Прикладная математика и механика, Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЧАПЛЫГИНА

И. Л. Хмелевский

(Москва)

В статье «К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе» Чаплыгин [1] указал для одного класса неголономных систем некоторый интегральный вариационный принцип.

Пусть ξ, η, q, q_1 — лагранжевы координаты материальной системы, стесненные двумя неголономными уравнениями связей

$$\xi' = aq' + a_1 q_1', \qquad \eta' = bq' + b_1 q_1'$$

с коэффициентами a, a_1, b, b_1, не зависящими от ξ, η и времени t. Пусть живая сила T и силовая функция U также не зависят от ξ, η и t.

Вводя новое независимое переменное τ уравнением $N\,dt = d\tau$, Чаплыгин выбирает функцию $N(q, q_1)$ — «приводящий множитель» — таким образом, чтобы уравнения движения системы в пространстве q, q_1, τ всегда имели вид канонических уравнений. Для этого функция N должна тождественно по импульсам $p = \partial T^* / \partial \dot{q}$, $p_1 = \partial T^* / \partial \dot{q}_1$ удовлетворять условию

$$NS - \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_1} \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial q} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}} \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial q_1} = 0 \tag{0.1}$$

Здесь

$$\dot{q} = \frac{dq}{d\tau}, \qquad \dot{q}_1 = \frac{dq_1}{d\tau}, \qquad S = \frac{\partial T}{\partial \xi'}\left(\frac{\partial a}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q}\right) + \frac{\partial T}{\partial \eta'}\left(\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial b_1}{\partial q}\right)$$

а $T^*(q, q_1, \dot{q}, \dot{q}_1)$ — приведенное выражение живой силы. При такой функции N в пространстве q, q_1, τ справедлив интегральный вариационный принцип Гамильтона

$$\delta \int_0^{\tau_1} (T^* + U)\, d\tau = 0$$

Возвращаясь к времени t, Чаплыгин получает теорему: при существовании приводящего множителя N, определяемого условием (0.1), от всех движений, возможных при свободном изменении параметров q, q_1 между определенными их предельными значениями, действительное отличается тем, что вариация интеграла

$$\delta \int_0^{t_1} (T^{**} + U)\, N\, dt = 0$$

обращается в нуль при условии постоянства интеграла

$$\tau_1 = \int_0^{t_1} N\, dt$$

Здесь $T^{**}(q, q_1, q', q_1')$ — приведенное выражение живой силы.

Теорема Чаплыгина имеет двоякое значение. Во-первых, она устанавливает, что действительные движения некоторых неголономных систем в пространстве свободных координат q, q_1 обладают определенным экстремальным свойством. Во-вторых, она позволяет применить для нахождения этих движений метод интегрирования Гамильтона — Якоби.

Ниже делается попытка распространить результаты Чаплыгина на возможно более широкий класс неголономных систем и на пространство всех лагранжевых переменных.

1. Имеем некоторую материальную систему. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — ее лагранжевы координаты, стесненные неголономными, вообще говоря, уравнениями связей

$$\omega_\beta = q_\beta' + \sum_{r=1}^{n-m} a_{\beta, m+r} q_{m+r}' + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

с коэффициентами $a_{\beta, m+r}$, a_β, зависящими от всех координат точек $q_1, \ldots, q_n$ и времени t.

Движение $q_s = \varphi_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ материальной системы называется кинематически допустимым, если функции $\varphi_s(t)$ тождественно удовлетворяют уравнениям связей.

Пусть

$$F = \frac{1}{2} \sum_{s, k=1}^{n} b_{sk} q_s' q_k' + \sum_{s=1}^{n} c_s q_s' + P \tag{1.2}$$

Здесь b_{ks}, c_s, P — некоторые функции координат и времени. Рассмотрим, при каких коэффициентах функции F и каких граничных условиях множество действительных движений системы совпадает с множеством экстремалей условной вариационной задачи

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} F\, dt = 0 \qquad \text{при } \omega_\beta = 0 \tag{1.3}$$

2. Предположим, что действительные движения системы определяются вариационной задачей (1.3). Выясним, каким необходимым условиям должны удовлетворять в этом случае граничные условия задачи (1.3).

Пусть $\lambda_\beta(t)$ — множители Лагранжа задачи (1.3). Выделим в ее уравнениях Эйлера члены с q_k'' $(k = 1, \ldots, n)$; получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_s' \, \partial q_k'} q_k'' + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_s' \, \partial q_k} q_k' + \frac{\partial^2 F}{\partial q_s' \, \partial t} - \frac{\partial F}{\partial q_s} +$$
$$+ \sum_{\beta=1}^{m} \lambda_\beta' a_{\beta s} + \sum_{\beta=1}^{m} \lambda_\beta \left(a'_{\beta s} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial q_s} \right) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Здесь

$$a_{\beta s} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = \beta \\ 0 & \text{при } m > s \neq \beta \\ a_{\beta, m+r} & \text{при } s = m + r \end{cases}$$

Уравнения связей дают

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\beta k} q_k'' + \sum_{k=1}^{n} a'_{\beta k} q'_k + a_\beta' = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

Исключим особый случай, предположив, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \| \partial^2 F_k / \partial q_s' \, \partial q_k' \| & \| a_{\beta s} \| \\ \| a_{\beta k} \| & \| 0 \| \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.3}$$

Тогда из уравнений (2.1), (2.2), однозначно имеем

$$q_k'' = \frac{\Delta_k}{\Delta} = Q_k(q, q', t, \lambda) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$
$$\lambda_\beta' = \frac{\Delta_{n+\beta}}{\Delta} = \Lambda_{n+\beta}(q, q', t, \lambda) \qquad (\beta = 1, \ldots, m) \tag{2.4}$$

Здесь Δ_k, $\Delta_{n+\beta}$ получаются из определителя Δ заменой элементов k-го или $n+\beta$-го столбцов свободными членами уравнений (2.1), (2.2).

В механике имеет место «обобщенный принцип инерции» (по терминологии А. Пуанкаре): ускорения точек механической системы в каждый момент времени могут быть однозначно определены, если в этот момент известны действующие силы, связи и величины всех координат и скоростей точек[1].

По предположению, действительные движения системы определяются вариационной задачей (1.3). Рассмотрим в смысле этого принципа уравнения (2.4). «Обобщенный принцип инерции» требует, чтобы множители λ_β, входящие в функции Q_k, полностью определялись значениями t, q, q' в данный момент независимо от начальных условий. Из m первых интегралов уравнений экстремалей возможно найти λ_β как функции t, q, q' и m постоянных интегрирования k_γ. Постоянные k_γ определяются граничными условиями задачи и поэтому, вообще говоря, различны для разных экстремалей.

Механический «обобщенный принцип инерции» может быть удовлетворен лишь в двух случаях.

Во-первых, если на всех экстремалях множители λ_β имеют одни и те же постоянные k_γ. Тогда первые интегралы уравнений экстремалей определяют

$$\lambda_\beta = \lambda_\beta(t,\, q,\, q')$$

Во-вторых, если для всех кинематически допустимых движений[2] множители λ_β не входят в функции Q_k. Это имеет место только при интегрируемых уравнениях связей [2].

Итак, для того чтобы действительные движения неголономной системы описывались вариационной задачей (1.3), ее граничные условия должны удовлетворять особым требованиям. Они должны быть таковы, чтобы множители λ_β, определенные из первых интегралов уравнений экстремалей, на всех экстремалях имели бы одинаковые постоянные интегрирования k_γ.

Отметим, например, что граничные условия принципа Гамильтона не удовлетворяют этому требованию.

Выясним, при каких граничных условиях вариационных задач (1.3) выполняется указанное необходимое условие.

Рассмотрим материальную систему, у которой функция Лагранжа и уравнения связей (1.1) не зависят от координат $q_1, \ldots, q_m$.

Потребуем то же для функции F, определенной (1.2).

Тогда уравнения Эйлера (2.1) обладают m «циклическими интегралами»

$$\frac{\partial}{\partial q_\gamma'}\left(F + \sum_{\beta=1}^{m} \lambda_\beta \omega_\beta\right) = k_\gamma \qquad (\gamma = 1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

---

[1] Отсюда, в частности, следует оправдание при решении поставленной задачи условия (2.3).

[2] Так как действительные движения предполагаются неизвестными, то все утверждения формулируются для произвольных кинематически допустимых движений.

которые, учитывая (1.2) и (1.3), могут быть переписаны

$$\sum_{s=1}^{n} b_{\gamma s} q_s' + c_\gamma + \lambda_\gamma = k_\gamma \tag{2.6}$$

Выберем следующие граничные условия вариационной задачи (1.3)

$$q_s(t_0) = q_{s0}, \qquad q_{m+r}(t_1) = q_{m+r,\,1} \qquad (s = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, n-m) \tag{2.7}$$

при произвольных координатах $q_\beta\,(\beta = 1, \ldots, m)$ конечной точки M_1. Тогда в конечных точках M_1 экстремалей должны выполняться условия трансверсальности

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_\gamma'}\left(F + \sum_{\beta=1}^{m} \lambda_\beta \omega_\beta\right)\right]_{M_1} = 0 \qquad (\gamma = 1, \ldots, m) \tag{2.8}$$

дающие определенные значения произвольным постоянным k_γ из (2.5): $k_\gamma = 0$. Окончательно имеем вдоль всех экстремалей

$$\lambda_\gamma = -\sum_{s=1}^{n} b_{\gamma s} q_s' - c_\gamma \qquad (\gamma = 1, \ldots, m) \tag{2.9}$$

Рассмотрим теперь другой класс механических систем. Пусть лагранжевы координаты системы стеснены всего одним неголономным уравнением связи

$$\omega = q_1' + \sum_{r=1}^{n-1} a_{1+r} q_{1+r}' + a = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{2.10}$$

Пусть функция Лагранжа системы и уравнение связи не зависят от времени t. Потребуем то же для функции F. Тогда уравнения Эйлера (2.1) задачи обладают квадратичным первым интегралом

$$F - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_s'} q_s' + \lambda a = k \tag{2.11}$$

Освободим верхний предел интеграла (1.3), закрепляя вместе с тем координаты граничных точек

$$q_s(t_0) = q_{s0}, \qquad q_s(t) = q_{s1} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.12}$$

При выбранных граничных условиях в конечной точке M_1 должно выполняться условие трансверсальности

$$\left[F - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_s'} q_s' + \lambda a\right]_{M_1} = 0 \tag{2.13}$$

дающее определенное значение произвольной постоянной k из (2.11): $k = 0$. Окончательно имеем вдоль всех экстремалей

$$\lambda = \frac{1}{a}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_s'} q_s' - F\right) \qquad (a \neq 0) \tag{2.14}$$

Подставив теперь (2.9) или (2.14) в первые уравнения (2.4), получим систему вида

$$q_k'' = R_k(q, q', t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.15}$$

где R_k — некоторые функции. Очевидно, что подставленные значения λ_β, будучи определены из первых интегралов уравнений Эйлера, обращают вторые уравнения (2.4) в тождества. В уравнения (2.15) переменные входят через коэффициенты функции F, определенной (1.2).

3. По предположению, множество экстремалей — решений уравнений (2.15) — совпадает с множеством действительных движений — решений заданных уравнений движения

$$q_k'' = \Phi_k(q, q', t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

Очевидно, что для этого необходимо и достаточно совпадение функций Φ_k и R_k в силу уравнений связей[1]. Это требование — «эквивалентность уравнений (2.15) и (3.1)» — накладывает условия на коэффициенты функции F (1.2).

Запишем условия эквивалентности уравнений. Обозначим через

$$R_{k0}, \quad \Phi_{k0}, \quad R_{k,m+r}, \quad \Phi_{k,m+r}, \quad R_{k,m+r,m+\rho}, \quad \Phi_{k,m+r,m+\rho}, \quad R_{k,m+r,m+\rho,m+\tau}$$
$$(k = 1, \ldots, n; \; r, \rho, \tau = 1, \ldots, n-m)$$

коэффициенты при членах нулевого, первого, второго и третьего порядков относительно независимых скоростей в функциях R_k и Φ_k после исключения в них зависимых скоростей q_β' при помощи уравнений связей.

Условия эквивалентности согласно определению суть

$$R_{k0} = \Phi_{k0}, \quad R_{k,m+r} = \Phi_{k,m+r}, \quad R_{k,m+r,m+\rho} = \Phi_{k,m+r,m+\rho}$$
$$(k = 1, \ldots, n; \; r, \rho = 1, \ldots, n-m) \tag{3.2}$$

Так как в функции R_k, Φ_k для первого класса систем не входят члены третьего порядка относительно скоростей, то для них на этом уравнения обрываются. Для второго класса систем с множителем λ, определенным уравнением (2.14), нужно добавить еще уравнения

$$R_{k,1+r,1+\rho,1+\tau} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n; \; r, \rho, \tau = 1, \ldots, n-1) \tag{3.3}$$

Заметим, что для эквивалентности уравнений при всех $k = 1, \ldots, n$ достаточна их эквивалентность при $k = m+1, \ldots, n$. В самом деле, пусть в силу уравнений связей совпадают функции R_{m+r} и Φ_{m+r} $(r = 1, \ldots, n-m)$. Подставляя их в уравнения связей, получим искомое равенство остальных функций R_β и Φ_β $(\beta = 1, \ldots, m)$.

Поэтому в дальнейшем под уравнениями эквивалентности будем понимать последние уравнения (3.2), (3.3) при $k = m+1, \ldots, n$.

Примечание. Иногда можно так ввести в коэффициенты функции F некоторые постоянные, что часть членов в уравнениях $R_k - \Phi_k = 0$ уничтожается в силу первых интегралов уравнений движения. Это упрощает уравнения эквивалентности. Подобный прием будет применен в п. 4.

Остановимся сначала на первом классе неголономных систем.

Уравнения (3.2) представляют собой линейные неоднородные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций b_{sk}, c_s, P координат $q_{m+1}, \ldots, q_n$ и времени t — коэффициентов функции

$$F = \frac{1}{2} \sum_{s,k=1}^{n} b_{sk} q_s' q_k' + \sum_{s=1}^{n} c_s q_s' + P$$

Получаем следующую теорему.

---

[1] См. подстрочное примечание на стр. 203.

Теорема 3.1. Имеется материальная система с неголономными связями (1.1), не зависящими от циклических координат q_β ($\beta = 1, \ldots, m$). Если для нее существует решение уравнений эквивалентности (3.2), то среди всех кинематически допустимых движений системы, удовлетворяющих граничным условиям

$$q_s(t_0) = q_{s0}, \qquad q_{m+r}(t_1) = q_{m+r,\,1} \qquad (s = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, n-m)$$

всякое действительное движение отличается тем, что при нем

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} F\,dt = 0$$

Итак, необходимым и достаточным условием существования вариационной задачи (1.3) для уравнений движения неголономной системы будет существование решения уравнений эквивалентности. Существенно заметить, что для построения вариационной задачи достаточно знать какое-нибудь частное решение этих уравнений.

Теорема 3.1 устанавливает, что действительные движения неголономных систем могут обладать в пространстве всех координат $\{q_s\}$ определенным экстремальным по сравнению с иными кинематически допустимыми движениями свойством. Кроме того, теорема показывает, для какой именно вариационной задачи действительные движения системы служат экстремалями.

Заметим, что экстремали вариационной задачи, описывающей движение неголономной системы в пространстве всех координат $\{q_s\}$, не образуют поля.

4. В случае, когда уравнения эквивалентности допускают частное решение $b_{\beta k} = b_{k\beta} = c_\beta = 0$ ($\beta = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$), функция F (1.2) зависит только от независимых $q_{m+1}', \ldots, q_n'$. Этой функции F соответствует вариационная задача, описывающая движение неголономной системы в пространстве $\{q_{m+r}\}$. Зная ее, можно применить для решения последних $n-m$ уравнений движения неголономной системы все методы интегрирования, известные для голономных систем, в частности, метод Гамильтона — Якоби. Изменение координат $q_1, \ldots, q_m$ системы отыскивается затем квадратурами уравнений связей.

Этот случай обобщает теорему Чаплыгина, упомянутую во введении. Видоизменим формулировку этой теоремы. Вернемся к обозначениям введения. Вариационную задачу Чаплыгина можно отнести к изопериметрическим задачам об экстремуме интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} (T^{**} + U)\,N\,dt \tag{4.1}$$

при условии

$$\tau_1 = \int_{t_0}^{t_1} N\,dt = \text{const} \tag{4.2}$$

Здесь $T^{**}(q, q_1, q', q_1')$ — приведенное выражение живой силы после исключения зависимых скоростей. Выберем постоянную τ_1 в условии (4.2) так, чтобы уравнения Эйлера для изопериметрической задачи при функции $N(q, q_1)$, удовлетворяющей условию (0.1) для приводящего множителя

$$NS - \frac{\partial T^{**}}{\partial q_1'}\frac{\partial N}{\partial q} + \frac{\partial T^{**}}{\partial q'}\frac{\partial N}{\partial q_1} = 0 \tag{4.3}$$

совпадали с уравнениями движения Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{**}}{\partial q'} - \frac{\partial T^{**}}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} = q_1'S, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T^{**}}{dq_1'} - \frac{\partial T^{**}}{\partial q_1} - \frac{\partial U}{\partial q_1} = -q'S \tag{4.4}$$

Запишем уравнения Эйлера изопериметрической задачи (4.1) при $\mu = \text{const}$ — множителе Лагранжа условия (4.2)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{**}}{\partial q'} - \frac{\partial T^{**}}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q}(T^{**} + U + \mu) - \frac{\partial T^{**}}{\partial q'}\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial q}q' + \frac{\partial N}{\partial q_1}q_1'\right)$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{**}}{\partial q_1'} - \frac{\partial T^{**}}{\partial q_1} - \frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q}(T^{**} + U + \mu) - \frac{\partial T^{**}}{\partial q_1'}\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial q}q' + \frac{\partial N}{\partial q_1}q_1'\right) \tag{4.5}$$

Сравнивая уравнения (4.4) и (4.5), имеем

$$q_1'NS + \frac{\partial N}{\partial q}\frac{\partial T^{**}}{\partial q'}q' + \frac{\partial N}{\partial q_1}\frac{\partial T^{**}}{\partial q'}q_1' - \frac{\partial N}{\partial q}T^{**} - \frac{\partial N}{\partial q}(U + \mu) = 0$$
$$-q'NS + \frac{\partial N}{\partial q}\frac{\partial T^{**}}{\partial q_1'}q' + \frac{\partial N}{\partial q_1}\frac{\partial T^{**}}{\partial q_1'}q_1' - \frac{\partial N}{\partial q_1}T^{**} - \frac{\partial N}{\partial q_1}(U + \mu) = 0 \tag{4.6}$$

Уравнения (4.6) переходят в

$$q_1'\left[NS + \frac{\partial T^{**}}{\partial q'}\frac{\partial N}{\partial q_1} - \frac{\partial T^{**}}{\partial q'_1}\frac{\partial N}{\partial q}\right] + \frac{\partial N}{\partial q}(T^{**} - U - \mu) = 0$$
$$-q_1'\left[NS + \frac{\partial T^{**}}{\partial q'}\frac{\partial N}{\partial q_1} - \frac{\partial T^{**}}{\partial q_1'}\frac{\partial N}{\partial q}\right] + \frac{\partial N}{\partial q_1}(T^{**} - U - \mu) = 0 \tag{4.7}$$

В силу условия (4.3) и $N = \text{const}$ получим равенство

$$\mu = T^{**} - U$$

Рассмотрим решение уравнений движения (4.4), проходящее через произвольные точки $M_0(q^\circ, q_1^\circ)$ и $M_1(q', q_1')$.

На этом действительном движении для систем, исследуемых Чаплыгиным, справедлив интеграл живых сил $T^{**} - U = h$; положим множитель $\mu = h$. Согласно (4.7), решение уравнений движения (4.4) служит тогда решением и уравнений Эйлера (4.5). Это решение — экстремаль — зависит от множителя $\mu = h$. Подставляя экстремаль в условие (4.2), найдем, наконец, искомую постоянную τ_1.

Так как и экстремаль, и действительное движение, проходящие через точки M_0 и M_1, единственны, действительное движение совпадает с экстремалью, а точки $M_0(q^\circ, q_1^\circ)$, $M_1(q', q_1')$ произвольны, то множество действительных движений неголономной системы совпадает с множеством экстремалей изопериметрической задачи (4.1).

Эту изопериметрическую задачу можно заменить задачей о безусловном экстремуме интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} F\,dt, \qquad F = (T^{**} + U + h)N \tag{4.8}$$

Здесь h — полная энергия действительного движения. Из сказанного выше следует, что условия эквивалентности уравнений Чаплыгина (4.4) и уравнений Эйлера задачи об экстремуме интеграла (4.8) приводятся к условию Чаплыгина (4.3) для приводящего множителя N.

Таким образом, результаты Чаплыгина могут быть получены методом уравнений эквивалентности п. 3 и относятся к консервативным системам и к тем случаям, когда уравнения эквивалентности допускают функцию F (4.8), не зависящую от скоростей q_β' ($\beta = 1, \ldots, m$) и имеющую особую структуру $F = (T^{**} + U + h)N$.

Примечание. Окончательные уравнения эквивалентности отличаются от уравнений Чаплыгина для функции N, так как первые следуют из условия (4.3) при выполнении его тождественно по скоростям q', q_1', а не по импульсам, как у Чаплыгина. Это отличие снимает ограничения на живую силу и связи, которые, как показал М. И. Ефимов [1], приходится накладывать в методе Чаплыгина при более чем двух свободных координатах.

5. Остановимся теперь на втором классе неголономных систем. Пусть лагранжевы координаты системы стеснены лишь одним уравнением связи

$$\omega = q_1' + \sum_{r=1}^{n-1} a_{1+r} q_{1+r}' + a = 0, \qquad a \neq 0 \tag{5.1}$$

причем функция Лагранжа системы и уравнение связи не зависят от времени. Тогда, как показано в п. 3, к уравнениям эквивалентности (3.2) добавляются еще уравнения эквивалентности (3.3)

$$R_{k,\,1+r,\,1+\rho,\,1+\tau} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n;\ r,\ \rho,\ \tau = 1, \ldots, n-1) \tag{5.2}$$

Докажем, что для тождественного удовлетворения уравнений (5.2) необходима и достаточна голономность уравнения

$$\delta q_1 + \sum_{r=1}^{n-1} a_{1+r} \delta q_{1+r} = 0 \tag{5.3}$$

определяющего «возможные перемещения» системы.

Действительно, вернемся к записи R_k через определители Δ_k, Δ (п. 2). Сохраняя обозначения, получим

$$\Delta_{k,\,1+r,\,1+\rho,\,1+\tau} = 0 \tag{5.4}$$

Здесь $\Delta_{k,\,1+r,\,1+\rho,\,1+\tau}$ получается из определителя Δ заменой элементов k-столбца коэффициентами при членах третьего порядка $q_{1+r}' q_{1+\rho}' q_{1+\tau}'$. Легко показать [2], что при $\Delta \neq 0$ и (5.4) этот столбец пропорционален последнему столбцу определителя Δ, состоящему из коэффициентов a_s уравнений связи. Заметим, что члены третьего порядка входят только в состав произведений

$$\lambda \left(a_s' - \frac{\partial \omega}{\partial q_s} \right) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Поэтому условия пропорциональности столбцов суть

$$-\frac{\partial a_s}{\partial q_1} a_{1+r} + \frac{\partial a_s}{\partial q_{1+r}} - \frac{\partial a_{1+r}}{\partial q_s} = k_{1+r} a_s \tag{5.5}$$

В коэффициенты пропорциональности k_{1+r} включены и b_{sk} из λ (2.14). Из первого ($s = 1$) уравнения (5.5) имеем коэффициент $k_{1+r} = -\partial a_{1+r} / \partial q_1$ и, подставляя

[1] Ефимов М. И. Об уравнениях Чаплыгина для неголономных систем и методе приводящего множителя. Диссертация. Институт механики АН СССР, 1953.

его в остальные ($s=1+\rho,\ \rho=1,\ldots,n-1$) уравнения (5.5), находим уравнения

$$\frac{\partial a_{1+r}}{\partial q_1}a_{1+\rho}-\frac{\partial a_{1+\rho}}{\partial q_1}a_{1+r}+\frac{\partial a_{1+\rho}}{\partial q_{1+r}}-\frac{\partial a_{1+r}}{\partial q_{1+\rho}}=0 \qquad (r,\ \rho=1,\ldots,n-1)$$

дающие искомое условие голономности уравнения (5.3).

Необходимость доказана. Проводя выкладки в обратном порядке, можно показать достаточность утверждения. Отсюда следует теорема, аналогичная теореме 3.1.

Теорема 5.1. Имеется консервативная система с неголономной связью (5.1). Если для нее существует решение уравнений эквивалентности (3.2) и если голономно уравнение (5.2), определяющее «возможные перемещения» системы, то среди всех кинематически допустимых движений системы, удовлетворяющих граничным условиям

$$q_s(t_0)=q_{s0},\qquad q_s(t)=q_{s1}\qquad (s=1,\ldots,n)$$

всякое действительное движение отличается тем, что при нем

$$\delta\int_{t_0}^{t}F\,dt=0$$

при освобожденном верхнем пределе интеграла.

6. Пусть положение голономных систем определяется координатами $q_1,\ldots,q_n$, стесненными дополнительными интегрируемыми связями (1.1). Пусть эти голономные системы обладают единой функцией Лагранжа (составленной без учета дополнительных связей $\omega_\beta=0$) и различными уравнениями $\omega_\beta=0$. Тогда их движения описываются одной и той же вариационной задачей, например, принципом Гамильтона

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=0 \qquad \text{при } \omega_\beta=0$$

С другой стороны, при различных произвольных дифференциальных уравнениях связей (1.1) подынтегральные функции F задачи (1.3), образованные решениями уравнений эквивалентности, вообще говоря, различны.

Будем говорить, что подынтегральная функция F условной вариационной задачи не зависит от уравнений связей, если соответствующие уравнения эквивалентности не зависят от коэффициентов $a_{\beta,m+r}$, a_β уравнений связей и их производных

$$\frac{\partial a_{\beta,m+r}}{\partial q_s},\qquad \frac{\partial a_\beta}{\partial q_s}$$

Другими словами, в силу уравнений связей торжественно по скоростям должны выполняться уравнения

$$\frac{\partial}{\partial a_{\beta,m+r}}(R_k-\Phi_k)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial a_\beta}(R_k-\Phi_k)=0 \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(R_k-\Phi_k)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial\eta}(R_k-\Phi_k)=0,\qquad \xi=\frac{\partial a_{\beta,m+r}}{\partial q_s},\qquad \eta=\frac{\partial a_\beta}{\partial q_s}$$

$$(k,\ s=1,\ldots,n;\ \beta=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,n-m) \tag{6.2}$$

Теорема 6.1. Для того чтобы подынтегральная функция условной вариационной задачи для материальной системы не зависела от уравнений связей, необходима и достаточна их голономность.

Доказательство. Достаточность устанавливается фактом существования для голономных систем принципа Гамильтона.

Докажем необходимость. Пусть функция F не зависит от уравнений связей и, следовательно, выполняются уравнения (6.1), (6.2). Обратим внимание на уравнения (6.2). Функции Φ_k не зависят от $\xi = \partial a_{\beta,\, m+r}/\partial q_s$, $\eta = \partial a_\beta / \partial q_s$, поэтому в силу уравнений связей должно быть

$$\frac{\partial R_k}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial R_k}{\partial \eta} = 0 \tag{6.3}$$

Вместо функций R_k в уравнениях (6.3) всегда можно брать первоначальные функции Q_k из п. 2 (функции R_k получаются из Q_k исключением множителей λ_β). Имеем вместо (6.3) уравнения

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial Q_k}{\partial \eta} = 0 \tag{6.4}$$

выполняющиеся в силу уравнений связей. В функции Q_k производные $\xi = \partial a_{\beta,\, m+r} / \partial q_s$, $\eta = \partial a_\beta / \partial q_s$ входят только в произведениях

$$\sum_{\beta=1}^{m} \lambda_\beta \left(a'_{\beta s} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial q_s} \right)$$

Поэтому уравнения (6.4) и уравнения

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_\beta} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n; \;\; \beta = 1, \ldots, m) \tag{6.5}$$

появляются и исчезают одновременно. Согласно [2] отсюда следует искомая голономность уравнений связей. При этом уравнения (6.1) удовлетворяются тождественно.

Примечание. Из теоремы сразу следует несправедливость для неголономных систем вариационных принципов, известных для систем голономных.

7. *Примеры.* а) Движение автомобиля по инерции [3]. Положение автомобиля можно определить четырьмя координатами

$$q_1 = x, \qquad q_2 = y, \qquad q_3 = \alpha, \qquad q_4 = \theta$$

где x, y — координаты центра инерции автомобиля на горизонтальной плоскости движения; α — угол, составленный его продольной осью с осью x; θ — угол между продольной осью машины и прямой, соединяющей середину передней оси автомобиля с его центром вращения. Угол θ характеризует поворот руля.

Пусть угол поворота руля задан: $\theta = \theta(t)$. Кроме того, имеем два неголономных уравнения связей (при $\theta \neq 0$)

$$\begin{aligned} x' &= (l \operatorname{ctg} \theta \, \cos \alpha - a \sin \alpha) \alpha' = -a_{13}\, \alpha' \\ y' &= (l \operatorname{ctg} \theta \, \sin \alpha + a \cos \alpha)\, \alpha' = -\, a_{23}\, \alpha' \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь l — длина автомобиля, a — расстояние центра инерции от задней оси машины. Пренебрегаем массой колес, для живой силы автомобиля имеем выражение

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2} I \alpha'^2 \qquad (I \text{ — центральный момент инерции})$$

Уравнения движения автомобиля, движущегося по инерции, имеют вид [1]

$$\begin{aligned} m x'' &= -\mu_1 \sin \alpha - \mu_2 \sin(\alpha + \theta) \\ m y'' &= \mu_1 \cos \alpha + \mu_2 \cos(\alpha + \theta) \\ I \alpha'' &= -\mu_1 a + \mu_2 (l - a) \cos \theta \end{aligned} \tag{7.2}$$

Здесь

$$\mu_1 = m \operatorname{ctg} \theta \left[(l - a)\, \alpha'^2 + \frac{l\,(al - \rho^2)\, \alpha' \theta'}{\rho^2 \sin^2 \theta + l^2 \cos^2 \theta} \right], \qquad \rho^2 = \frac{I + ma^2}{m}$$

$$\mu_2 = \frac{m}{\sin \theta} \left[a \alpha'^2 + \frac{\rho^2 l \alpha' \theta'}{\rho^2 \sin^2 \theta + l^2 \cos^2 \theta} \right]$$

[1] Новоселов В. С. Некоторые вопросы неголономной механики. Диссертация. МГУ, 1958.

Теорема Чаплыгина неприменима к рассматриваемой задаче, так как система неконсервативна. Для составления уравнений эквивалентности используется только последнее уравнение. Здесь

$$\Phi_{30} = 0, \qquad \Phi_{33} = \frac{l^2 \operatorname{ctg} \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta + l^2 \cos^2 \theta}, \qquad \Phi_{333} = 0$$

Будем искать функцию F в виде

$$F = \frac{1}{2}(b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + b_{33}\alpha'^2 + 2b_{12}x'y' + 2b_{13}x'\alpha' + 2b_{23}y'\alpha')$$

с коэффициентами, зависящими только от θ. В силу (2.9)

$$\lambda_1 = -b_{11}x' - b_{12}y' - b_{13}\alpha', \qquad \lambda_2 = -b_{12}x' - b_{22}y' - b_{23}\alpha'$$

Разрешая уравнения экстремалей относительно α'', найдем

$$R_{30} = 0, \qquad R_{33} = -\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\theta}$$

$$R_{333} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial a_{13}}{\partial \alpha}(b_{13} - a_{13}b_{11} - a_{23}b_{12}) + \frac{\partial a_{23}}{\partial \alpha}(b_{23} - a_{23}b_{22} - a_{13}b_{12})\right]$$

где

$$\Delta = a_{13}^2 b_{11} + a_{23}^2 b_{22} + b_{33} + 2a_{13}a_{23}b_{12} - 2a_{13}b_{13} - 2a_{23}b_{23}$$

Имеем два уравнения эквивалентности

$$R_{333} = 0 \quad \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\theta} = -\frac{l^2 \operatorname{ctg} \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta + l^2 \cos^2 \theta} \tag{7.3}$$

Первое уравнение (7.3) удовлетворяется тождественно при $b_{11} = b_{22}$, $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$. Решая тогда второе уравнение (7.3), найдем

$$\Delta = m\sqrt{\rho^2 + l^2 \operatorname{ctg}^2 \theta} = b_{11}(l^2 \operatorname{ctg}^2 \theta + a^2) + b_{33} \tag{7.4}$$

Выбирая $b_{33} = b_{11}(\rho^2 - a^2)$, получим $b_{11} = m / \sqrt{\rho^2 + l^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}$ и

$$F = \frac{1}{2}\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + l^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}}\left(x'^2 + y'^2 + \frac{I}{m}\alpha'^2\right) \tag{7.5}$$

С другой стороны, разрешая уравнение Эйлера для вариационной задачи с функцией F (7.5) и уравнениями связей (7.1) относительно x'', y'', α'' и подставляя

$$\lambda_1 = -\frac{mx'}{\sqrt{\rho^2 + l^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}}, \qquad \lambda_2 = -\frac{my'}{\sqrt{\rho^2 + l^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}}$$

придем к ускорениям действительного движения.

Если рассматривать задачу в пространстве α, то

$$b_{11} = b_{22} = 0, \qquad \Delta = b_{33} = m\sqrt{\rho^2 + l^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}, \qquad F = \frac{m}{2}\sqrt{\rho^2 + l^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}\,\alpha'^2$$

б) Пусть положение системы определяется двумя лагранжевыми координатами, стесненными неголономным уравнением связи $\omega = q_1' - q_2' - (q_1 + q_2) = 0$.

Пусть живая сила системы $T = {}^1/_2(q_1'^2 + q_2'^2)$, а силовая функция $U = 0$. Тогда уравнения движения Рауза дают

$$q_1'' = \frac{1}{2}(q_1' + q_2'), \qquad q_2'' = -\frac{1}{2}(q_1' + q_2')$$

Ищем функцию F вида

$$F = \frac{1}{2}(b_{11}q_1'^2 + 2b_{12}q_1'q_2' + b_{22}q_2'^2)$$

Тогда множитель $\lambda = -F / (q_1 + q_2)$ в силу уравнения (2.14). Легко указать частное решение соответствующих уравнений эквивалентности: $b_{sk} = (q_1 + q_2)c_{sk}$, где c_{sk} — постоянные, связанные условием $c_{11} - 2c_{12} + c_{22} = 0$ (откуда $c_{12} \neq 0$, $c_{11} \neq c_{22}$).

Поступила 21 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Полн. собр. соч. т. I, 1948.
2. Хмелевский И. Л. О принципе Гамильтона для неголономных систем. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
3. Линейкин П. С. О качении автомобиля. Тр. Сарат. автодор. ин-та. Сб. № 5, 1939.