сможем написать

$$J_{1\alpha} = f_0\tau_\alpha \Big|_{t_0}^{T} + \sum_{i=1}^{q} (f_0^- - f_0^+)_{t_i'}\tau_{t_i'\alpha} + G_{1\alpha} +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \left[\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_s} \xi_{s\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \dot{\xi}_{s\alpha} \right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial u_k} \zeta_{k\alpha} \right] dt \tag{A.12}$$

Подставим функции (A.3) в левые части равенств (1.3) и (1.4); тогда получатся функции $\varphi_l(b_1, \ldots, b_{p+q+1})$ и $\vartheta_i(b_1, \ldots, b_{p+q+1})$, причем уравнения

$$\begin{aligned} &J(b_1, \ldots, b_{p+q+1}) = J(0, \ldots, 0) + u, \qquad \varphi_l(b_1, \ldots, b_{p+q+1}) = 0 \quad (l = 1, \ldots, p) \\ &\vartheta[x_1(t_i'), \ldots, x_n(t_i'), t_i'] = \vartheta_i(b_1, \ldots, b_{p+q+1}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, q) \end{aligned} \tag{A.13}$$

имеют решение $b_1 = \ldots = b_{p+q+1} = u = 0$, соответствующее C. Функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \partial J/\partial b_\alpha \\ \cdots\cdots \\ \partial\varphi_l/\partial b_\alpha \\ \cdots\cdots \\ \partial\vartheta_i/\partial b_\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_1(\xi_\alpha, \zeta_\alpha, \tau_\alpha) \\ \cdots\cdots \\ \Phi_l(\xi_\alpha, \zeta_\alpha, \tau_\alpha) \\ \cdots\cdots \\ \theta_i(\xi_\alpha, \zeta_\alpha, \tau_\alpha) \end{vmatrix} \tag{A.14}$$

в котором через Φ_l и θ_i обозначены уравнения вариаций концевых условий (1.3) и равенства (1.4)

$$\Phi_{l\alpha} = \Phi_l(\xi_\alpha, \zeta_\alpha, \tau_\alpha) = \frac{d\varphi_l}{dt_0}\tau_{0\alpha} + \frac{d\varphi_l}{dT}\tau_{T\alpha} + \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_s(t_0)} \xi_{s\alpha}(t_0) + \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_s(T)} \xi_{s\alpha}(T) \right].$$
$$\theta_{i\alpha} = \theta_i(\xi_\alpha, \zeta_\alpha, \tau_\alpha) = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_{t_i'} \tau_{t_i'\alpha} + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x_s(t)} \right)_{t_i'} \xi_{s\alpha}(t_i') \tag{A.15}$$

равен нулю на C при любом выборе вариаций, ибо в противном случае уравнения (A.13) имеют решения $b_\alpha = B_\alpha(u)$, обращающиеся в нуль при $u = 0$. Тогда $J(u) < J(0)$ при $u < 0$ и $J(0)$ не является минимумом.

Таким образом, ранг матрицы с определителем (A.14) не превосходит $p + q$, поэтому система линейных уравнений

$$J_{1\alpha} + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \Phi_{l\alpha} + \sum_{i=1}^{q} \nu_i \theta_{i\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, p + q + 1) \tag{A.16}$$

имеет отличное от нуля решение ρ_l и ν_i для этого решения равенство

$$J_1(\xi, \zeta, \tau) + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \Phi_l(\xi, \zeta, \tau) + \sum_{i=1}^{q} \nu_i \theta_i(\xi, \tau) = 0 \tag{A.17}$$

должно выполняться при любом выборе допустимых вариаций τ_0, $\tau_{t_i'}$, τ_T, $\xi_s(t)$, $\zeta_k(t)$.

Подставив теперь в равенство (A.17) $J_1(\xi, \zeta, \tau)$ из соотношения (A.12), мы придем к зависимости

$$f_0\tau \Big|_{t_0}^{T} + \sum_{i=1}^{q} (f_0^- - f_0^+)_{t_i'}\tau_{t_i'} + G_1 + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \Phi_l + \sum_{i=1}^{q} \nu_i \theta_i +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \left[\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_s} \xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \dot{\xi}_s \right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial u_k} \zeta_k \right] dt \tag{A.18}$$

которая после перехода к обозначениям Лагранжа принимает вид:

$$\triangle\left[g+\sum_{l=1}^{p}\rho_l\varphi_l+\sum_{i=1}^{q}\nu_i\vartheta\,(x_1(t_i'),\ \ldots,\ x_n(t_i'),\ t_i')+\int_{t_0}^{T}L\,dt\right]=0 \qquad (A.19)$$

или

$$\triangle I=0 \qquad (A.20)$$

где

$$I=\varphi+\sum_{i=1}^{q}\nu_i\vartheta\,[x_1(t_i'),\ldots,x_n(t_i'),\ t_i']+\int_{t_0}^{T}L\,dt \qquad (A.21)$$

$$\varphi=g+\sum_{l=1}^{p}\rho_l\varphi_l \qquad (A.22)$$

Условие (А.20) должно выполняться для любой допустимой кривой C, удовлетворяющей уравнениям (1.1) и (1.2) и условиям (1.3) и (1.4) и сообщающей минимум функционалу J. Оно может быть названо условием стационарности функционала J и использовалось нами в разделе 2, где была установлена его развернутая форма.

Рассуждения и выкладки, приводящие к необходимому условию Вейерштрасса сильного минимума функционала J в задачах с непрерывными правыми частями уравнений движения, достаточно подробно описаны в приложении к работе [5]. Здесь они не воспроизводятся, а лишь указываются те особенности, которые вносят в него разрывы непрерывности правых частей.

В любой точке кривой C, не совпадающей с ее угловыми точками, должно выполняться неравенство

$$E\geqslant 0 \qquad (A.\ 23)$$

в котором

$$E=L\,(x,\dot X,U,\lambda,\mu,t)-L\,(x,\dot x,u,\lambda,\mu,t)-\sum_{s=1}^{n}(\dot X_s-\dot x_s)\frac{\partial L}{\partial \dot x_s} \qquad (A.\ 24)$$

и x_s и u_k соответствуют кривой C, а X_s и U_k — любые допустимые функции, удовлетворяющие уравнениям (1.1) и (1.2). Функция E может иметь разрывы непрерывности в точках $t=t'$ разрывов правых частей уравнений движения. Однако она в этих точках имеет левый и правый пределы. Поэтому неравенство (А. 23) должно проверяться в точках разрыва непрерывности правых частей уравнений движения дважды — для левого и правого пределов функции E.

Поступила 8 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. ИЛ, 1950.
2. Блехман И. И. Исследование процесса вибросепарации и вибротранспортировки. Инж. сб., 1952, т. XI.
3. Блехман И. И. Исследование процесса вибрационной забивки свай и шпунтов. Инж. сб., 1954, т. XIX.
4. Троицкий В. А. Задача Майера — Больца вариационного исчисления и теория оптимальных систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.
5. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 1.
6. Троицкий В. А. Задача Лагранжа вариационного исчисления и теория оптимальных систем. Информационный бюллетень ЛПИ, 1961, № 7.
7. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.