Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

(ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРОМЕКИ И ЧАПЛЫГИНА)

В. С. Ткалич

(Сухуми)

Система уравнений магнитной газодинамики в стационарном двухпараметрическом случае при отсутствии электрического поля в выделенном направлении при помощи преобразования И. С. Громеки сведена к системе двух скалярных уравнений с двумя искомыми скалярными функциями.

Для вихревых движений (при некоторых дополнительных ограничениях) полученная система сведена к линейной при помощи преобразования Чаплыгина. Изучены основные физические свойства таких потоков и получены условия их эллиптичности. Рассмотрен ряд предельных случаев.

1. Интегралы симметрии магнитной газодинамики. Система уравнений идеальной магнитной газодинамики в случае адиабатических движений может быть представлена в виде [1]

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{H}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$
$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \quad \partial \rho s / \partial t + \operatorname{div} \rho s \mathbf{V} = 0 \tag{1.1}$$
$$\partial \mathbf{V} / \partial t + \nabla (\mathbf{V}^2 / 2 + F) + (1 / \rho) \nabla p = \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} - (1 / 4\pi\rho)\, \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

Давление p считаем произвольной функцией плотности ρ и энтропии s. В стационарном случае ($\partial / \partial t = 0$), после интегрирования уравнения вмороженности, система (1.1) принимает вид

$$\begin{gathered}\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \qquad \operatorname{div} \rho s \mathbf{V} = 0, \qquad \mathbf{V} \times \mathbf{H} = c \nabla \Phi \\ \nabla (\mathbf{V}^2 / 2 + F) + (1 / \rho) \nabla p = \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} - (1 / 4 \pi\rho)\, \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}\end{gathered} \tag{1.2}$$

где Φ — потенциал электрического поля ($\mathbf{E} = - \nabla\Phi$).

Пусть система координат (q_1, q_2, q_3)—декартова и все основные физические величины: скорость, магнитное поле, плотность, энтропия, а также потенциалы Φ и F, не зависят от третьей координаты. Следуя И. С. Громеке [2-6], двухпараметрические соленоидальные поля $\mathbf{H}$ и $\rho\mathbf{V}$ представим в виде

$$\mathbf{H} = \nabla\psi \times \mathbf{e} + h\mathbf{e}, \qquad \mathbf{V} = (1 / \rho) \nabla\psi_0 \times \mathbf{e} + v\mathbf{e} \tag{1.3}$$

Здесь обобщенные функции токов ψ и ψ_0, а также третьи компоненты скорости и магнитного поля v и h суть произвольные функции координат (q_1, q_2); $\mathbf{e}$ — третий орт.

Подставляя (1.3) в условие адиабатичности и в третью компоненту уравнения вмороженности (1.2) и разрешая полученные якобианные уравнения в случае наличия поперечной компоненты скорости ($\psi_0' \neq 0$), получаем

$$\psi = \psi(\xi), \qquad \psi_0 = \psi_0(\xi), \qquad s = s(\xi), \qquad \xi = \xi(q_1, q_2) \tag{1.4}$$

Здесь ψ, ψ_0, s и ξ — произвольные функции своих аргументов.

Подставляя (1.4) в первую и вторую компоненты уравнения вмороженности и третью компоненту уравнения движения (1.2), после интегрирования получаем

$$\rho\psi' v - \psi_0' h = c\rho\Phi', \qquad 4\pi\psi_0' v - \psi' h = 4\pi Q'$$

Штрих всюду означает дифференцирование по своему аргументу, электростатический потенциал $\Phi = \Phi(\xi)$ и $Q = Q(\xi)$ суть произвольные функции параметра ξ. Если определитель вышеприведенной линейной относительно v и h системы не равен нулю: $4\pi(\psi_0')^2 \neq \rho(\psi')^2$, то, разрешая ее, находим v и h

$$v = \frac{4\pi\psi_0' Q' - c\rho\psi'\Phi'}{4\pi(\psi_0')^2 - \rho(\psi')^2}, \qquad h = 4\pi\rho\frac{\psi' Q' - c\psi_0'\Phi'}{4\pi(\psi_0')^2 - \rho(\psi')^2} \tag{1.5}$$

Используя соотношения (1.3) и (1.4), а также справедливое для любого двухпараметрического соленоидального вектора $\mathbf{H}$ соотношение $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \nabla h \times \mathbf{e} - \Delta\psi\mathbf{e}$, первые две компоненты уравнения движения (1.2) запишем в виде

$$\nabla\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\nabla\psi_0}{\rho}\right)^2 + F\right] + \frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{h^2}{8\pi}\right) =$$
$$= \left\{\psi_0'\left[\frac{1}{\rho^2}\Delta\psi_0 + \frac{1}{\rho}\left(\nabla\psi_0\nabla\frac{1}{\rho}\right)\right] - \frac{1}{4\pi\rho}\psi'\Delta\psi\right\}\nabla\xi \tag{1.6}$$

Введем «эффективное поперечное» давление P, равное сумме давлений продольного (направленного вдоль третьей оси) магнитного поля и газодинамического

$$P(\rho, \xi) = p(\rho, s) + h^2/8\pi \tag{1.7}$$

Тогда, в общем случае отсутствия функциональной зависимости между плотностью и энтропией $\partial(\rho, \xi)/\partial(q_1, q_2) \neq 0$, общее решение уравнения (1.6) имеет вид

$$\begin{gathered}\psi_0'\left[\frac{1}{\rho^2}\Delta\psi_0 + \frac{1}{\rho}\left(\nabla\psi_0\nabla\frac{1}{\rho}\right)\right] - \frac{1}{4\pi\rho}\psi'\Delta\psi = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{P}{\rho} + w - \int^{\rho}\frac{\partial P}{\partial\rho}\frac{d\rho}{\rho}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\nabla\psi_0}{\rho}\right)^2 + F = w(\xi) - \int^{\rho}\frac{\partial P}{\partial\rho}\frac{d\rho}{\rho}\end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь w — произвольная функция ξ; поэтому нижний предел интегрирования можно опустить. Соотношения (1.8) представляют собой точное решение векторного уравнения (1.6); подставляя (1.8) в (1.6), получаем тождество.

По своему физическому смыслу первое соотношение (1.8) представляет собой закон изменения третьей компоненты вихря скорости. Второе соотношение (1.8), представляющее собой закон изменения энергии единицы массы, будет обобщением интеграла Бернулли [7] на случай вихревых движений проводящего газа.

Таким образом, если одна из декартовых координат будет циклической, то в стационарном случае задача сведется (при весьма общих предположениях) к решению системы двух скалярных дифференциальных уравнений (1.8), служащей для определения ρ и ξ.

Отметим, что некоторые приемы, аналогичные использованным выше, применялись другими авторами [8—14].

2. Преобразование Чаплыгина. Пусть внешние объемные силы отсутствуют ($F=0$). Перемножим уравнения системы (1.8) накрест и домножим на произвольную функцию ρ и ξ. Чтобы полученное уравнение можно было привести к «канонической» форме

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\mathscr{E}(\rho,\xi)\frac{\partial\xi}{\partial q_1}\right]+\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\mathscr{E}(\rho,\xi)\frac{\partial\xi}{\partial q_2}\right]=0 \qquad (2.1)$$

достаточно выполнения условия

$$\frac{(\psi_0')^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{P}{\rho}+w-\int^{\rho}\frac{\partial P}{\partial\rho}\frac{d\rho}{\rho}\right]+\left[w-\int^{\rho}\frac{\partial P}{\partial\rho}\frac{d\rho}{\rho}\right]\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\psi_0')^2}{\rho}-\frac{(\psi')^2}{4\pi}\right]=0. \qquad (2.2)$$

К условию (2.2) приходим в результате отождествления полученного из (1.8) уравнения с (2.1) и исключения $\mathscr{E}(\rho,\xi)$. Общее решение (2.2) имеет вид

$$P=\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\Pi}{\rho},\qquad w=0,\qquad \Pi\equiv\Pi(\mathscr{E}),\qquad \mathscr{E}\equiv\frac{\psi_0'^2}{\rho}-\frac{\psi'^2}{4\pi} \qquad (2.3)$$

где Π — произвольная функция $\mathscr{E}$. Теперь параметр ξ не является физически произвольным: каждому виду зависимости $\psi_0=\psi_0(\xi)$ и $\psi=\psi(\xi)$ соответствует свой характер полей физических величин. Соотношения (2.3) налагают ограничения на вид уравнения состояния $p=p(\rho,s)$ и характер движения. Далее всюду рассматриваются только такие движения и состояния газа, которые удовлетворяют условиям (2.3).

Решая каноническое уравнение (2.1), а также используя второе уравнение (1.8) и (2.3), получаем «каноническую» систему

$$\nabla\varphi=\mathscr{E}\nabla\xi\times\mathbf{e},\qquad(\nabla\varphi)^2=2(\mathscr{E}u)^2,\qquad u^2\equiv\Pi'(\mathscr{E}) \qquad (2.4)$$

к которой можно применить преобразование Чаплыгина [15]. По-видимому, впервые в магнитной газодинамике оно было применено И. И. Ночевкиной [16] и несколько позднее — другими авторами [17—19]. Применяя к системе (2.4) контактное преобразование [7,15], получаем

$$\frac{\partial\xi}{\partial\theta}+\frac{u}{\mathscr{E}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial u}+u\left(\frac{d}{du}\frac{1}{u\mathscr{E}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0 \qquad (2.5)$$

где θ — угол между осью q_1 и вектором $\nabla\varphi$. Связь с пространственными переменными дается соотношением

$$d(q_1+iq_2)=\frac{e^{i\theta}}{u}\left(id\xi+\frac{1}{\mathscr{E}}d\varphi\right) \qquad (2.6)$$

Настоящее преобразование математически эквивалентно преобразованию «в плоскости годографа», но рассматриваемое движение не обязательно плоское (имеется третья компонента скорости, вообще говоря, отличная от нуля $v\neq0$).

Итак, (2.5) представляет собой искомую систему линейных однородных (относительно искомых функций φ и ξ) уравнений, коэффициенты которой зависят от одной из независимых переменных ($\mathscr{E}$) и не зависят от второй (θ). Условие ее эллиптичности таково:

$$d\,(u\mathscr{E})^2 / du^2 > 0 \tag{2.7}$$

При анализе и решении этой системы в различных предельных случаях с успехом могут быть использованы общеизвестные методы [7, 15]. В общем случае представляется естественным использовать результаты исследований Л. В. Овсянникова [20, 21].

Рассматриваемый в этом параграфе (и далее) случай будет естественным обобщением более ранних аналогичных исследований. Это прежде всего результаты, полученные для плоских вихревых движений, обычного газа Л. И. Седовым [7] и Ю. В. Рудневым [22, 23], а также более поздние исследования И. И. Ночевкиной [16] и И. М. Юрьева [17] относящиеся к различным предельным случаям магнитной газодинамики.

2. Некоторые простейшие физические свойства «чаплыгинских» течений. Используя соотношения (1.5) и (2.3), выражения (1.3) для скорости и магнитного поля приводим к виду

$$\begin{aligned} \rho\mathscr{E}\mathbf{V} &= \psi_0'\nabla\varphi + (\psi_0' Q' - c\rho\psi'\Phi')\,\mathbf{e} \\ \mathscr{E}\mathbf{H} &= \psi'\nabla\varphi + (\psi' Q' - c\psi_0'\Phi')\,\mathbf{e} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Введем в рассмотрение «поперечные» магнитную (μ_H) и кинетическую (μ_V) энергии единицы объема

$$\mu_H \equiv (H_1^2 + H_2^2) / 8\pi, \qquad \mu_V \equiv \rho\,(V_1^2 + V_2^2) / 2 \tag{3.2}$$

Тогда, подставляя (3.1) в (3.2) и используя (2.4), получаем

$$\mu_H = \frac{(\psi')^2}{4\pi}\frac{d\Pi}{d\mathscr{E}}, \qquad \mu_V = \frac{(\psi_0')^2}{\rho}\frac{d\Pi}{d\mathscr{E}} \tag{3.3}$$

Рассмотрим разность (μ) и отношение (ε) «поперечных» энергий единицы объема

$$\mu \equiv \mu_V - \mu_H, \qquad \varepsilon \equiv \mu_V / \mu_H \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) в (3.4), получаем

$$\mu = \mathscr{E}\frac{d\Pi}{d\mathscr{E}}, \qquad \varepsilon = \frac{4\pi}{\rho}\left(\frac{d\psi_0}{d\psi}\right)^2 \tag{3.5}$$

Таким образом, разность энергий оказывается зависящей только от основного параметра ($\mathscr{E}$) теории $\mu = \mu(\mathscr{E})$. При этом $\mathscr{E}$ положительно, если плотность поперечной кинетической энергии превосходит плотность поперечной магнитной энергии; $\mathscr{E}$ отрицательно, если плотность кинетической энергии меньше магнитной. Напомним, что все рассмотрение проводится при $\mathscr{E} \neq 0$. Из соотношений (2.3) и (3.3) находим

$$\Pi = -(\mu_V + P) \tag{3.6}$$

Подставляя (1.7) в (3.6), получаем

$$\Pi = -(\mu_V + p + h^2 / 8\pi) \tag{3.7}$$

т. е. величина Π есть взятая с обратным знаком сумма поперечной кинетической энергии, тепловой энергии и продольной магнитной энергии (отнесенная к единице объема).

Подставляя (2.4) в (2.5), уравнения Чаплыгина приводим к виду

$$\frac{\partial\xi}{\partial\theta}+\frac{2\Pi'}{\mathscr{E}\Pi''}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathscr{E}}=0,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial\mathscr{E}}=\frac{1}{\mathscr{E}^2}\left(1+\frac{\mathscr{E}\Pi''}{2\Pi'}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,. \tag{3.8}$$

Подставляя (2.4) в (2.7), условие эллиптичности системы (3.8) запишем в виде

$$-2\Pi'/\mathscr{E}\Pi''<1 \tag{3.9}$$

Всюду далее будем называть «заторможенными» те участки потока, в которых $d\Pi/d\mathscr{E}=0$. Следовательно, в «точках торможения» поперечные компоненты скорости и магнитного поля обращаются в нуль. Корни уравнения $\Pi'(\mathscr{E})=0$ будем обозначать через $\mathscr{E}_*$. Физические величины, соответствующие значению $\mathscr{E}=\mathscr{E}_*$, будем отмечать звездочкой внизу и называть параметрами заторможенного потока. Отметим, что общепринятое [7,15] понятие «заторможенного» потока содержится в данном в качестве частного случая.

4. Движение в продольном магнитном поле. Пусть отсутствует поперечная компонента магнитного поля ($\psi'=0$). Тогда из (2.3) получаем

$$\mathscr{E}\equiv(\psi_0')^2/\rho \tag{4.1}$$

Из (3.3), (3.5) и (4.1) следует, что поперечная кинетическая энергия единицы объема такова

$$\mu_V=\mathscr{E}\frac{d\Pi}{d\mathscr{E}} \tag{4.2}$$

При этом из (3.5), (3.6) и (4.2) получаем

$$P=-\frac{d}{d\mathscr{E}}(\mathscr{E}\Pi) \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) заключаем, что и эффективное давление, и поперечная кинетическая энергия зависят только от основного параметра $\mathscr{E}$.

Если давление будет степенной функцией плотности $p\approx\rho^\gamma$, то сравнивая выражения для эффективного давления, из (1.5), (1.7), (4.1) и (4.3) после интегрирования и отождествления получаем соотношения, являющиеся общими при $\gamma\neq 2$

$$p=p_*\left(\frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}\right)^\gamma,\quad h=h_*\frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}},\quad \Pi(\mathscr{E})=\frac{p_*}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}\right)^\gamma-\gamma\frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}\right]+\frac{h_*^2}{8\pi}\left[\left(\frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}\right)^2-2\frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}\right] \tag{4.4}$$

Постоянные h_*, p_* и $\mathscr{E}_*$ суть параметры заторможенного потока. Из (4.2) и (4.4) следует, что реальные движения описываются достаточно большими значениями основного параметра $\mathscr{E}_*\leqslant\mathscr{E}$. Подставляя (4.4) в (3.9), условие эллиптичности потока приводим к виду

$$\frac{\gamma p_*}{\gamma-1}\left[\frac{\gamma+1}{2}\left(\frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}\right)^{\gamma-1}-1\right]+\frac{h_*^2}{4\pi}\left(\frac{3\mathscr{E}_*}{2\mathscr{E}}-1\right)>0 \tag{4.5}$$

Если продольное магнитное поле достаточно мало ($h_*^2/8\pi\ll p_*$), то из (4.5) следует приближенное условие эллиптичности, аналогичное известному в обычной газодинамике

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}<\frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}\leqslant 1 \tag{4.6}$$

В случае сильного продольного магнитного поля ($p_* \ll h_*^2/8\pi$) из (4.5) получаем следующее приближенное условие эллиптичности:

$$2/3 < \mathscr{E}_*/\mathscr{E} \leqslant 1 \tag{4.7}$$

Подставляя (4.1) и (4.4) в (3.1), получаем следующие выражения для скорости и магнитного поля:

$$\mathbf{V} = \frac{d\xi}{d\psi_0} \nabla\varphi + v(\xi)\,\mathbf{e}, \qquad \mathbf{H} = h_* \frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}\,\mathbf{e} \tag{4.8}$$

где $v = v(\xi)$ — произвольная функция ξ.

Если давление пропорционально квадрату плотности ($\gamma = 2$), то из анализа соотношений (1.5), (1.7), (4.1) и (4.3) после интегрирования и несложных преобразований получаем

$$h = h_0 \frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}, \quad p = \left(P_* - \frac{h_0^2}{8\pi}\right)\left(\frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}\right)^2, \quad \Pi = \frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}}\left(\frac{\mathscr{E}_*}{\mathscr{E}} - 2\right)P_* \tag{4.9}$$

Постоянные P_* и $\mathscr{E}_*$ — параметры заторможенного потока, $h_0 \equiv h_0(\xi)$ — произвольная функция ξ. Подставляя (4.9) в (3.9), приходим к условиям эллиптичности (4.6), (4.7) (которые совпадают при $\gamma = 2$).

Таким образом, продольное магнитное поле не вносит качественных изменений в газодинамические условия эллиптичности потока.

Отметим, что ряд результатов исследования вихревых течений проводящего газа в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости потока, содержится в работе И. И. Ночевкиной [16].

Полагая в этом параграфе магнитное поле и третью компоненту скорости равными нулю, приходим к соотношениям, эквивалентным соответствующим результатам Л. И. Седова [7] и Ю. В. Руднева [22,23].

5. Обычная газодинамика. Полагая $h_* = 0$ в соотношениях (4.1)—(4.6) и (4.8), получаем соответствующие результаты для адиабатических движений непроводящего газа. Сравнивая известное [7] уравнение состояния идеального совершенного газа

$$p = \mathrm{const}\left(\rho \exp\frac{S}{c_p}\right)^{\gamma}, \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{5.1}$$

с (4.1) и (4.4), получаем, что, не уменьшая общности, параметры $\mathscr{E}$ и ξ можно выбрать следующим образом:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{\rho}\exp\left(-\frac{S}{c_p}\right), \qquad \frac{d\psi_0}{d\xi} = \exp\left(-\frac{S}{2c_p}\right) \tag{5.2}$$

Подставляя (5.2) в (4.8), получаем выражение для скорости:

$$\mathbf{V} = \exp\left(\frac{S}{2c_p}\right)\nabla\varphi + v(\xi)\,\mathbf{e} \tag{5.3}$$

Условие эллиптичности течения получаем, подставляя (5.2) в (4.5)

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} < \mathscr{E}_*\rho \exp\frac{S}{c_p} \leqslant 1 \tag{5.4}$$

где $\mathscr{E}_*$ — параметр «заторможенного» потока. Соотношение (5.4) представляет собою обобщение аналогичного [7] условия для изэнтропического потока. В случае плоской задачи к аналогичным результатам Л. И. Седов [7] и Ю. В. Руднев [22, 23] пришли несколько иным путем.

6. Движение при наличии магнитного поля произвольного направления. Пусть давление является степенной функцией плотности $p \approx \rho^\gamma$. Тогда из анализа соотношений (1.5), (1.7) и (2.3) вытекает, что при произвольном γ в общем случае $\psi' = \mathrm{const}$. Если имеются поперечные компоненты магнитного поля $(\psi' \neq 0)$, то, не уменьшая общности, можно положить

$$d\xi = d\psi / \sqrt{4\pi} \tag{6.1}$$

Тогда из соотношений (2.3), (3.5) и (6.1) получаем

$$\mathscr{E} = \varepsilon - 1$$

Для эффективного давления из (2.3) и (6.2) получаем следующее выражение

$$P = -\frac{d}{d\varepsilon}(\varepsilon \Pi) \tag{6.3}$$

Для давления продольного магнитного поля и параметра Π выражения будут таковы:

$$p = p_*\left(\frac{\varepsilon_*}{\varepsilon}\right)^\gamma, \qquad h = h_*\frac{\varepsilon_* - 1}{\varepsilon - 1} \tag{6.4}$$

$$\Pi = \frac{p_*}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{\varepsilon_*}{\varepsilon}\right)^\gamma - \gamma\frac{\varepsilon_*}{\varepsilon}\right] + \frac{h_*^2}{8\pi}\left[\frac{(\varepsilon_* - 1)^2}{\varepsilon - 1} - \frac{\varepsilon_*^2}{\varepsilon}\right]$$

Постоянные h_*, p_* и ε_* — параметры заторможенного потока. Из соотношений (3.1), (6.1), (6.2) и (6.4) находим выражения для магнитного поля и скорости

$$\begin{aligned} (\varepsilon - 1)\mathbf{H} &= \sqrt{4\pi}\,\nabla\varphi + h_*(\varepsilon_* - 1)\mathbf{e} \\ (\varepsilon - 1)\mathbf{V} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi}}\frac{d\psi}{d\psi_0}\nabla\varphi + (\varepsilon - 1)v(\xi, \varepsilon)\mathbf{e} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Из анализа соотношений (3.8), (3.9) и (6.4) получаем гиперповерхности (в пространстве α, β, γ, ε), отделяющие области эллиптического течения от областей гиперболического течения

$$\gamma[(\gamma - 1)\varepsilon - (\gamma + 1)] + 2\beta\varepsilon^{\gamma-1} = 0, \qquad \frac{2\beta}{\varepsilon^3} = \frac{\gamma(\gamma + 1)}{\varepsilon^{\gamma+2}} + \frac{2\alpha}{(\varepsilon - 1)^3} \tag{6.6}$$

$$\alpha \equiv (\gamma - 1)\frac{(\varepsilon_* - 1)^2 h_*^2}{\varepsilon_*^\gamma 8\pi p_*}, \qquad \beta \equiv (\gamma - 1)\,\varepsilon_*^{2-\gamma}\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\varepsilon_*^{-1} + \frac{h_*^2}{4\pi p_*}\right)$$

Вводим обозначения

$$a \equiv 1/\varepsilon, \qquad a_* \equiv 1/\varepsilon_*, \qquad A_* \equiv h_*^2/8\pi p_* \tag{6.7}$$

Тогда для одноатомного газа $(\gamma = 5/3)$ гиперповерхности (6.6) в пространстве $(a,\ a_*,\ A_*)$ имеют вид

$$A_* = \frac{5}{6}\left(\frac{a_*}{a}\right)^{1/3}(4a - 1) - \frac{5}{2}a_*, \qquad A_* = \frac{5a_*^{1/3}}{6}\,\frac{4a^{2/3} - 3a_*^{2/3}}{1 - (1 - a_*)^2/(1 - a)^3}$$

Из анализа (6.6) вытекает, что имеется несколько чередующихся между собой зон эллиптических и гиперболических течений. В частности, при скоростях упорядоченного движения меньше тепловой скорости возможны гиперболические течения, при больших — эллиптические. Выводы такого рода (при некоторых дополнительных ограничениях) содержатся в исследованиях И. М. Юрьева [17] и М. Н. Когана [24].

Автор благодарен И. И. Ночевкиной, Н. В. Салтанову, К. П. Станюковичу, Е. Ф. Ткалич, Ф. И. $\boxed{\text{Франклю}}$ и И. М. Юрьеву за обсуждение некоторых результатов работы.

Поступила 20 X 1961

Физико-технический институт
АН Грузинской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Баум Ф. А., Каплан С. А., Станюкович К. П. Введение в космическую газодинамику. Физматгиз, 1958.
2. Громека И. С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Собр. соч. Изд-во АН СССР, 1952.
3. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат, 1958.
4. Ткалич В. С. Исследование систем уравнений проводящей жидкости в двухпараметрическом стационарном случае. Сб. Вопр. магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Изд-во АН ЛатвССР, 1959, стр. 191.
5. Ткалич В. С. Исследование системы уравнений магнитной гидродинамики. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 4.
6. Ткалич В. С. Исследование системы уравнений магнитной гидромеханики в двухпараметрическом случае. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1.
7. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
8. Migam S. D. Motion of a body revolution in rotating fluid Proc. Int. Congr. Math., Amsterdam, 1954, v. 2.
9. Fadnis B. S. Axisymmetric flow in perfect Fluid, I, II, Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, N 3, N 4, v. 47.
10. Chandrasechar S. Axisymmetric magnetic fields and fluid motion Astrophys. J., 1956, N 1, v. 124.
11. Lüst R., Schlüter A. Axialsymmetrische magnetohydrodynamische Gleichgewichtskonfigurationen. Z. Naturforsch., 1957, N 10, Bd. 12a.
12. Kapur J. N. On axially symmetric superposable flows. Bull. Calcutta Math. Soc., 1959, N 1, v. 51.
13. Woltjer L. Hydromagnetic Equilibrium, IV, Astrophys. J., 1959, N 2, v. 130.
14. Long R. R. Stedy finite motions of a conducting liquid, J. Fluid Mech., 1960 N 1, v. 7.
15. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Гостехиздат, 1949.
16. Ночевкина И. И. О приближенном методе исследования плоских вихревых течений в магнитной гидродинамике. ДАН СССР, 1959, т. 126, № 6.
17. Юрьев И. М. К решению уравнений магнитной газодинамики. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.
18. Krzywoblocki M. Z., Mutant J. On the similarity rule in magnetogas dynamics. Acta Phys. Austriaca. 1960, N 1, Bd. 13.
19. Ночевкина И. И. Некоторые задачи магнитной гидродинамики с учетом конечной проводимости. Вестн. МГУ, сер. III, Физика, астрономия, 1961, № 1.
20. Овсянников Л. В. Об отыскании группы линейного дифференциального уравнения второго порядка. ДАН СССР, 1960, т. 132, № 1.
21. Овсянников Л. В., Групповые свойства уравнения С. А. Чаплыгина. ПМТФ, 1960, № 3.
22. Руднев Ю. В. О некоторых движениях газа с переменной энтропией и полной энергией. ДАН СССР, 1948, т. 59, № 5.
23. Руднев Ю. В. О некоторых плоско-параллельных установившихся движениях газа. Сб. статей «Теоретическая гидромеханика» под ред. Л. И. Седова, Оборонгиз, 1949, № 4.
24. Коган М. Н. Магнетодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.