

О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В. В. Гогосов

(Москва)

Рассматривается задача о распаде разрыва в магнитной гидродинамике с магнитным полем, перпендикулярным к плоскости разрыва. Параметры среды по обе стороны от разрыва произвольны. Всего возможны сто двадцать различных случаев распада. В работе указывается, какой из возможных случаев распада в зависимости от величин начальных параметров среды осуществляется.

Распад произвольного разрыва в газовой динамике рассматривался в работах [1-4]. Распад произвольного разрыва в магнитной гидродинамике без ограничений на параметры среды и магнитные поля рассмотрен в работах [5-7]. Некоторые частные случаи задачи исследовались в работах [8-13].

В настоящей работе исследуется случай распада произвольного разрыва в магнитной гидродинамике, когда магнитное поле нормально плоскости разрыва, а остальные величины по обе стороны от разрыва произвольны. Получить решение этой задачи как предельный случай задачи о распаде разрыва с произвольным полем, когда тангенциальные составляющие магнитного поля по обе стороны от разрыва стремятся к нулю, очень сложно. Трудности такого предельного перехода ясно видны уже при решении задачи о поршне в магнитной гидродинамике [14], когда при равенстве тангенциальной составляющей магнитного поля невозмущенной среды нулю возможны три предельных случая в зависимости от величины $P = 4\pi\gamma\rho/H_x^2$ невозмущенной среды [15].

Задача о распаде ставится следующим образом. Пусть в момент времени $t = 0$ на плоскости $x = 0$ терпят разрыв термодинамические параметры среды и скорости, а магнитное поле нормально плоскости разрыва. Соотношения законов сохранения на таком разрыве не выполняются, поэтому он будет распадаться на некоторые комбинации волн. В каждую сторону может идти по две волны, разделенные контактным разрывом. Вращательного разрыва быть не может. В самом деле, вращательный разрыв мог бы быть только за ударной волной, включающей поле. Но это невозможно, так как скорость распространения такой волны относительно газа за ней равна как раз альфвеновской скорости, рассчитанной по параметрам за волной.

Если учесть, что какие-то волны могут отсутствовать, то всего возможны сто двадцать различных случаев распада разрыва в зависимости от параметров среды слева и справа от разрыва. Цель решения состоит в нахождении способа, позволяющего указать, какой из возможных типов распада осуществляется в каждом конкретном случае. В настоящей работе предлагается способ решения этой задачи, состоящий в построении диаграмм в плоскости $\Delta u = u_0 - u_0'$, $\Delta v = v_0 - v_0'$, при помощи которых, зная Δu , Δv , можно определить комбинацию волн, на которую распадается начальный разрыв.

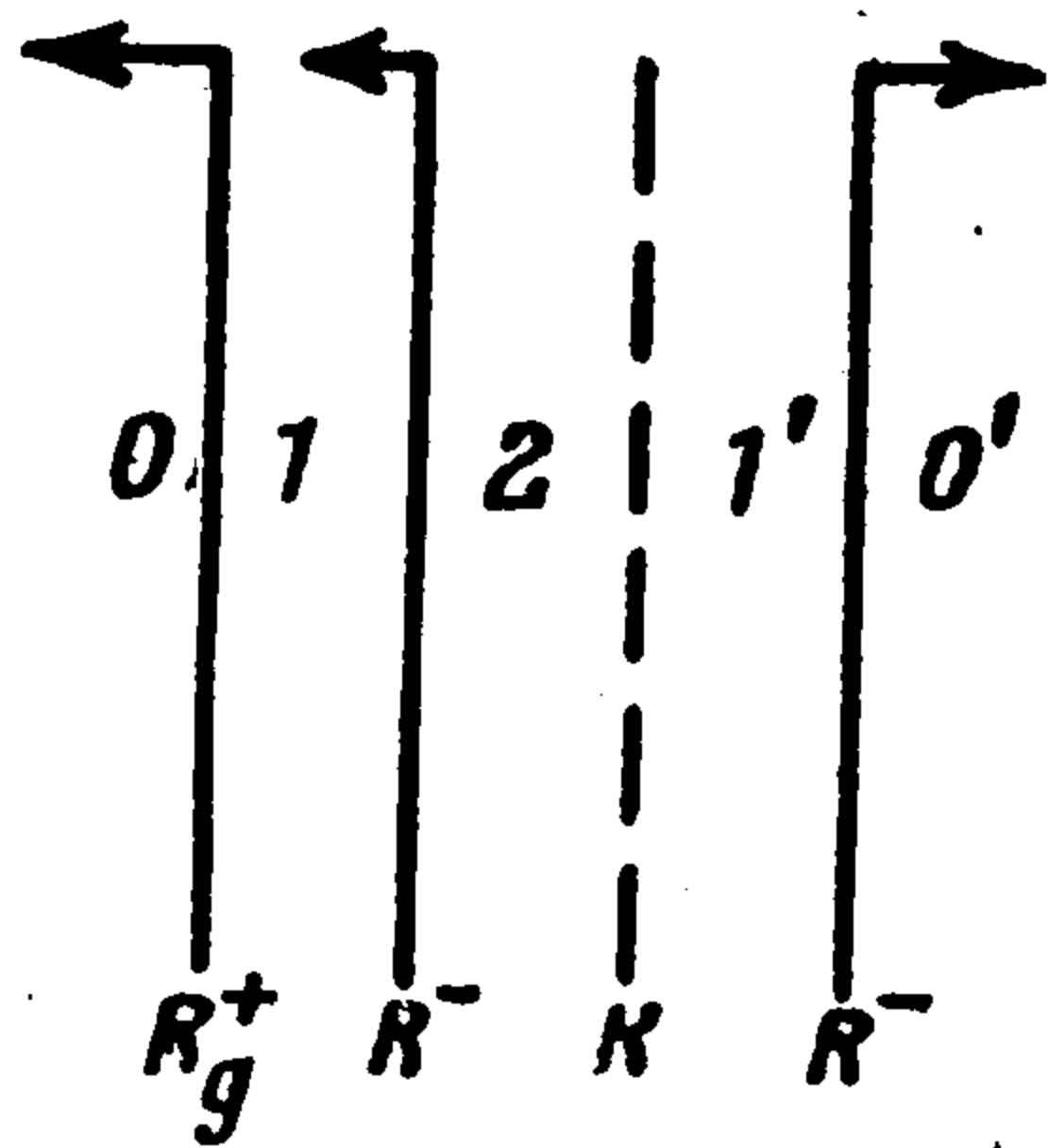
Среда предполагается идеально проводящей. Предполагается также, что решение рассматриваемой задачи единственно.

Параметры среды, находящейся слева (справа) от начального разрыва при $t = 0$, будут обозначаться значком $0(0')$. Параметры среды, находящейся при $t > 0$ справа от контактного разрыва, будут писаться со штрихом.

Символами S^+ , S^- , R^+ , R^- , K обозначаются соответственно быстрые и медленные ударные волны, быстрые и медленные волны разрежения и контактные разрывы. Индекс g внизу означает, что волна является газодинамической; индексом w обозначаются ударные волны, включающие тангенциальную составляющую магнитного поля.

В зависимости от значений величин P_0 , P_0' могут быть шесть случаев.

Рассмотрим комбинации из трех ударных или автомодельных волн и контактного разрыва. Вправо может идти S_g^+ -волна (из P_0' в P_0 на фиг. 1), за которой следует R^- -волна, включающая поле; влево идет R^- -волна такой же интенсивности, что и вправо. В результате имеем $R^-KR^-S_g^+$ -комбинацию. В Ph плоскости R^- -волнам отвечает R^- -линия, выходящая из точки P_0 . Этой комбинации из трех волн в плоскости $\Delta u \Delta v$ соответствует линия, выходящая из точки, которой соответствует KS_g^+ -комбинация. При движении по этой линии интенсивность S_g^+ -волны постоянна, а интенсивность R^- -волны меняется от нуля (точка KS_g^+) до максимума (точка линии вакуума, на фиг. 2 отмеченной штриховкой).



Фиг. 3

Другая комбинация из трех волн: влево идет R_g^+ -волна (из точки P_0 в точку P_0' , фиг. 1), за которой следует R^- -волна, отделенная контактным разрывом от R^- -волны такой же интенсивности, распространяющейся вправо. Этой $R_g^+R^-KR^-$ -комбинации в плоскости $\Delta u \Delta v$ соответствует линия, выходящая из точки R_g^+K (в этой точке интенсивность R^- -волн равна 0) и доходящая до линии вакуума.

Точкам линии вакуума, а также точкам, лежащим слева от линии вакуума, соответствуют случаи распада произвольного разрыва на комбинации волн, содержащие R^- -волны максимальной интенсивности, после прохождения которых образуется вакуум.

Линия $R^-KR^-S_g^+$ разделяет области, которым соответствуют $S_g^+R^-KR^-S_g^+$ - и $R_g^+R^-KR^-S_g^+$ -комбинации. Линия $R_g^+R^-KR^-$ разделяет области, которым соответствуют $R_g^+R^-KR^-S_g^+$ - и $R_g^+R^-KR^-R_g^+$ -комбинации.

Фигуры в плоскости $\Delta u \Delta v$ симметричны относительно оси Δu , что следует из равенства нулю тангенциальных составляющих магнитного поля перед S_g^+ -, R_g^+ -, R^- -волнами.

Покажем для определенности на примере линии, которой соответствует $R_g^+R^-KR^-$ -комбинация, как пишутся уравнения линий в плоскости $\Delta u \Delta v$.

Итак, пусть осуществляется распад на $R_g^+R^-KR^-$ -комбинацию. Схема распада изображена на фиг. 3. Из формул (1.4), (1.5), (2.2), (2.3) [5] следует

$$u_2 = u_1 + \chi_- = u_0 + \chi_+ + \chi_- = u_1' = u_0' - \chi_-'$$

$$v_2 = v_1 \pm \psi_- = v_0 \pm \psi_- = v_1' = v_0' \mp \psi_-'$$

Отсюда

$$\Delta u = -\chi_+ - \chi_- - \chi_-', \quad \Delta v = \mp \psi_- \mp \psi_-'$$

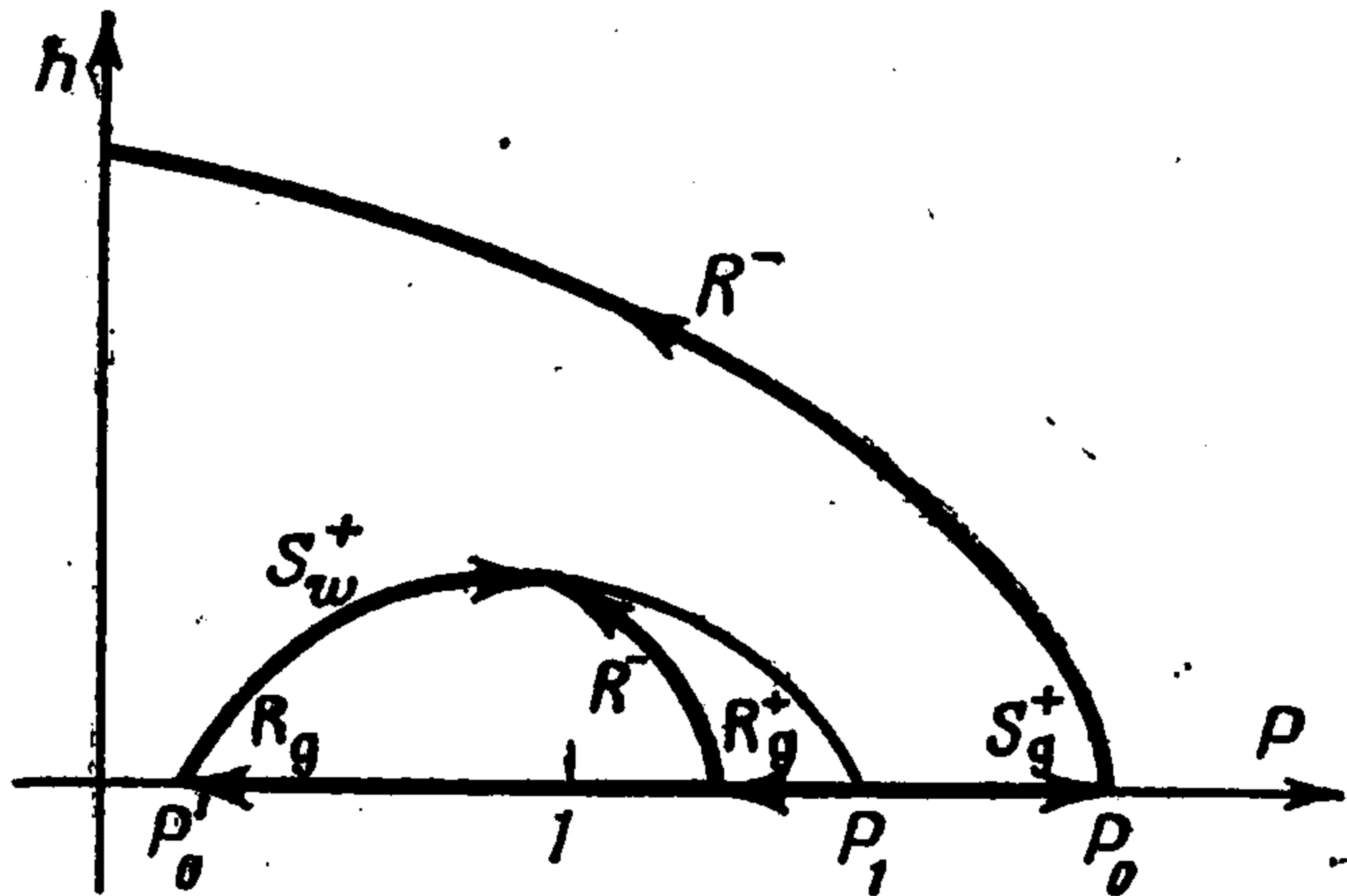
Полученные уравнения описывают линию, которой соответствует $R_g^+R^-KR^-$ -комбинация. При движении по этой линии $\chi_+ = \text{const}$, а величины χ_- , χ_-' , ψ_- , ψ_-' меняются от нуля до некоторого максимального значения. Уравнения остальных линий, в том числе линии вакуума, составляются аналогично. (См. по этому поводу также [5].)

но за S_w^+ -волной, включающей поле

$$\varphi_+ = h_1' V_1'$$

Поэтому для $KS^-S_w^+$ -комбинации $\Delta v = 0$.

В плоскости $\Delta u \Delta v$ из точки, отвечающей $R^-KS_w^+$ -комбинации, могут выходить линии, которым соответствуют следующие комбинации,



Фиг. 6

состоящие из трех ударных или ав-томодельных волн и контактного разрыва фиг. 5.

1°. $R^-KR^-S_w^+$ -комбинация. Линия, соответствующая ей, оканчивается на линии вакуума, при этом R^- -линия в плоскости Ph , выходящая из точки P_0 , пересекает ось h_1 .

2°. $R^-KS^-S_w^+$ -комбинация. Линия, соответствующая ей, оканчивается на оси Δu в точке, которой отвеча-

ет $KS^-S_w^+$ (KS_g)-комбинация. При этом интенсивность R^- -волны равна нулю, а S^- -линия, начинающаяся на S_w^+ -линии, приходит в точку P_0 .

3°. $R_g^+R^-KS_w^+$ -комбинация. В плоскости Ph линия, соответствующая R_g^+ -волне, есть отрезок прямой, совпадающий с осью P слева от точки P_0 до $P = 1$. В точках этого отрезка может начинаться R^- -линия, идущая до пересечения с S_w^+ -линией. Чем меньше P перед R^- -волной, тем меньше в волне H_τ и Δv . R^- -линия, отвечающая R^- -волне, распространяющейся по газу с $P \leq 1$, $h = 0$, вырождается в часть оси P от $P = 1$ до $P = 0$. R_g^+ -волна, за которой P становится меньше единицы, непрерывно переходит в R_g^- -волну [15].

Линия, которой соответствует $R_g^+R^-KS_w^+$ -комбинация, оканчивается, в точке, лежащей на оси Δu , которой отвечает $R_g^+R^-K$ -комбинация.

4°. $S_g^+R^-KS_w^+$ -комбинация. Линия, соответствующая ей, оканчивается в точке, лежащей на оси Δu , которой отвечает $S_g^+KS_g^+$ -комбинация. При движении по этой линии интенсивность R^- -волны уменьшается до нуля.

Заметим, что точке оси Δu , которой соответствует $KS^-S_w^+$ -комбинация, отвечает также KS_g -комбинация, а части оси Δu , которой соответствует $S_g^+KS^-S_w^+$ -комбинация, отвечает также $S_g^+KS_g$ -комбинация.

Из точки $S_g^+KS_g^+$ выходит линия (на фиг. 5 проведена пунктиром), разделяющая $S_g^+R^-KR^-S_w^+$ - и $S_g^+R^-KR^-S_g^+$ -области. Отметим, что за S_g^+ -волной, входящей в последнюю комбинацию, движущейся вправо, $P > P_1$. Нетрудно видеть, что эта волна эволюционна.

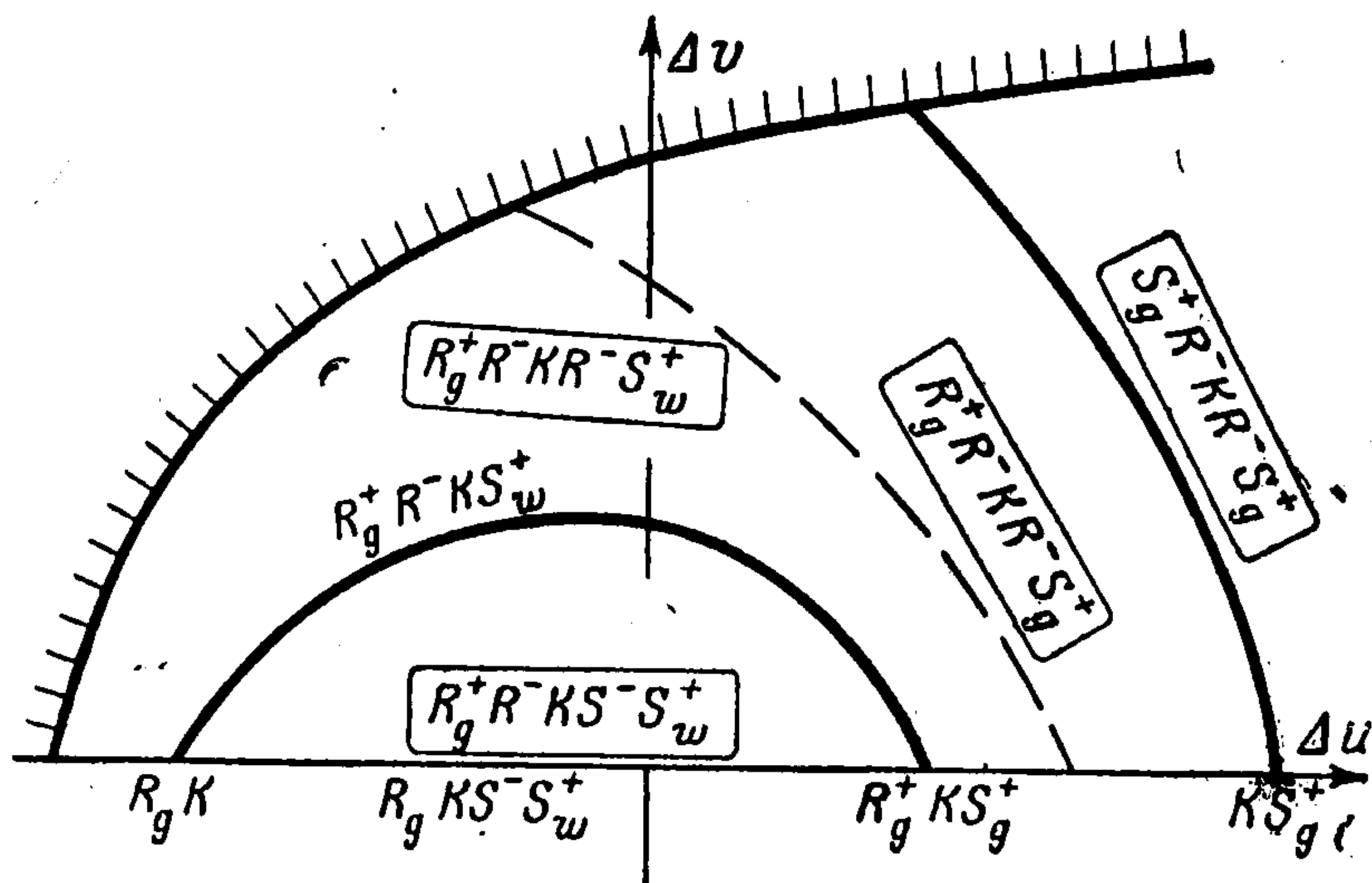
В рассматриваемом случае ($H_{\tau 0}' = 0$, $P_0' < 1$) вправо может идти неэволюционная S_g -волна или $R^-S_g^+$ -комбинация, включающая неэволюционную [18, 19] (см. также [15]) S_g -волну, за которой $P < P_1$, что ведет к неоднозначности в плоскости $\Delta u \Delta v$: одной и той же точке $\Delta u \Delta v$ в этом случае могут соответствовать две комбинации, например: $R_g^+R^-KS^-S_w^+$ и $R_g^+R^-KR^-S_g^+$; $S_g^+KS^-S_w^+$ и $S_g^+KS_g$, $KS^-S_w^+$ и KS_g .

Однако эта неоднозначность легко исключается. В самом деле, при сколь угодно малом $H_{\tau 0}' \neq 0$ S_g -волны вправо идти не могут, а

потому не может быть комбинаций, содержащих незволюционную S_g -волну и нарушающих однозначность.

б) $P_0 > P_1$ (фиг. 6 в плоскости Ph , фиг. 7 в плоскости $\Delta u \Delta v$).

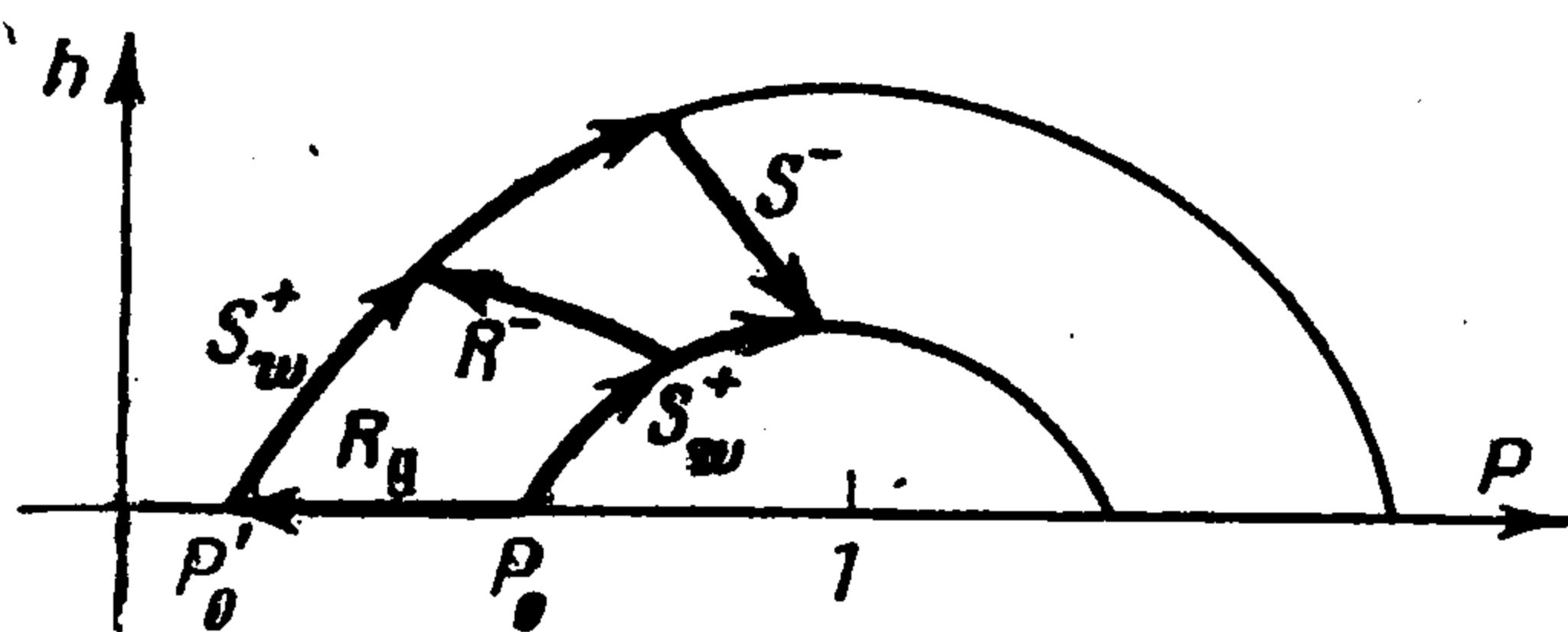
В этом случае $R^-KS_w^+$ -комбинации быть не может. Из трех ударных или автомодельных волн и контактного разрыва могут быть $R_g^+R^-KS_w^+$ - и $R^-KR^-S_g^+$ -комбинации (фиг. 6). Первой комбинации в плоскости $\Delta u \Delta v$ соответствует линия, идущая из точки R_gK в точку $R_g^+KS_g^+$ и разделяющая $R_g^+R^-KR^-S_w^+$ - и $R_g^+R^-KS^-S_w^+$ -области; второй — линия, выходящая из точки KS^+ и разделяющая $R^+R^-KR^-S_g^+$ - и $S_g^+R^-KR^-S_g^+$ -области.



Фиг. 7

Пунктиром на фиг. 7 проведена линия, разделяющая $R_g^+R^-KR^-S_g^+$ - и $R_g^+R^-KR^-S_w^+$ -области.

На этой линии интенсивность S_g^+ и S_w^+ -волн постоянна, а интенсивности R^- -волн равны и меняются от 0 до некоторой конечной величины.



Фиг. 8

4. Пусть $P_0 < 1$, $P_0' < 1$ и пусть по-прежнему $P_0 > P_0'$ (фиг. 8 в плоскости Ph и фиг. 9 в плоскости $\Delta u \Delta v$).

Рассмотрим случай, когда S_w^+ -линия, выходящая из точки P_0 , не пересекается с S_w^+ -линией, выходящей из точки P_0' . Возможны следующие комбинации из трех ударных или автомодельных волн и контактного разрыва, которым в плоскости $\Delta u \Delta v$ соответствуют линии.

1. $S_w^+R^-KS_w^+$ -комбинация. Ей отвечает линия, начинающаяся в точке оси Δu , которой соответствует R_g^-K -комбинация. Эта линия непрерывно переходит в линию, которой соответствует $S_g^+R^-KS_w^+$ -комбинация. R^- -линия в плоскости Ph , которой соответствует R^- -волна, входящая в эту комбинацию, тогда начинается не на S_w^+ -линии, а на S_g^+ -линии. $S_g^+R^-KS_w^+$ -линия оканчивается в точке, которой соответствует $S_g^+KS_g^+$ -комбинация. $S_w^+R^-KS_w^+$ -линия разделяет $S_w^+R^-KR^-S_w^+$ - и $S_w^+R^-KS^-S_w^+$ -области; $S_g^+R^-KS_w^+$ -линия разделяет $S_g^+R^-KR^-S_w^+$ - и $S_g^+R^-KS^-S_w^+$ -области.

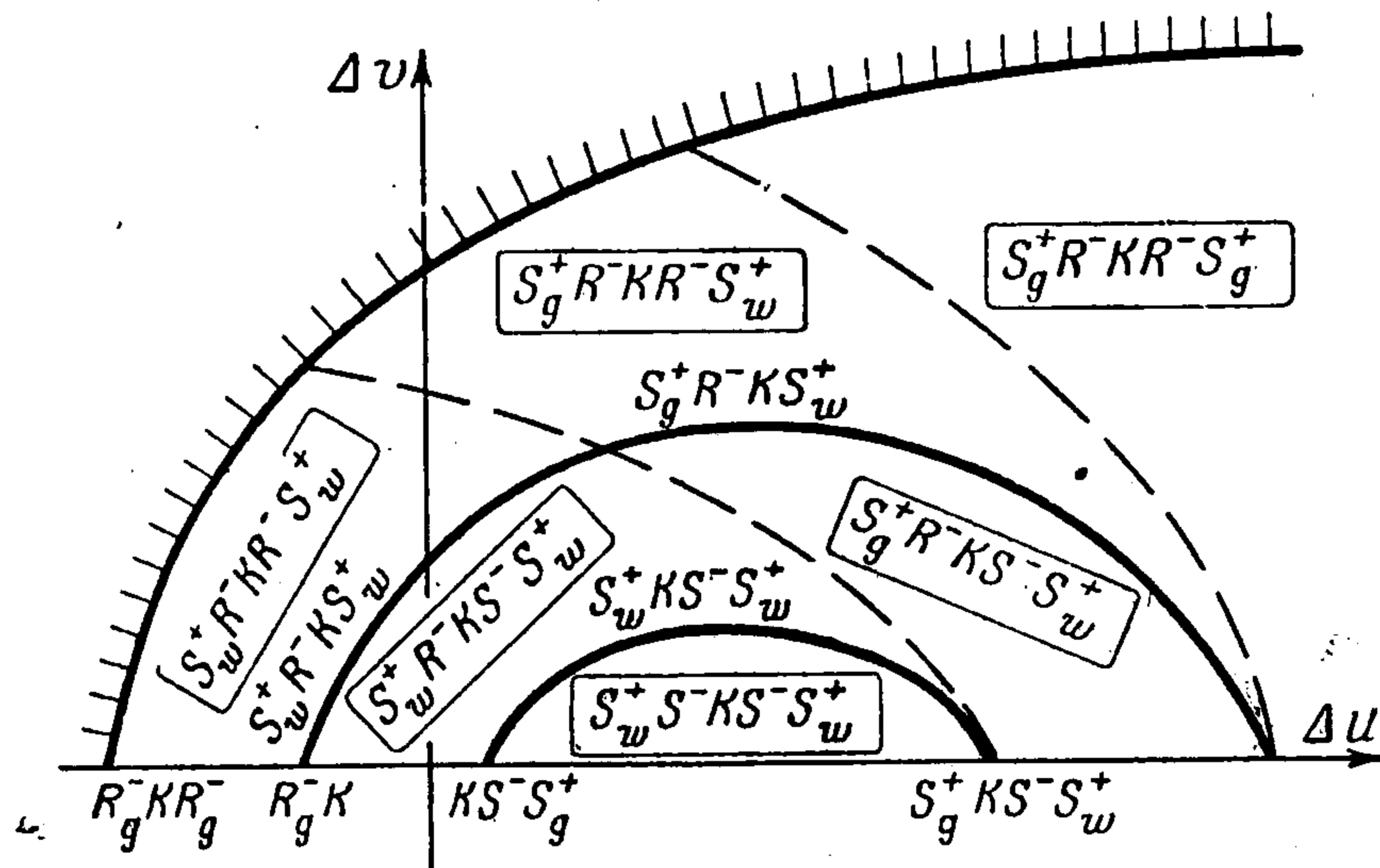
2. $S_w^+KS^-S_w^+$ -комбинация. Ей отвечает линия, начинающаяся в точке, которой соответствует $KS^-S_w^+$ (KS_g^-)-комбинация, и оканчивающаяся в точке, которой соответствует $S_g^+KS^-S_w^+$ ($S_g^+KS_g^-$)-комбинация. Эта линия разделяет области, которым соответствуют $S_w^+R^-KS^-S_w^+$ - и $S_w^+S^-KS^-S_w^+$ -комбинации.

На линии, разделяющей области, которым соответствуют $S_w^+R^-KS^-S_w^+$ - и $S_g^+R^-KS^-S_w^+$ -комбинации (на фиг. 9 изображена пунктиром), интен-

сивности S_w^+ и S_g^+ -волн постоянны, а интенсивности R^- -волн равны и меняются от 0 до некоторой конечной величины.

сивность S_g^+ -волны, идущей вправо, постоянна; интенсивность S_w^+ -, R^- -, S^- -волн меняется.

На линии, разделяющей $S_w^+R^-KR^-S_w^+$ - и $S_g^+R^-KR^-S_w^+$ -комбинации (на фиг. 9 также изображена пунктиром), интенсивность S_g^+ - и S_w^+ -волн



Фиг. 9

постоянна, интенсивность R^- -волн меняется.

В случае, указанном в п. 4, так же как и в случае п. 2, выбрасываются комбинации, содержащие неэволюционные S_g^- -волны: KS_g^- и т. д.

5. Пусть $P_0' < 1$, $P_0 = 1$. Диаграмма в плоскости $\Delta u \Delta v$ в этом случае легко получается из фиг. 9. В самом деле, $S_w^+KS^-S_w^+$ -линия исчезает,

так как из точки $P_0 = 1$ в плоскости Ph не может выходить S_w^+ -волна. Часть другой линии фиг. 9, которой соответствует $S_w^+R^-KS_w^+$ -комбинация, также исчезает. Остается $S_g^+R^-KS_w^+$ -линия, разделяющая $S_g^+R^-KR^-S_w^+$ - и $S_g^+R^-KS^-S_w^+$ -области, и пунктирная линия, разделяющая $S_g^+R^-KR^-S_w^+$ - и $S_g^+R^-KR^-S_g^+$ -области (линия вакуума безусловно присутствует во всех случаях).

6. Пусть $P_0 = 1$, $P_0' = 1$. Из двух ударных или автомодельных волн возможны $R_g^-KR_g^-$ - и $S_g^-KS_g^-$ -комбинации, причем входящие в них R_g^- и S_g^- -волны имеют одинаковую интенсивность. Этим комбинациям соответствуют точки оси Δu . Между осью Δu и линией вакуума находится область, которой соответствует $S_g^+R^-KR^-S_g^+$ -комбинация. Волны S_g^+ и R^- , входящие в нее, также имеют одинаковую интенсивность.

Таким образом, показано, что в зависимости от величин P_0 , P_0' возможны шесть различных диаграмм в плоскости $\Delta u \Delta v$. Для решения задачи о распаде разрыва нужно, зная p_0 , p_0' , H_x , γ , составить P_0 и P_0' и тем самым выбрать тип диаграммы. Для построения диаграммы необходимо еще знание ρ_0 и ρ_0' . После чего, зная Δu , Δv на разрыве, выясняем, на какую комбинацию распадается начальный разрыв.

Задача, рассматриваемая в работе [8], является частным случаем задачи, изложенной в настоящей работе, и легко получается из нее, когда

$$P_0 = P_0', \quad \Delta u = u_0 - u_0' = 0, \quad \rho_0 = \rho_0'.$$

Действительно, нетрудно видеть, что разрыв с такими условиями на начальные параметры может распадаться либо на $S_g^+R^-KR^-S_g^+$ -, либо, на $S_w^+R^-KR^-S_w^+$ -комбинации.

Диаграммы для случая распада разрыва, когда с одной стороны поле нормально разрыву, а с другой произвольно, почти эквивалентны диаграммам, полученным при рассмотрении общего случая распада [5, 6], только магнитогидродинамические волны, идущие в сторону нормаль-

ного поля, следует заменить на газодинамические волны того же типа.

Кроме того, может возникать комбинация $R_g^+KR^+$ ($R^+KR_g^+$), чего в произвольном случае разрыва, вообще говоря, быть не может.

Полученные результаты имеют приложения в астрофизике при изучении столкновений космических масс, в магнитной гидродинамике при исследовании взаимодействия магнитогидродинамических волн, расщепления неэволюционных ударных волн и т. д.

Поступила 25 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. K o t c h i n e N. E. Sur la théorie des ondes de choc dans un fluide. Reudicouti del Circolo Nat. de Palermo, 1926, 50, стр. 305.
2. К о ч и н Н. Е. К теории разрывов в жидкости. Собр. соч., т. II, 1949.
3. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1954.
4. Курант Р., Фридрихс О. Сверхзвуковые течения и ударные волны. ИИЛ, 1954.
5. Г о г о с о в В. В. Распад произвольного разрыва в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
6. Г о г о с о в В. В. Взаимодействие магнитогидродинамических волн с вращательными и контактными разрывами. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
7. Г о г о с о в В. В. Взаимодействие магнитогидродинамических волн. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
8. В а з е р I. Resolution of an initial shear flow discontinuity in one dimensional hydromagnetic flow. Astrophys. J., 1958, 128, N 3.
9. Л ю б а р с к и й Г. Я., П о л о в и н Р. В. Расщепление малого разрыва в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 5.
10. А х и е з е р А. И., П о л о в и н Р. В. О движении проводящего поршня в магнитогидродинамической среде. ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 2.
11. Г о л и ц и н Г. С. Одномерные движения в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 3.
12. В о л к о в Т. Ф. К задаче о распадении произвольного разрыва в сплошной среде. Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 1958, т. III.
13. К а т о G. Interaction of hydromagnetic waves. Progr. theor. phys., 1949, 21, N 3.
14. Б а р м и н А. А., Г о г о с о в В. В. Задача о поршне в магнитной гидродинамике. ДАН СССР, 1960, т. 134, № 5.
15. Г о г о с о в В. В. О движении поршня в проводящей среде. ДАН СССР, 1960, т. 135, № 1.
16. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, 1957.
17. П о л о в и н Р. В. О движении ударных волн вдоль магнитного поля. ЖЭТФ, 1960, т. 39, вып. 4.
18. А х и е з е р А. И., Л ю б а р с к и й Г. Я., П о л о в и н Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 3.
19. С ы р о в а т с к и й С. И. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 6.