Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассматривается задача о выведении управляемого движения $z(t)$ в окрестность случайной точки $y(t)$. Перемещения $y(t)$ образуют вероятностный диффузионный процесс [1], движение $z(t)$ описывается линейными дифференциальными уравнениями, содержащими функцию управления u. Управление $u[t, y, z]$ формируется в каждый момент t на основе реализовавшихся значений $y(t)$ и $z(t)$. Показано, что задача о выведении точки $z(t)$ в ε-окрестность $y(T)$ $(T > o)$ с вероятностью $p < 1$ имеет ограниченное решение $u[t, y, z]$, если движение $z(t)$ в определенном смысле вполне управляемо и параметры процесса $y(t)$ стеснены некоторыми ограничениями. В случае, когда среднее значение $M\{y(t)\}$ описывается линейными уравнениями, дается явный вид управления u, которое оказывается линейной функцией y и z. Попутно обсуждаются некоторые задачи оптимального управления. Задача решается методом функций Ляпунова [2, 3], модернизированным для рассматриваемой задачи. Эта модернизация использует идеи теории динамического программирования [4].

§ 1. Предварительные замечания. В этой статье рассматриваются два движения в n-мерном пространстве: преследуемое случайное движение $y(t)$ и преследующее управляемое движение $z(t)$. Опишем эти движения.

Примем, что $y(t) = \{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ описывает n-мерный диффузионный[1] вероятностный процесс (см. например [1] стр. 247—262). Процесс $y(t)$ можно описать наглядно следующим образом.

Изменение $y(t_2) - y(t_1)$ складывается из малых случайных приращений $dy(t)$, каждое из которых является гауссовой случайной величиной со средним значением и матрицей вторых моментов порядка соответствующего отрезка времени dt.

Иначе говоря, за время dt точка $y(t)$ смещается на некоторую величину mdt и при этом рассеивается по нормальному закону, причем дисперсия рассеяния пропорциональна dt.

Поэтому процесс $y(t)$ опишем «дифференциальным уравнением»

$$dy(t) = m(t, y(t))\,dt + R(t, y(t))\,dq(t) \qquad (1.1)$$

Здесь m — известная n-вектор-функция $\{m_i\}$, матрица R есть $n \times n$-матрица $\{r_{ij}\}$, а $q(t)$ — случайный n-вектор, компоненты которого $q_i(t)$ являются независимыми скалярными процессами броуновского движения.

[1] В книге [1] описан скалярный диффузионный процесс ($n = 1$), однако здесь и ниже при рассмотрении векторных процессов будем ссылаться на [1], так как переход от случая $n = 1$ к $n > 1$ вызывает лишь непринципиальные изменения в рассуждениях.

Процессы $q_i(t)$ — это, следовательно, гауссовские процессы с независимыми приращениями, удовлетворяющие условиям

$$M\{q_i(t_2) - q_i(t_1)\} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

$$M\{[q_i(t_2) - q_i(t_1)][q_j(t_2) - q_j(t_1)]\} = |t_2 - t_1|\,\delta_{ij} \tag{1.3}$$
$$(\delta_{ij} = 0,\ i \neq j,\ \delta_{ii} = 1;\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$$

Символом $M\{\alpha\}$ будем обозначать математическое ожидание случайной величины α, символом $M\{\alpha \mid \beta\}$ — условное математическое ожидание α.

Элементы r_{ij} матрицы R определяют матрицу $\{\sigma_{ij}\,dt\}$ вторых моментов случайного разброса величины $dy(t)$, а именно

$$\sigma_{ij}(t, y) = \sum_{k=1}^{n} r_{ik}(t, y)\, r_{jk}(t, y) \tag{1.4}$$

Матрица σ_{ij} является неотрицательно определенной.

Уточним смысл уравнения (1.1), которое служит наглядным описанием процесса $y(t)$. Везде в этой статье предполагается, что областью значений аргумента t является отрезок $[0, T]$ $(T > 0)$. Тогда можно интерпретировать уравнение (1.1) строго при помощи стохастического интегрального уравнения (см., например, [1], стр. 250—258)

$$y(t) - y(0) = \int_0^t m(s, y(s))\, ds + \int_0^t R(s, y(s))\, dq(s) \tag{1.5}$$

Здесь начальное условие $y(0)$ предполагается фиксированным, а интегралы справа имеют смысл стохастических интегралов ([1], см., например, стр. 392—404).

Обозначим символом $\|g\|$ евклидову норму вектора g. Пусть функции m и R непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица по y

$$\begin{aligned} |m_i(t, y^{(1)}) - m_i(t, y^{(2)})| &\leqslant K \|y^{(1)} - y^{(2)}\| \\ |r_{ij}(t, y^{(1)}) - r_{ij}(t, y^{(2)})| &\leqslant K \|y^{(1)} - y^{(2)}\| \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

и ограничениям роста при $\|y\| \to \infty$

$$\begin{aligned} \|m(t, y)\| &\leqslant K(1 + \|y\|^2)^{1/2} \\ |r_{ij}(t, y)| &\leqslant K(1 + \|y\|^2)^{1/2} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \qquad (K = \mathrm{const})$$

Тогда существует случайный процесс $y(t)$, удовлетворяющий уравнению (1.5) при каждом $t \in [0, T]$ (с вероятностью 1).

Почти все реализации $y(\omega, t)$ этого процесса $y(t)$ непрерывны на отрезке $[0, T]$ и продолжимы на весь отрезок в том смысле, что

$$M\{\max(\|y(\omega, t)\|^2,\ 0 \leqslant t \leqslant T)\} < \infty$$

Пусть управляемое движение $z(t)$ описывается линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\, z + b(t)\, u \tag{1.6}$$

где $z(t) = \{z_1(t), \ldots, z_n(t)\}$ — n-вектор, $A(t)$ — $n \times n$-матрица с непрерывными элементами $a_{ij}(t)$, $b(t) = \{b_1(t), \ldots, b_n(t)\}$ — непрерывный n-вектор, u — скалярная величина, описывающая управляющее воздействие. Если в уравнении (1.6) u достаточно гладкая функция, то уравнения (1.1) и (1.6) для каждого начального условия $y(0)$, $z(0)$ порождают случайный процесс $\{y(t),\ z(t)\}$.

Уточним это утверждение. Если функция $u[t, y, z]$ непрерывна, удовлетворяет условиям Липшица по y и z

$$|u[t, y^{(1)}, z^{(1)}] - u[t, y^{(2)}, z^{(2)}]| \leqslant K \|\{y^{(1)}, z^{(1)}\} - \{y^{(2)}, z^{(2)}\}\| \qquad (1.7)$$

и ограничению роста

$$|u[t, y, z]| \leqslant K(1 + \|y\|^2 + \|z\|^2)^{1/2} \qquad (K = \text{const}) \qquad (1.8)$$

то существует $2n$-мерный вероятностный процесс $\{y(t),\ z(t)\}$, удовлетворяющий уравнению (1.5) и уравнению

$$z(t) - z(0) = \int_0^t [A(s) z(s) + b(s) u[s, y(s), z(s)]]\, ds \qquad (1.9)$$

почти все реализации $\{y(t, \omega),\ z(t, \omega)\}$ которого непрерывны при $t \in [0, T]$ и который продолжим на весь интервал $[0, T]$ в том смысле, что

$$M\{\max(\|y(\omega, t),\ z(\omega, t)\|^2),\quad 0 \leqslant t \leqslant T\} < \infty \qquad (1.10)$$

Именно в таком смысле и будем понимать в дальнейшем выражение: процесс $\{y(t),\ z(t)\}$, описываемый уравнениями (1.1), (1.6).

Управления $u[t, y, z]$, удовлетворяющие условиям (1.7), (1.8) (при каком-нибудь $K = \text{const}$), будем называть допустимыми. Множество допустимых управлений u будем обозначать символом U.

Начальные условия $\{y(0),\ z(0)\}$ процесса $\{y(t),\ z(t)\}$ будем предполагать фиксированными (случайными величинами, тождественно равными $y(0)$, $z(0)$).

Символом $P[\alpha;\ y(0),\ z(0)]$ будем обозначать вероятность событий α, связанных со случайными величинами $y(t)$, $z(t)$ при начальных условиях $y(0)$, $z(0)$, символом $P[\alpha \mid \beta;\ y(0),\ z(0)]$ будем обозначать условные вероятности таких событий. Также, если надо будет подчеркнуть роль начальных условий, символ математического ожидания будем писать $M\{\alpha; y(0), z(0)\}$ или $M\{\alpha \mid \beta;\ y(0), z(0)\}$. Там, где не будет возникать сомнений, символы $y(0)$ и $z(0)$ в обозначениях P и M будем опускать.

Основной результат статьи будет сформулирован для случая, когда величина $m(t, y)$ является линейной функцией y, т. е.

$$m(t, y) = M(t) y \qquad (1.11)$$

Здесь $M(t)$ — непрерывная $n \times n$-матрица-функция $\{m_{ij}(t)\}$. В этом случае можно считать, что среднее значение $M\{y(t) \mid y(\tau) = \eta\}$ величины $y(t)$ при $t \geqslant \tau$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dM\{y(t) \mid y(\tau) = \eta\}}{dt} = M(t) M\{y(t) \mid y(\tau) = \eta\} \qquad (1.12)$$

получающемуся усреднением из (1.1). Обозначим символом $M\{t, \tau\}$ фундаментальную матрицу решений системы (1.12) ($M\{\tau, \tau\} = E$). Тогда

$$M\{y(t) \mid y(\tau) = \eta\} = M(t, \tau)\eta \qquad (1.13)$$

В частности, если $M(t) = M = \text{const}$ при $t \in [0, T]$, то

$$M\{y(t) \mid y(\tau) = \eta\} = e^{M(t-\tau)}\eta \qquad (1.14)$$

§ 2. Постановка задачи. Рассмотрим процесс $\{y(t),\ z(t)\}$, описываемый уравнениями (1.1), (1.6) при $u \in U$.

Задача заключается в выборе управления $u^\circ \in U$, при котором движение $z(t)$ в заданный момент $t = T > 0$ выводится в окрестность точки $y(T)$. Точнее говоря, при данных числах $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и $p < 1$ требуется найти функцию $u = u^\circ[t, y, z] \in U$, при подстановке которой в уравнение (1.9) вероятностный процесс $\{y(t),\ z(t)\}$, описываемый уравнениями (1.5), (1.9) удовлетворяет условию

$$P[\|y(T) - z(T)\| < \varepsilon;\ y(0),\ z(0)] > p \tag{2.1}$$

для всех начальных условий

$$\|y(0)\| \leqslant N, \qquad \|y(0) - z(0)\| \leqslant N \tag{2.2}$$

К условиям задачи следует добавить еще одно ограничение. Так как ресурсы управления должны предполагаться ограниченными, потребуем, чтобы искомое управление u° удовлетворяло ограничению

$$\int_0^T M\{(u^\circ[t, y(t),\ z(t)])^2;\ y(0),\ z(0)\}\,dt < \infty \tag{2.3}$$

при $\|y(0)\| \leqslant N$, $\|y(0) - z(0)\| \leqslant N$.

Поясним смысл задачи. Управление $u = u^\circ \in U$ выбирается в виде функции от величин t, y и z. Это означает, что величина управления определяется в каждый момент процесса $\tau \in [0, T)$ на основании измерения реализовавшихся значений $y(\tau)$, $z(\tau)$. Предполагается, следовательно, что в процессе управления можно измерять величины $y(\tau)$ и $z(\tau)$ и мгновенно передавать сигнал о результатах измерения в управляющее устройство, которое вырабатывает $u = u^\circ[\tau,\ y(\tau), z(\tau)]$. При этом будущие значения $y(t)$ и $z(t)$ при $t > \tau$ неизвестны, однако вероятностный прогноз о $y(t)$ и $z(t)$ учитывается при определении функции $u^\circ[\tau,\ y(\tau),\ z(\tau)]$. Такая постановка задачи соответствует задачам об оптимальном управлении при измеримых координатах и случайных возмущениях. Эти задачи рассматривались, например, в работах [5–10].

Заметим, что управление u°, приводящее $z(t)$ к $y(t)$, нельзя в нашем случае выбирать по правилу простой погони, направляя в каждый момент t вектор скорости $dz(t)/dt$ на точку $y(t)$. Если можно было бы осуществлять такую погоню, решение задачи существенно упрощалось бы. Однако в рассматриваемом случае u — скалярная величина и поэтому в момент t, варьируя u $(-\infty < u < \infty)$, можно вращать вектор $dz(t)/dt$ лишь в пределах полуплоскости, образованной векторами $A(t)z(t)$ и $b(t)u$, в которой точка $y(t)$, вообще говоря, не лежит. Простая погоня ($dz(t)$ на $y(t)$) была бы возможна, если бы вместо члена $b(t)u$ уравнение (1.6) содержало член $B(t)u$, где $B(t)$ — неособая $n \times n$-матрица, u — n-вектор.

Трансформируем сформулированную задачу к форме, удобной для дальнейшего рассмотрения. Заменой переменных $x = z - y$, $y = y$ уравнение (1.6) с учетом уравнения (1.1) преобразуется в уравнение

$$dx(t) = [A(t)(x(t) + y(t)) - m(t, y(t)) + b(t)u]dt - R(t, y(t))dq(t) \tag{2.4}$$

Теперь задача формулируется следующим образом.

Задача А. Даны числа $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и $p < 1$. Требуется указать допустимое управление $u^\circ [t, x, y]$, удовлетворяющее условию (2.3) и такое, что при $u = u^\circ$ в уравнении (2.4), выполняется условие

$$P[\|x(T)\| < \varepsilon;\ x(0),\ y(0)] > p \tag{2.5}$$

если

$$\|x(0)\| \leqslant N, \qquad \|y(0)\| \leqslant N \tag{2.6}$$

Уравнение (2.4) при строгом описании интерпретируется интегральным стохастическим уравнением

$$x(t) - x(0) = \int_0^t [A(s)(x(s) + y(s)) - m(s, y(s)) + b(s)u[s, x(s), y(s)]]\, ds -$$
$$- \int_0^t R[s, y(s)]\, dq(s) \tag{2.7}$$

Заметим в заключение, что имеется в виду задача об эффективном определении управления u°. Поэтому в дальнейшем не будем стремиться к вычислению наилучшего (в каком-нибудь смысле) решения. По этой же причине ограничиваемся линейным случаем. Все рассуждения можно провести и в более общих нелинейных случаях, однако эффективное вычисление $u^\circ [t, x, y]$ в нелинейных случаях затруднительно.

Подчеркнем, наконец, что постановка задачи предполагает функции $m(t, y)$, $R(t, y)$, $A(t)$ и $b(t)$ известными и удовлетворяющими указанным в § 1 условиям.

§ 3. Основной результат. Сформулируем теорему об управлении u°, разрешающем задачу А.

Примем, что система, описываемая уравнением

$$dx / dt = A(t)x + b(t)u \tag{3.1}$$

будет вполне управляемой на отрезке $[0, T]$. Это означает, что для любых точек $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ и для отрезка $[t_1, t_2] \in [0, T]$, $t_2 > t_1$ существует управление u, переводящее точку $x^{(1)}$ в точку $x^{(2)}$ за время $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Иначе говоря, существует непрерывная (или кусочно-непрерывная) функция $u(t)$, при подстановке которой в уравнение (3.1), одно из его решений $x(t)$ удовлетворяет условиям $x(t_1) = x_1^{(1)}$, $x(t_2) = x^{(2)}$.

Приведем достаточные условия управляемости. Обозначим символом $F(t, \tau) = \{f_{ij}(t, \tau)\}$ — фундаментальную матрицу решений системы (3.1) $(f_{ij}(\tau, \tau) = \delta_{ij})$, символом $F^{-1}(t, \tau) = G(t, \tau) = \{g_{ij}(t, \tau)\}$ — матрицу обратную к F, символом $h(t, \tau) = \{h_i(t, \tau)\}$ — вектор $G(t, \tau)b(t)$.

В соответствии с результатами статьи ([11] стр. 964—966) для того, чтобы система (3.1) была вполне управляемой, достаточно, чтобы функции $h_i(t, \tau)$ были вполне линейно независимыми (по t при фиксированном τ), т. е. чтобы линейная комбинация $\lambda_1 h_1(t, \tau) + \ldots + \lambda_n h_n(t, \tau)$ не обращалась тождественно в нуль нигде на интервале $\tau < t < T$ при $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0$.

Для полной линейной независимости функций $\{h_i\}$ достаточно [12], чтобы векторы $L_1(t), \ldots L_n(t)$ были линейно независимыми при всех

$t \in [0, T]$ (почти всех $t \in [0, T]$). Здесь

$$L_1(t) = b(t), \quad L_{k+1}(t) = \frac{dL_k(t)}{dt} - A(t) L_k(t) \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

Назовем условие независимости векторов $L_1(t), \ldots, L_n(t)$ условием L. Заметим, что матрица $G^*(t, \tau) = S(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dS / dt = -A^*(t) S \tag{3.2}$$

где символ $*$ означает транспонирование; поэтому выражение $\lambda_1 h_1(t, \tau) + \ldots + \lambda_n h_n(t, \tau)$ можно рассматривать как скалярное произведение $(\psi(t) \cdot b(t))$, играющее основную роль в принципе максимума Л. С. Понтрягина [10]. Здесь вектор

$$\psi(t) = \{\psi_j(t)\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_{ij}\right\}$$

решение уравнения

$$d\psi / dt = -A^*(t) \psi \tag{3.3}$$

Следовательно, для полной управляемости системы (3.1) достаточно, чтобы ни для какого нетривиального решения $\psi(t)$ уравнения (3.3), скалярное произведение $(\psi(t) \cdot b(t))$ не обращалось в нуль тождественно.

Отметим, что понятие управляемости линейной системы рассматривалось рядом авторов с различных точек зрения [10—14].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть на отрезке $[0, T]$ выполнено условие управляемости L, функции $A(t)$, $b(t)$, $M(t)$ и $R(t, y)$ непрерывны, функция $R(t, y) = \{r_{ij}(t, y)\}$ удовлетворяет условиям Липшица по y

$$| r_{ij}(t, y^{(1)}) - r_{ij}(t, y^{(2)}) | \leqslant K \| y^{(1)} - y^{(2)} \| \tag{3.4}$$

и ограничена так, что

$$| \sigma_{ij}(t, y) | \leqslant \sigma^2(t) \tag{3.5}$$

(функция $\sigma^2(t)$ непрерывна при $t \in [0, T]$).

Тогда для любых чисел $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и $p < 1$ можно построить допустимое управление $u = u^\circ[t, x, y]$, удовлетворяющее условиям задачи А. Это управление можно выбрать в виде линейной функции

$$u^\circ[t, x, y] = \sum_{i=1}^{n} [\mu_i(t) x_i + \nu_i(t) y_i] \tag{3.6}$$

где $\mu_i(t)$, $\nu_i(t)$ — непрерывные функции.

Определение функций $\mu_i(t)$ и $\nu_i(t)$ сводится к решению задачи Коши с известными начальными условиями для некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с аргументом $t \in [0, T]$. Коэффициенты этих уравнений определяются функциями $A(t)$, $b(t)$, $M(t)$ и поэтому задача А решается эффективно в той же мере, насколько эффективно решается задача Коши.

§ 4. Метод решения. Воспользуемся для задачи А методом, аналогичным методу функций Ляпунова в теории устойчивости движения [2, 3].

Преобразуем несколько задачу А. Вследствие неравенства Чебышева [1]

$$p[\|x\| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{M\{\|x\|^2\}}{\varepsilon^2} \tag{4.1}$$

для выполнения условия (2.5) достаточно удовлетворить неравенству

$$M\{\|x(T)\|^2;\ x(0), y(0)\} < (1-p)\,\varepsilon^2 \qquad (\|x(0)\| \leqslant N,\ \|y(0)\| \leqslant N) \tag{4.2}$$

Поэтому в дальнейшем, решая задачу А, будем искать управление u°, удовлетворяющее не условию (2.5), а несколько более сильному требованию (4.2). Неравенство Чебышева (4.1) дает грубую оценку величины $p[\|x\| \geqslant \varepsilon]$, однако замена условия (2.5) условием (4.2) оправдывается тем, что рассматривается не наилучшее, а эффективно вычисляемое управление u°, удовлетворяющее условиям задачи А.

Сформулируем достаточное условие для u°.

Теорема 4.1. Если возможно указать непрерывно дифференцируемую функцию $v[t, x, y]$, которая имеет вид (4.3)

$$v[t, x, y] = \sum_{i,j=1}^{n} [\alpha_{ij}(t)\, x_i x_j + 2\beta_{ij}(t)\, x_i y_j + \gamma_{ij}(t)\, y_i y_j] + \lambda(t) \qquad (t \in [0, T])$$

удовлетворяет условиям

$$v[0, x, y] < (1-p)\,\varepsilon^2 \qquad (\|x\| \leqslant N,\ \|y\| \leqslant N) \tag{4.4}$$

$$v[T, x, y] = \|x\|^2 \tag{4.5}$$

и производная [7, 9] которой $(dM\{v\}/dt;\ u^\circ)$ в силу уравнений (1.1), (2.4) при $u = u^\circ[t, x, y]$ неположительна, причем

$$\left(\frac{dM\{v\}}{dt};\ u^\circ\right) \leqslant -c\,(u^\circ)^2 \qquad (c > 0 - \text{const}) \tag{4.6}$$

то управление u° удовлетворяет условиям задачи А.

Напомним, что $(dM\{v\}/dt)$ имеет следующий смысл $t = \tau,\ x = \xi,\ y = \eta)$

$$\left(\frac{dM\{v\}}{dt}\right) = \lim\left\{\frac{1}{t-\tau}\,[M\{v[t, x(t), y(t)] - v[\tau, x(\tau), y(\tau)] \mid x(\tau) = \xi, y(\tau) = \eta\right\}$$

$$\text{при } t \to \tau + 0 \tag{4.7}$$

и определяется бесконечно малым производящим оператором [15] процесса $\{x(t),\ y(t)\}$.

Доказательство теоремы 4.1. Вероятностный процесс $\{x(t),\ y(t)\}$, описываемый уравнениями (1.5), (2.7), продолжим на интервал $[0, T]$ и удовлетворяет условиям ([1], см, например, стр. 251, 257)

$$M\{\|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2\} < \infty \tag{4.8}$$

$$M\{x(t) - x(\tau) \mid x(\tau) = \xi,\ y(\tau) = \eta\} = (t-\tau)\,[A(\tau)(\xi + \eta) -$$
$$- m(\tau, \eta) + b(\tau)\, u[\tau, \xi, \eta]] + o(t-\tau)\,(1 + \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2)^{1/2} \tag{4.9}$$

$$M\{y(t) - y(\tau) \mid y(\tau) = \eta\} = m(\tau, \eta)(t-\tau) + o(t-\tau)\,(1 + \|\eta\|^2)^{1/2} \tag{4.10}$$

$$M\{[x_i(t) - x_i(\tau)]\,[x_j(t) - x_j(\tau)] \mid x(\tau) = \xi,\ y(\tau) = \eta\} =$$
$$= (\tau - t)\,\sigma_{ij}(\tau, \eta) + (1 + \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2)\, o(t-\tau) \tag{4.11}$$

$$M\{[x_i(t) - x_i(\tau)]\,[y_j(t) - y_j(\tau)] \mid x(\tau) = \xi,\ y(\tau) = \eta\} =$$
$$= (\tau - t)\,\sigma_{ij}(\tau, \eta) + (1 + \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2)\, o(t-\tau) \tag{4.12}$$

$$M\{[y_i(t) - y_i(\tau)]\,[y_j(t) - y_j(\tau)] \mid x(\tau) = \xi,\ y(\tau) = \eta\} =$$
$$= (t-\tau)\,\sigma_{ij}(\tau, \eta) + (1 + \|\eta\|^2)\, o(t-\tau) \tag{4.13}$$

Здесь символ $o(t-\tau)$ обозначает величину высшего порядка малости, чем $t-\tau$, причем оценка $o(t-\tau)$ равномерна по $\xi, \eta, \tau \in [0, T)$.

Вычисляя производную $(dM\{v\}/dt; u)$ в силу уравнений (1.1), (2.4) (или, что то же самое, в силу уравнений (1.5), (2.7)) и учитывая соотношения (4.9) — (4.13), получим [1] (в точке $t=\tau, x(\tau)=\xi, y(\tau)=\eta$)

$$\left(\frac{dM\{v\}}{dt};\ u\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial v}{\partial x_j}[a_{ij}(\tau)(\xi_j+\eta_j)-m_i(\tau,\eta)+b_i(\tau)u]+\frac{\partial v}{\partial y_i}m_i(\tau,\eta)\right\}+$$
$$+\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}-2\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial y_j}+\frac{\partial^2 v}{\partial y_i\partial y_j}\right\}\sigma_{ij}(\tau,\eta) \qquad (4.14)$$

Отметим, что вследствие (4.9) — (4.13) для каждого допустимого управления u справедлива также оценка

$$M\{v[t, x(t), y(t)]-v[\tau, x(\tau), y(\tau)]\,|\,x(\tau)=\xi,\ y(\tau)=\eta\}=$$
$$=(t-\tau)\left(\frac{dM\{v\}}{dt};\ u\right)+o(t-\tau)(1+\|\xi\|^2+\|\eta\|^2) \qquad (4.15)$$

Составим величину

$$V[t; x(0), y(0)]=M\{v[t, x(t), y(t)];\ x(0), y(0)\} \qquad (4.16)$$

Так как процесс $\{x(t), y(t)\}$ продолжим на $[0, T]$ и удовлетворяет условию (4.8), то величина (4.16) имеет смысл и конечна при всех значениях $t \in [0, T]$.

Вычислим изменение $V(t)-V(\tau)$. Имеем по формуле повторных условных математических ожиданий ([1] см., например, стр. 38—40)

$$V[t; x(0), y(0)]-V[\tau; x(0), y(0)]=$$
$$=M\{M\{v[t, x(t), y(t)]-v[\tau, x(\tau), y(\tau)]\,|\,x(\tau), y(\tau)\};\ x(0), y(0)\} \qquad (4.17)$$

Учитывая оценки (4.8) и (4.15), можем написать равенство

$$V[t; x(0), y(0)]-V[\tau; x(0), y(0)]= \qquad (4.18)$$
$$=(t-\tau)M\left\{\left(\frac{dM\{v\}}{dt}; u\right);\ x(0), y(0)\right\}+o(t-\tau)D \qquad (D=\text{const})$$

Из (4.18) заключаем о непрерывности величины $V[t; x(0), y(0)]$ по времени t и о справедливости соотношений (при $u=u^\circ$)

$$\frac{dV[t; x(0), y(0)]}{dt}=M\left\{\left(\frac{dM\{v\}}{dt};\ u^\circ\right)\right\}\leqslant -cM\{(u^\circ)^2\}\leqslant 0 \qquad (4.19)$$

Интегрируя (4.19) по t в пределах от $t=0$ до $t=T$ и учитывая, что

$$V[0; x(0), y(0)]=v[0, x(0), y(0)]$$

$$V[T; x(0), y(0)]=M\{v[T, x(T), y(T)];\ x(0), y(0)\}=M\{\|x(T)\|^2\}$$

вследствие (4.5), получим неравенство

$$M\{\|x(T)\|^2\}\leqslant v[0, x(0), y(0)] \qquad (4.20)$$

---

[1] Опускаем здесь выкладки. Порядок вычисления $dM\{v\}/dt$, исходя из наглядного описания вероятностного процесса, изложен, например, в статье [9].

Если $\|x(0)\| \leqslant N$, $\|y(0)\| \leqslant N$, то вследствие (4.4) получим неравенство

$$M\{\|x(T)\|^2;\ x(0),\ y(0)\} < (1-p)\,\varepsilon^2$$

которое и доказывает справедливость теоремы.

Итак, для того, чтобы решить задачу, следует найти функции v и u^*, удовлетворяющие условиям теоремы 4.1. Как и задача отыскания функции Ляпунова в теории устойчивости движения, эта задача весьма неопределенна. Однако в данном случае сопоставим задаче А некоторую задачу оптимального регулирования, при решении которой функция Ляпунова v и управление $u = u^\circ$ определяются единственным образом. Отметим, что такой прием может быть полезен иногда и при отыскании функции Ляпунова в задачах теории устойчивости движения.

§ 5. Вспомогательный материал из теории оптимального управления. Приведем вспомогательные данные, которые используются в следующем параграфе для доказательства теоремы 3.1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dy}{dt} = M(t)\,y, \qquad \frac{dx}{dt} = A(t)\,x + [A(t) - M(t)]\,y + b(t)\,u \tag{5.1}$$

совпадающих с уравнениями (1.1), (2.4) при вычете из последних случайных слагаемых $R(t,\ y)\,dq(t)$.

Сформулируем для системы (5.1) задачу оптимального управления.

Задача В (c). Требуется определить управление $u = u^*[c;\ t,\ x,\ y]$ так, чтобы при каждом начальном условии $x(\tau)$, $y(\tau)$ $(\tau \in [0,\ T))$ функционал

$$J[c;\ x(\tau),\ y(\tau);\ u] = \int_\tau^T cu^2[c;\ t,\ x(t),\ y(t)]\,dt + \|x(T)\|^2 \tag{5.2}$$

принимал наименьшее возможное значение.

Задача В (c) — задача об аналитическом конструировании [16] оптимального регулятора u, однако рассматриваемая здесь в отличие от [16] для конечного интервала времени $[0,\ T[$. Подобные задачи рассматривались, например, в работах [17, 18].

Опишем решение задачи В (c), основанное на методе теории динамического программирования.

Пусть функции $w[c;\ t,\ x,\ y]$ и $u^*[c;\ t,\ x,\ y]$ удовлетворяют условиям

$$\left(\frac{dw}{dt};\ (5.1),\ u^*\right) + c\,[u^*[c;\ t,\ x,\ y]]^2 = \min\left[\left(\frac{dw}{dt};\ (5.1),\ u\right) + cu^2\right] = 0 \tag{5.3}$$

$$w[c,\ T,\ x,\ y] = \|x\|^2 \tag{5.4}$$

Здесь символ $(dw/dt;\ (5.1),\ u)$ означает производную функции w в силу системы (5.1) при выбранном u.

Тогда $u^*[c;\ t,\ x,\ y]$ — оптимальное управление, удовлетворяющее условиям задачи В (c) и справедливо равенство

$$w[c;\ \tau,\ x(\tau),\ y(\tau)] = \min J[c;\ x(\tau),\ y(\tau);\ u] = J[c;\ x(\tau),\ y(\tau);\ u^*] \tag{5.5}$$

Приведем для полноты изложения доказательство этого утверждения. При $u = u^*$ из (5.3), интегрируя по t от $t = \tau$ до $t = T$ и учитывая (5.4), получим равенство

$$w[c;\ \tau,\ x(\tau),\ y(\tau)] = \int_\tau^T c\,[u^*[c;\ t,\ x(t),\ y(t)]]^2\,dt + \|x(T)\|^2 \tag{5.6}$$

При $u \neq u^*$ из (5.3) следует неравенство

$$\left(\frac{dw}{dt};\ (5.1),\ u\right) \geqslant -cu^2 \tag{5.7}$$

Интегрируя это неравенство, получим неравенство

$$w\left[c;\ \tau,\ x(\tau),\ y(\tau)\right] \leqslant \int\limits_{\tau}^{T} cu^2(t)\,dt + \|x(T)\|^2 \tag{5.8}$$

Равенство (5.7) в совокупности с неравенством (5.8) доказывает справедливость утверждения об оптимальности u^*.

Функции w и u^*, удовлетворяющие условиям (5.3), (5.4), существуют и имеют вид

$$w\left[c;\ t,\ x,\ y\right] = \sum_{i,\ j=1}^{n} \left[\alpha_{ij}(c,\ t)\,x_i x_j + 2\beta_{ij}(c,\ t)\,x_i y_j + \gamma_{ij}(c,\ t)\,y_i y_j\right] \tag{5.9}$$

$$u^*\left[c;\ t,\ x,\ y\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\mu_i(c,\ t)\,x_i + \nu_i(c,\ t)\,y_i\right] \tag{5.10}$$

Покажем это. Составим уравнения для коэффициентов α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, μ_i, ν_i, вытекающие из условий (5.3). Для этой цели следует в (5.3) исключить u^*, пользуясь тем, что при $u = u^*$ имеет место минимум, т. е. должно выполняться равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{dw}{dt};\ (5.1),\ u\right) + cu^2\right]\right)_{u^*} = 0 \tag{5.11}$$

После выполнения указанных операций получим следующие уравнения для w и u^*:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial w}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t)\,x_j + (a_{ij}(t) - m_{ij}(t))\,y_j\right) + \frac{\partial w}{\partial y_i} m_{ij}(t)\,y_j\right] - $$
$$- \frac{1}{4c}\left[\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right]^2 = 0 \tag{5.12}$$

$$2cu^* + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \tag{5.13}$$

Приравнивая в левой части (5.12) коэффициенты при одинаковых выражениях $x_i x_j$, $x_i y_j$, $y_i y_j$ нулю, получим систему уравнений для определения коэффициентов $\alpha_{ij}(c,\ t)$, $\beta_{ij}(c,\ t)$, $\gamma_{ij}(c,\ t)$. Запишем эту систему в нормальной форме

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_{ij}}{dt} &= \frac{1}{c}\sum_{k,\ l=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{lj} b_k(t)\,b_l(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_{ik}a_{kj}(t) + \alpha_{jk}a_{ki}(t)\right)\\
\frac{d\beta_{ij}}{dt} &= \frac{1}{c}\sum_{k,\ l=1}^{n} \alpha_{ki}\beta_{lj} b_k(t)\,b_l(t) - 2\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_{ik}(a_{kj} - m_{kj}) + \beta_{ik}m_{kj}\right]\\
\frac{d\gamma_{ij}}{dt} &= \frac{1}{c}\sum_{k,\ l=1}^{n} \beta_{ki}\beta_{lj} b_k(t)\,b_l(t) -\\
&\quad - \sum_{k=1}^{n}\left[2\beta_{ki}(a_{kj}(t) - m_{kj}(t)) + \gamma_{ik}m_{kj}(t) + \gamma_{jk}m_{ki}(t)\right]
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Систему уравнений (5.14) следует решать на отрезке $[0, T]$ при следующих начальных условиях:

$$\alpha_{ij}(c, T) = \delta_{ij}, \quad \beta_{ij}(c, T) = 0, \quad \nu_{ij}(c, T) = 0 \qquad (\delta_{ii} = 1, \ \delta_{ij} = 0, \ i \neq j) \tag{5.15}$$

как это вытекает из краевого условия (5.4) для $w[c; t, x, y]$.

Можно проверить, что система уравнений (5.14) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (5.15) и продолжимое на весь интервал $[0, T]$, каково бы ни было число $c > 0$. В самом деле правые части уравнений (6.14) удовлетворяют условиям локального существования и единственности решений. Поэтому достаточно проверить, что решения $\alpha_{ij}(c, t)$, $\beta_{ij}(c, t)$, $\gamma_{ij}(c, t)$, начинающиеся в точке (5.15), могут быть продолжены по t на весь отрезок $[0, T]$ в сторону убывания t. Так как правые части (5.14) содержат вторые степени неизвестных функций α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, то такая проверка необходима.

Для доказательства продолжимости решений α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij} заметим, что квадратичная форма $w[c; t, x, y]$ равномерно ограничена (при $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$) при всех тех $t \in (\vartheta, T)$, при которых решение системы (5.14) с начальными условиями (5.15) существует. Действительно, по смыслу величины w выполняются неравенства

$$\begin{gathered} w[c; t, x, y] > 0 \\ w[c; \tau, x(\tau), y(\tau)] = \min_u J[c; x(\tau), y(\tau); u] \leqslant \\ \leqslant J[c; x(\tau), y(\tau); u = 0] \leqslant Q = \text{const} \\ \|x(\tau)\|^2 + \|y(\tau)\|^2 = 1 \qquad \text{при } \tau \in (\vartheta, T] \end{gathered} \tag{5.16}$$

Из неравенства (5.16) следует равномерная ограниченность решений (5.14), (5.15), а следовательно, и продолжимость этих решений на весь отрезок $[0, T]$.

Наше утверждение доказано.

Итак, функция $w[c, t, x, y]$, удовлетворяющая условиям (5.3) и являющаяся квадратичной формой (5.9), существует. Из (5.9) и равенства (5.11) следует, что управление u^* удовлетворяет уравнению

$$2cu^* + 2\sum_{i=1}^{n} [\alpha_{ij}(c, t) x_j + \beta_{ij}(c, t) y_j] b_i(t) = 0$$

т. е.

$$u^*[c; t, x, y] = -\sum_{i=1}^{n} b_i(t) [\alpha_{ij}(c, t) x_j + \beta_{ij}(c, t) y_j] \tag{5.17}$$

и, следовательно, в равенстве (5.10)

$$\mu_j(c, t) = -\sum_{i=1}^{n} b_i(t) \alpha_{ij}(c, t), \qquad \nu_j(c, t) = -\sum_{i=1}^{n} b_i(t) \beta_{ij}(c, t) \tag{5.18}$$

Для дальнейшего важно, что при уменьшении величины $c > 0$ до нуля, функция $w[c; 0, x, y]$ также убывает до нуля (при $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \text{const}$).

Именно справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.1. Пусть система

$$dx/dt = A(t)x + b(t)u \tag{5.19}$$

удовлетворяет на отрезке $[0, T]$ условиям L (стр. 223) полной управляемости. Тогда для любого числа $\Delta > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что

$$w[c; 0, x, y] < \Delta(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{5.20}$$

$$\int_0^T \{\max(w[c; t, x, y] \text{ при } \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1)\} dt < \Delta \tag{5.21}$$

если только $0 < c < \delta$.

Доказательство. Пусть дано число $\Delta > 0$. Выберем число ϑ так, чтобы выполнялись неравенства

$$w[c; t, x, y] < (\|x\|^2 + \|y\|^2)\zeta \quad (0 < c \leqslant 1,\ t \in [T - \vartheta, T]), \qquad \vartheta\zeta < \frac{\Delta}{4} \tag{5.22}$$

Здесь ζ — какое-нибудь фиксированное число, большее единицы. Число $\vartheta > 0$ выбрать можно. Действительно

$$w[c; t, x, y] \leqslant J[c; t, x, y; u = 0] = \|x(x, y, t, T)\|^2 \tag{5.23}$$

где $x(x, y, t, \tau)$ — решение системы (5.1), порожденное начальными условиями $x(t) = x$, $y(t) = y$ (при $t \leqslant \tau \leqslant T$, $u = 0$).

Решения системы (5.1) при $u = 0$ удовлетворяют неравенству ([19], стр. 23)

$$\|x(x, y, t, \tau)\|^2 \leqslant (\|x\|^2 + \|y\|^2)\, e^{4nK(\tau - t)} \tag{5.24}$$

где $K = \max\{|a_{ij}(t)|, |m_{ij}(t)|\}$; поэтому из (5.23) следует неравенство

$$w[c; t, x, y] \leqslant (\|x\|^2 + \|y\|^2)\, e^{4nK(\tau - t)} \tag{5.25}$$

Из (5.25) следует возможность выбора числа ϑ и оценки его. Итак, пусть такое число $\vartheta > 0$ выбрано.

Рассмотрим вспомогательную задачу.

Задача $C(\tau)$. Даны момент $\tau \in [0, T]$ и точка x_0, y_0 $(\|x_0\|^2 + \|y_0\|^2 = 1)$. Требуется найти управление $u_\tau(t)$ такое, что решение $x(t)$, $y(t)$ системы (5.1) удовлетворяет условиям

$$x(\tau) = x_0, \qquad y(\tau) = y_0, \qquad x(T) = 0 \tag{5.26}$$

$$\int_\tau^T u_\tau^2(t)\, dt = \min \tag{5.27}$$

Наметим коротко решение задачи $C(\tau)$ в соответствии с тем методом, который был указан для решения таких задач в работе [20]. Решение $x(t)$ второго уравнения (5.1) запишем по формуле Коши (при $t = T$)

$$x(T) = F(T, \tau)x_0 + \int_\tau^T F(T, \tau)F^{-1}(t, \tau)\{[A(t) - M(t)]y(t) + b(t)u(t)\}dt \tag{5.28}$$

где $F(t, \tau)$ — фундаментальная матрица $(F(\tau, \tau) = E)$ системы (5.19) (при $u = 0$). Так как $y(t) = M(t, \tau)y_0$, где $M(t, \tau)$ — фундаментальная матрица

($M(\tau, \tau) = E$) первого уравнения (5.1), и так как в момент $t = T$ должно быть $x = 0$, то из (5.28) следует уравнение для $u_\tau(t)$ (после умножения (5.28) на $F^{-1}(T, \tau)$)

$$x_0 + \int_\tau^T F^{-1}(t, \tau)\{[A(t) - M(t)]M(t, \tau)y_0 + b(t)u_\tau(t)\}\,dt = 0 \qquad (5.29)$$

причем должно выполняться условие (5.27). Решение задачи (5.27), (5.29) описано в статье [20]. Решение $u_\tau(t)$ задачи существует при условии полной управляемости системы (5.19) и определяется из условий

$$u_\tau(t) = \lambda^2[x_0, y_0, \tau]\sum_{i=1}^n \lambda_i^\circ h_i(t, \tau) \qquad (5.30)$$

Здесь

$$\lambda^{-2}[x_0, y_0, \tau] = \min\left\{\int_\tau^T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i h_i(t, \tau)\right)^2 dt\right\} \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^n f_i\lambda_i = 1 \qquad (5.31)$$

$$f = x_0 + \left[\int_\tau^T F^{-1}(t, \tau)[A(t) - M(t)]M(t, \tau)\,dt\right]y_0 \qquad (5.32)$$

$$h(t, \tau) = F^{-1}(t, \tau)\,b(t)$$

и λ_i° — решения задачи (5.31), (5.32). Задача (5.31), (5.32) — это задача о минимуме квадратичной формы (5.31) от переменных λ_i при линейном условии (5.32). Решение такой задачи хорошо известно.

Для дальнейшего важно, что величина (5.27) равномерно ограничена при $\tau \in [0, T - \vartheta]$, $\|x_0\|^2 + \|y_0\|^2 = 1$ при каждом $\vartheta > 0$. В самом деле из (5.30) и (5.31) следует, что

$$\min\left[\int_\tau^T u^2(t)\,dt\right] = \int_\tau^T u_\tau^2(t)\,dt = \lambda^2[x_0, y_0, \tau] \qquad (5.33)$$

Но величина $\lambda^2[x_0, y_0, \tau]$ ограничена на отрезке $\tau \in [0, T - \vartheta]$ равномерно сверху, так как величина (5.31) при $\tau \in [0, T - \vartheta]$ ограничена снизу положительным числом. В самом деле эта величина непрерывна по τ и вследствие полной управляемости положительна при всех $\tau \in (0, T)$.

Вернемся теперь непосредственно к доказательству леммы 5.1.

Выберем число $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta \max[T, 1] < \min\left[\frac{\Delta}{4\lambda^2} \text{ при } \tau \in [0, T - \vartheta]\right] \qquad (5.34)$$

Так как справедливо неравенство

$$w[c; \tau, x_0, y_0] = \min J[c; x(\tau)]$$

$$[y(\tau); u] \leqslant J[c; x(\tau), \ y(\tau), u_\tau] = c\lambda^2[x(\tau), y(\tau), \tau] \qquad (x(\tau) = x_0, \ y(\tau) = y_0)$$

то при $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$, $0 \leqslant t \leqslant T - \vartheta$ и при $c < \delta$ справедливы неравенства

$$w[c; t, x, y] < \frac{\Delta}{4T}, \qquad w[c; 0, x, y] < \frac{\Delta}{4} \qquad (5.35)$$

Неравенства (5.22) и (5.35) доказывают лемму.

§ 6. Доказательство теоремы 3.1. Построим функции v и u°, удовлетворяющие условиям теоремы 4.1. Выберем число c_0 столь малым, чтобы выполнялись условия

$$w[c_0;\ 0, x, y] < \frac{\varepsilon^2(1-p)(\|x\|^2+\|y\|^2)}{8N^2} \tag{6.1}$$

$$\int_0^T \varphi(t)\,\sigma^2(t)\,dt < \frac{\varepsilon^2(1-p)}{8n^2}$$
$$\varphi(t) = \max\{|\alpha_{ij}(c_0, t)|, |\beta_{ij}(c_0, t)|, \gamma_{ij}(c_0, t)|\} \tag{6.2}$$

Такое число c_0 можно выбрать вследствие леммы 5.1.

Положим

$$v[t, x, y] = w[c_0;\ t, x, y] + \int_t^T (2n)^2\sigma^2(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \tag{6.3}$$

$$u^\circ[t, x, y] = u^*[c_0;\ t, x, y] \tag{6.4}$$

При таком выборе функции v и u° удовлетворяют условиям теоремы 4.1, а следовательно, и условиям теоремы 3.1. В самом деле, вследствие (5.4), (6.1) и (6.2) функция v удовлетворяет условию

$$v[0, x, y] < (1-p)\,\varepsilon^2, \qquad v[T, x, y] = \|x(T)\|^2$$

Производная $(dM\{v\}/dt;\ (1.1), (1.6), u^\circ = u^*)$ отличается от производной $(d\{v\}/dt;\ (5.1),\ u^\circ = u^*)$ на слагаемое

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j} - 2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial y_j} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_i\,\partial y_j}\right]\sigma_{ij}$$

поэтому

$$\left(\frac{dM\{v\}}{dt};\ (1.1),\ (1.6),\ u^\circ = u^*\right) = -c_0(u^\circ)^2 - 4n^2\sigma^2(t)\,\varphi(t) + \tag{6.5}$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}[\alpha_{ij}(c_0, t) - 2\beta_{ij}(c_0, t) + \gamma_{ij}(c_0, t)]\,\sigma_{ij} < -c_0(u^\circ)^2 < 0$$

Итак, действительно выполняются условия теоремы 4.1. Это означает, что функция $u^\circ = u^*[c_0, t, x, y]$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1, что и доказывает эту теорему.

Отметим, что построенное управление u° обладает одним минимальным свойством, а именно управление $u^\circ = u^*$ минимизирует функционал

$$J^* = M\left\{\int_0^T\left[c_0u^2(t) + 4n^2\sigma^2(t)\,\varphi(t) -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{i,j=1}^{n}[\alpha_{ij}(c_0, t) - 2\beta_{ij}(c_0, t) + \gamma_{ij}(c_0, t)]\,\sigma_{ij}(t, y(t))\right]dt + \|x(T)\|^2\right\}$$

причем

$$\min J^* = v[0, x, y] \tag{6.6}$$

Отметим в заключение следующее обстоятельство. Управление u°, решающее задачу преследования A, строится по правилу: в каждый момент $t = \tau$ при реализовавшихся значениях $x(\tau)$, $y(\tau)$ управление $u^\circ[\tau, x(\tau), y(\tau)]$ совпадает с управлением $u^*[c_0, \tau, x(\tau), y(\tau)]$, которое является решением вспомогательной задачи $B(c)$ оптимального управления (и которое также обеспечивает приведение точки $x(t)$ в малую окрестность точки $x = 0$ в момент $t = T$).

Управление u^* — это оптимальное управление для системы (5.1), минимизирующее (5.2), где функция $y(t)$ при $t > \tau$ является детерминированной и совпадает с $M\{y(t)|y(\tau)\}$ стохастической системы. Иначе говоря, управление u° в стохастической задаче преследования строится в каждый момент $t = \tau$ в точке $x(\tau)$, $y(\tau)$ так же, как оно строилось бы в некоторой аналогичной детерминированной задаче преследования, где будущее поведение преследуемого движения $y(t)$ $(t > \tau)$ совпадало бы с прогнозом будущего математического ожидания преследуемого движения. При этом естественно управление $u^\circ = u^*$ должно выбираться достаточно сильным (число $c = c_0$ во вспомогательной задаче $B(c)$ должно быть достаточно малым).

Примером задачи, рассматриваемой в статье, может служить задача о приведении за время T управляемого (изменениями момента) вращающегося тела в соответствие (по углу и скорости поворота) с вращающимся телом, подверженным случайным импульсным моментам.

Поступила 21 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Д у б Дж. Вероятностные процессы. ИИЛ, 1956.
2. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
3. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1956.
4. Б е л л м а н Р. Динамическое программирование. ИИЛ, 1960.
5. B e l l m a n R. Dinamic programming and stochastic control processes. Information and control. 1958, vol. 1, pp. 228—239.
6. Б е л л м а н Р., К а л а б а Р. Теория динамического программирования и системы управления с обратной связью. Тр. I Конгресса ИФАК. Т. 1, Изд-во АН СССР, 1961.
7. К р а с о в с к и й Н. Н. Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.
8. Г и р с а н о в И. В. Минимаксные задачи в теории диффузионных процессов. ДАН СССР, 1960, т. 136, № 4.
9. К р а с о в с к и й Н. Н., Л и д с к и й Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 9, 11.
10. П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
11. К р а с о в с к и й Н. Н. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика. 1957, т. XVIII, № 11.
12. К и р и л л о в а Ф. М. О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. Изв. вузов, Математика, 1958, № 4.
13. La S a l l e I. P. Time optimal control systems. Proc. of the National Acad. of Sci. vol. 45, 1958, N 4.
14. К а л м э н Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Конгресса ИФАК. Т. 1, Изд-во АН СССР, 1961.
15. Д ы н к и н Е. Б. Марковские процессы и полугруппы операторов. Теория вероятностей и ее применение. 1956, т. I, № 1.
16. Л е т о в А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. IV. Автоматика и телемеханика. 1961, т. XXII, № 4.
17. K a l m a n R. E. New Methods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory. RIAS Technical Report, 61—1.
18. М е р р и а м К. У. Вычисления, связанные с одним классом оптимальных систем управления. Тр. I конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, 1961.
19. Н е м ы ц к и й В. В., С т е п а н о в В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2, Гостехиздат, 1959.
20. К р а с о в с к и й Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.