Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В БОЛЬШОМ РЕШЕНИЙ СЧЕТНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НЕПРЕРЫВНО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

С. И. Горшин
(Алма-Ата)

1. Постановка задачи. Рассмотрим счетную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \omega_s(t, x_1, x_2, \ldots) + f_s(t, x_1, x_2, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \qquad (1.1)$$

Здесь t — вещественная независимая переменная, $x_1, x_2, \ldots$ — вещественные искомые функции от t; $\omega_1, \omega_2, \ldots$ — заданные вещественные функции величин $t, x_1, x_2, \ldots$ — в некоторой области их изменения

$$t \geqslant 0, \qquad \sup [\,|x_1|,\ |x_2|, \ldots] \leqslant L \qquad (1.2)$$

Функции $f_1, f_2, \ldots$, называемые в дальнейшем возмущениями, вообще говоря, неизвестны, но удовлетворяют в области (1.2) условию

$$|f_s(t,\ x_1, x_2, \ldots)| \leqslant \rho \qquad (s = 1, 2, \ldots) \qquad (1.3)$$

где $\rho > 0$ — некоторая величина, определяемая в каждом отдельном случае, в зависимости от рассматриваемой задачи.

Допустим, что правые части системы уравнений (1.1) удовлетворяют в области (1.2) следующим условиям:

1) Функции ω_s и f_s однозначны и непрерывны по t во всякой точке области (1.2).

2) Для любых двух точек $(t, x_1', x_2', \ldots)$ и $(t, x_1'', x_2'', \ldots)$ имеет место неравенство

$$|\,\omega_s(t, x_1'', x_2'', \ldots) - \omega_s(t, x_1', x_2', \ldots)| \leqslant A\Delta x \qquad (s = 1, 2, \ldots) \quad (1.4)$$

где A — некоторая постоянная, а $\Delta x = \sup [\,|x_1'' - x_1'|, |x_2'' - x_2'|, \ldots]$. Неравенству (1.4) удовлетворяют и возмущения f_s.

Известно [1], что при наложенных условиях на правые части системы уравнений (1.1) эта система допускает решения, причем каждое равностепенно непрерывное решение, проходящее через заданную точку $(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots)$ области (1.2), будет единственное. При этом решение будет существовать, по крайней мере, при всех тех значениях $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, при которых норма его не превосходит числа L.

Будем рассматривать следующие три области, которые в дальнейшем будем называть «кольцами»:

$$t \geqslant 0, \qquad l_0 \leqslant \sup [\,|x_1|,\ |x_2|, \ldots] \leqslant l \qquad (1.5)$$

$$t \geqslant 0, \qquad l \leqslant \sup [\,|x_1|,\ |x_2|, \ldots] \leqslant L \qquad (1.6)$$

$$t \geqslant 0, \qquad l_0 \leqslant \sup [\,|x_1|,\ |x_2|, \ldots] \leqslant L \qquad (1.7)$$

Наряду с системой уравнений (1.1) будем рассматривать систему дифференциальных уравнений без возмущений

$$\frac{dx_s}{dt} = \omega_s(t, x_1, x_2, \dots) \qquad (s = 1, 2, \dots) \tag{1.8}$$

Определение 1.1. Решения системы уравнений (1.8) будем называть устойчивыми в большом при постоянно действующих возмущениях, если при любом начальном значении $t = t_0 \geqslant 0$ можно указать число $\rho = \rho(t_0) > 0$ такое, что всякое решение системы уравнений (1.1), проходящее через любую точку области

$$\sup[|x_1|, |x_2|, \dots] \leqslant l$$

будет удовлетворять неравенству

$$\sup[|x_1|, |x_2|, \dots] < L$$

при всех $t > t_0$ и любых возмущениях, лишь бы последние удовлетворяли (1.3). В противном случае будем говорить, что решения уравнений (1.8) неустойчивы в большом и при постоянно действующих возмущениях.

Если имеет место устойчивость, а число $\rho > 0$ можно выбрать независимо от величины $t_0 > 0$, то решения системы уравнений (1.8) будем называть равномерно устойчивыми в большом и при постоянно действующих возмущениях.

Определение 1.2. Будем говорить, что решения системы уравнений (1.8) обладают полной сильной неустойчивостью в большом при постоянно действующих возмущениях, если при любом, сколь угодно малом числе $\rho > 0$, решение системы уравнений (1.1), проходящее через произвольно взятую точку $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots)$, удовлетворяющее условию

$$\sup[|x_{10}|, |x_{20}|, \dots] = l$$

будет удовлетворять при любых возмущениях и при некотором значении $t > t_0$ неравенству

$$\sup[|x_1|, |x_2|, \dots] \geqslant L$$

2. Некоторые теоремы. Будем рассматривать вещественные функции $V(t, x_1, x_2, \dots)$ переменных $t, x_1, x_2, \dots$, определенные и непрерывные в кольце (1.7).

Определение 2.1. Функция $V(t, x_1, x_2, \dots)$ называется знакопостоянной, если в кольце (1.7) выполняется неравенство

$$V(t, x_1, x_2, \dots) \geqslant 0 \qquad (\text{или } V(t, x_1, x_2, \dots) \leqslant 0)$$

Определение 2.2. Знакопостоянная функция $V(t, x_1, x_2, \dots)$ в кольце (1.7) называется знакоопределенной, если ее $\sup[|V(t, x_1, x_2, \dots)|]$ при $t \geqslant 0$ на поверхности $\sup[|x_1|, |x_2|, \dots] = l$ не больше ее $\inf[|V(t, x_1, x_2, \dots)|]$ на поверхности $\sup[|x_1|, |x_2|, \dots] = L$.

Определение 2.3. Знакопостоянная функция $V(t, x_1, x_2, \dots)$ называется вполне знакоопределенной, если в кольце (1.7) выполняется неравенство

$$V(t, x_1, x_2, \dots) \geqslant \beta \qquad (\text{или } -V(t, x_1, x_2, \dots) \geqslant \beta)$$

где $\beta > 0$ — некоторая постоянная.

Будем предполагать, что функция $V(t, x_1, x_2, \ldots)$ в области (1.2) удовлетворяет условию Липшица

$$|V(t+\Delta t, x_1'', x_2'', \ldots) - V(t, x_1', x_2', \ldots)| \leqslant k(|\Delta t| + \Delta x) \qquad (2.1)$$

где $k > 0$ — некоторая постоянная, а $\Delta x = \sup[|x_1'' - x_1'|, |x_2'' - x_2'|, \ldots]$. Тогда на основании [2] следует, что функция $V(t, x_1, x_2, \ldots)$ имеет в области (1.2.) вдоль любой интегральной линии системы уравнений (1.1) или системы уравнений (1.8) полную производную по t (почти для всех значений t), которую будем обозначать соответственно через dV/dt и V', причем эти производные восстанавливают первообразные, т. е. имеют место равенства

$$V = V(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt} d\tau, \qquad V = V(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots) + \int_{t_0}^{t} V' d\tau$$

где интегралы рассматриваются в смысле Лебега; причем для определенности можем рассматривать

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_+, \quad \left(\frac{dV}{dt}\right)_-; \quad V_+', \quad V_-'$$

которые существуют в каждой точке интегральной линии и почти для всех t равны, соответственно, dV/dt и V'.

Теорема 2.1. Пусть функция $V(t, x_1, x_2, \ldots)$ удовлетворяет в (1.6) условию (2.1). Тогда в кольце (1.6) имеют место неравенства

$$\left|\frac{dV}{dt} - V_+'\right| \leqslant k\rho, \qquad \left|\frac{dV}{dt} - V_-'\right| \leqslant k\rho$$

почти во всех точках любой интегральной линии системы уравнений (1.1).

Доказательство. Пусть $y_1, y_2, \ldots$ есть решение системы уравнений без возмущений (1.8), проходящее через произвольно взятую точку $(t, x_1, x_2, \ldots)$ области (1.2), а $z_1, z_2, \ldots$ — решение системы уравнений (1.1), проходящее через ту же точку $(t, x_1, x_2, \ldots)$, что и решение системы без возмущений. Тогда будем иметь

$$z_s = x_s + \int_t^{t+\Delta t} \omega_s(\tau, z_1, z_2, \ldots) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} f_s(\tau, z_1, z_2, \ldots) d\tau$$

$$y_s = x_s + \int_t^{t+\Delta t} \omega_s(\tau, y_1, y_2, \ldots) d\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Обозначая через $w_s = z_s - y_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$, получим

$$w_s = \int_t^{t+\Delta t} [\omega_s(\tau, z_1, z_2, \ldots) - \omega_s(\tau, y_1, y_2, \ldots) + f_s(\tau, z_1, z_2, \ldots)] d\tau$$

$$(s = 1, 2, \ldots)$$

а отсюда следует, что

$$|w_s| \leqslant \int_t^{t+\Delta t} A\|w\| d\tau + \rho\Delta t \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно

$$\|w\| \leqslant \int_t^{t+\Delta t} A\|w\|d\tau + \rho\Delta t \tag{2.2}$$

полагая для определенности $\Delta t > 0$, и где $\|w\| = \sup[|w_1|, |w_2|, \ldots]$.

Пусть u есть решение уравнения

$$u = \int_t^{t+\Delta t} Au\,d\tau + \rho\Delta t$$

тогда очевидно, что $\|w\| \leqslant u$, т. е.

$$\|w\| \leqslant \frac{e^{A\Delta t}-1}{A}\rho$$

Пусть γ — произвольно взятая интегральная линия системы уравнений (1.1). Так как dV/dt вдоль указанной интегральной линии существует почти для всех значений t, то пусть в точке $(t, x_1, x_2, \ldots)$ существует dV/dt. Тогда выражения dV/dt и V_+' можно записать в следующем виде:

$$\frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{V(t+\Delta t, z_1, z_2, \ldots) - V(t, x_1, x_2, \ldots)}{\Delta t} \tag{2.3}$$

$$V_+' = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{V(t+\Delta t, y_1, y_2, \ldots) - V(t, x_1, x_2, \ldots)}{\Delta t} \tag{2.4}$$

понимая под выражением $\Delta t \to 0$ совокупность тех значений $\Delta t \to 0$, для которых существует предел V_+'.

На основании условия (2.1) и неравенства (2.2) будем иметь

$$|V(t+\Delta t, z_1, z_2, \ldots) - V(t+\Delta t, y_1, y_2, \ldots)| \leqslant k\|w\| \leqslant k\frac{e^{A\Delta t}-1}{A}\rho$$

Тогда из (2.3) и (2.4) получим

$$\left|\frac{dV}{dt} - V_+'\right| \leqslant k\rho$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\left|\frac{dV}{dt} - V_-'\right| \leqslant k\rho$$

Теорема 2.2. Если система дифференциальных уравнений без возмущений такова, что существует в кольце (1.6) знакоопределенная функция $V(t, x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющая условию Липшица (2.1), производная которой $V'(t, x_1, x_2, \ldots)$ в силу этих уравнений была бы в кольце (1.6) вполне знакоопределенной функцией противоположного знака с $V(t, x_1, x_2, \ldots)$, то решения системы устойчивы в большом и при постоянно действующих возмущениях.

Доказательство. Для определенности будем считать, что функция $V(t, x_1, x_2, \ldots)$ в кольце (1.6) будет положительной знакоопределенной, тогда ее производная $V'(t, x_1, x_2, \ldots)$ будет отрицательной вполне знакоопределенной функцией, удовлетворяющей в кольце (1.6) условию $-V'(t, x_1, x_2, \ldots) \geqslant \beta$. Тогда на основании теоремы 2.1 будем иметь

$$-\frac{dV}{dt} \geqslant -V' - k\rho \geqslant \beta - k\rho \geqslant \frac{\beta}{2}$$

если величину ρ выбрать так, что $\rho < \beta / 2k$. Следовательно, в кольце (1.6) имеет место неравенство

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\frac{\beta}{2}$$

Допустим, что у системы уравнений (1.1) существует такое решение $y_s = y_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, которое на некотором сегменте $[t', t'']$ удовлетворяет условиям

$$\sup [\,|y_1(t')|, \; |y_2(t')|, \ldots] = l, \qquad \sup [\,|y_1(t'')|, \; |y_2(t'')|, \ldots] = L$$

а на интервале (t', t'') условию

$$l < \sup [\,|y_1(t)|, \; |y_2(t)|, \ldots] < L$$

Тогда будем иметь

$$V_{t''} = V_{t'} + \int\limits_{t'}^{t''} \frac{dV}{dt}\, d\tau \leqslant V_{t'} - \frac{\beta}{2}(t'' - t') < V_{t'} \leqslant \gamma_l \tag{2.5}$$

$$V_{t''} \geqslant \gamma_L \tag{2.6}$$

Здесь

$$\gamma_l = \sup \; [V(t, x_1, x_2, \ldots)] \quad \text{при } \sup [\,|x_1|, \; |x_2|, \ldots] = l$$
$$\gamma_L = \inf \; [V(t, x_1, x_2, \ldots)] \quad \text{при } \sup [\,|x_1|, \; |x_2|, \ldots] = L$$

Так как по условию теоремы $\gamma_l \leqslant \gamma_L$, то неравенства (2.5) и (2.6) несовместны, и, следовательно, допущение о неустойчивости невозможно, т. е. имеет место устойчивость и притом, как легко видеть, равномерная.

Теорема 2.3. Если система дифференциальных уравнений без возмущений такова, что существует такая знакопостоянная и ограниченная в кольце (1.7) функция $V(t, x_1, x_2, \ldots)$, которая в указанном кольце (1.7) удовлетворяет условию (2.1), причем в кольце (1.5) эта функция является знакоопределенной, а полная производная этой функции $V'(t, x_1, x_2, \ldots)$ в силу этих уравнений является в кольце (1.7) функцией вполне знакоопределенной одного знака с функцией $V(t, x_1, x_2, \ldots)$, то решения системы будут обладать полной сильной неустойчивостью в большом и при постоянно действующих возмущениях.

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что функция $V(t, x_1, x_2, \ldots)$ в кольце (1.5) является положительной знакоопределенной, тогда ее производная $V'(t, x_1, x_2, \ldots)$ в том же кольце будет вполне знакоопределенной положительной функцией.

По условию теоремы, если положим

$$\gamma_{l_0} = \sup [V(t, x_1, x_2, \ldots] \quad \text{при } t \geqslant 0, \; \sup [\,|x_1|, \; |x_2|, \ldots] = l_0$$

то будут иметь место неравенства

$$\gamma_{l_0} \leqslant \gamma_l = \inf [V(t, x_1, x_2, \ldots)] \quad \text{при } t \geqslant 0, \; \sup [\,|x_1|, \; |x_2|, \ldots] = l$$

$$V' \geqslant \beta \quad \text{при } t \geqslant 0, \; l_0 \leqslant \sup [\,|x_1|, \; |x_2|, \ldots] \leqslant L$$
$$V \leqslant M \quad \text{при } t \geqslant 0, \; l_0 \leqslant \sup [\,|x_1|, \; |x_2|, \ldots] \leqslant L$$

Пусть

$$x_1 = y_1(t), \qquad x_2 = y_2(t), \ldots \tag{2.7}$$

есть решение системы уравнений (1.1), проходящее через произвольную точку $(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots)$, удовлетворяющую условию

$$\sup [\,|x_{10}|,\ |x_{20}|, \ldots] = l$$

Допустим $[t_0, t_1]$ есть такой сегмент, что при всех значениях t, удовлетворяющих неравенству $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, имеют место неравенства

$$l_0 \leqslant \sup [\,|y_1(t)|,\ |y_2(t)|, \ldots] \leqslant L$$

Тогда на основании теоремы 2.1 на сегменте $[t_0, t_1]$ вдоль интегральной линии (1.1) будем иметь $dV/dt \geqslant \beta/2$ почти для всех значений t, указанного сегмента, если только $\rho \leqslant \beta/2k$.

При $t \in [t_0, t_1]$ имеем

$$V_t = V_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt} d\tau \geqslant V_{t_0} + \frac{\beta}{2}(t - t_0) > V_{t_0} \geqslant \gamma_l \geqslant \gamma_{l_0}$$

т. е.

$$V_t > V_{l_0} \tag{2.8}$$

Следовательно, при всех значениях $t \in [t_0, t_1]$ имеет место неравенство $\sup [\,|y_1(t)|,\ |y_2(t)|, \ldots] > l_0$; в противном случае при некотором значении $t > t_0$ имело бы место неравенство $V_t \leqslant V_{l_0}$, что противоречит неравенству (2.8).

С другой стороны, для указанных значений $t \in [t_0, t_1]$ будут иметь место неравенства

$$M \geqslant V \geqslant \gamma_{l_0} + \frac{\beta}{2}(t - t_0) \tag{2.9}$$

Так как правая часть неравенства (2.9) не может иметь места при значениях

$$t > 2\frac{M - \gamma_{l_0}}{\beta} + t_0$$

то найдется такое значение

$$t = t'' > t_0 \qquad \left(t'' < 2\frac{M - \gamma_{l_0}}{\beta} + t_0\right),$$

что будет иметь место равенство

$$\sup [\,|y_1(t'')|,\ |y_2(t'')|, \ldots] = L$$

Отсюда следует, что решения системы уравнений (1.8) обладают полной сильной неустойчивостью в большом и при постоянно действующих возмущениях.

Поступила 1 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Персидский К. П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений. Изв. АН Каз. ССР, 1948, вып. 2.
2. Персидский К. П. Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решения. Изв. АН Каз. ССР, 1961, вып. 9.
3. Халиков Х. С. Об устойчивости «в большом» интегралов дифференциальных уравнений. Изв. Казан. физ.-матем. общ-ва, 1937, т. IX.
4. Матуцина О. Некоторые вопросы устойчивости «в большом». Уч. зап. Казахск. ун-та, 1950, т. XIII, вып. 3.
5. Матуцина О. Об устойчивости «в большом» решений счетной системы дифференциальных уравнений. Уч. зап. Казахск. ун-та, 1952, т. XIV, вып. 3.