

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ТЕЧЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ
ЖИДКОСТИ ПО ТРУБАМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ,
НАХОДЯЩИМСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. А. Гринберг

(Ленинград)

Рассматривается решение интегральных уравнений задачи об установившемся течении проводящей жидкости в прямоугольной трубе с двумя непроводящими стенками и двумя проводящими, параллельными внешнему магнитному полю, а также получена новая форма решения задачи Шерклифа [1] о течении в трубе с непроводящими стенками. Даны эффективные решения, пригодные, в частности, и при больших значениях числа Гартмана.

1. Рассмотрим установившееся течение проводящей жидкости по трубе прямоугольного сечения с двумя проводящими стенками, параллельными внешнему магнитному полю H^0 , направление которого принимаем за ось x .

Поставленная задача уже рассматривалась в работе [2], причем предполагалось, что поле скоростей, а также электрическое и магнитное поля в жидкости не зависят от координаты z в направлении оси трубы, что постоянен по длине и по сечению трубы градиент давления $-\partial p / \partial z = P$ и что через идеально проводящие стенки трубы течет ток I на единицу длины трубы.

Задача была сведена к решению интегрального уравнения

$$\int_0^l [G(\xi, d, x, 0) + G(\xi, 0, x, 0)] f_0(\xi) \operatorname{ch} \gamma(x - \xi) d\xi = \frac{2\alpha \operatorname{sh} \gamma x \operatorname{sh} \gamma(l - x)}{\operatorname{sh} \gamma l} \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.1)$$

где

$$G(\xi, \eta, x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{K_0(\gamma \sqrt{(x_m - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}) + K_0(\gamma \sqrt{(x_m - \xi)^2 + (y_n' - \eta)^2}) - K_0(\gamma \sqrt{(x_m' - \xi)^2 + (y_n' - \eta)^2}) - K_0(\gamma \sqrt{(x_m' - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2})\} \quad \begin{matrix} (0 \leq x \leq l) \\ (0 \leq y \leq d) \end{matrix} \quad (1.2)$$

Здесь $K_0(z)$ — функция Макдональда, l и d — длины сторон прямоугольного сечения трубы соответственно в направлении поля H^0 и перпендикулярно к нему

$$x_m = 2ml + x, \quad x_m' = 2ml - x, \quad y_n = 2nd + y, \quad y_n' = 2nd - y \quad (1.3)$$

$$\gamma = \frac{\mu H^0}{2c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}, \quad \alpha = \frac{1}{4\gamma\eta} \left(Pl - \frac{H^0 \mu I}{c} \right) \quad (1.4)$$

причем c — скорость света, σ , μ и η — проводимость, магнитная проницаемость и вязкость жидкости.

Если $\gamma d \gg 1$ и $\gamma l \gg 1$, то уравнение (1.1) приближенно заменяется таким¹:

$$\int_0^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{V|z-\zeta|} = \frac{2 \operatorname{sh} Mz \operatorname{sh} M(1-z)}{\operatorname{sh} M} + e^{-2Mz} \Phi(z) + e^{-2M(1-z)} \Psi(z) \quad (1.5)$$

где

$$\Phi(z) = \int_z^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{Vz+\zeta}, \quad \Psi(z) = \int_0^z \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{V2-z-\zeta}$$

$$z = \frac{x}{l}, \quad f_0(x) = \frac{2\alpha \sqrt{2\pi M}}{l} \chi\left(\frac{x}{l}\right) \quad (M = \gamma l - \text{число Гартмана})$$

2. Запишем уравнение (1.5) в виде

$$\int_0^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{V|z-\zeta|} = w(z) \quad (0 \leq z \leq 1) \quad (2.1)$$

причем для $\chi(z)$ получается следующее выражение [3]:

$$\chi(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \Gamma^2(3/4)} \frac{1}{z^{1/4}} \frac{d}{dz} \int_z^1 \frac{V\bar{\zeta} d\zeta}{(\zeta-z)^{1/4}} \frac{d}{d\zeta} \int_0^\zeta \frac{w(\sigma) d\sigma}{\sigma^{1/4} (\zeta-\sigma)^{1/4}} \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) решаем методом последовательных приближений.

За первое приближение (которым здесь и ограничимся) примем такое, в котором в формуле (1.5) медленно изменяющиеся множители $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, стоящие при весьма быстро меняющихся множителях e^{-2Mz} и $e^{-2M(1-z)}$, заменяются их общим значением²

$$\int_0^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{V\bar{\zeta}} = \int_0^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{V1-\zeta} \equiv A = \text{const} \quad (2.3)$$

при $z=0$ и $z=1$ соответственно, т. е. их значениями в точках, в которых быстро убывающие экспоненты имеют свое максимальное значение, равное единице. Функция $w(z)$ становится при этом равной, если отбросить e^{-2M} по сравнению с единицей³

$$w(z) = 1 + (A-1)(e^{-2Mz} + e^{-2M(1-z)}) \quad (2.4)$$

и $\chi(z)$ может быть найдена по формуле (2.2), причем постоянная A должна определяться из условия $\chi(0) = 0$.

Полагаем $\chi(z) = \chi_1(z) + (A-1)[\chi_2(z) + \chi_3(z)]$, причем подчиняем функции $\chi_i(z)$ уравнениям

$$\int_0^1 \frac{\chi_1(\zeta) d\zeta}{V|z-\zeta|} = 1, \quad \int_0^1 \frac{\chi_2(\zeta) d\zeta}{V|z-\zeta|} = e^{-2Mz}, \quad \int_0^1 \frac{\chi_3(\zeta) d\zeta}{V|z-\zeta|} = e^{-2M(1-z)} \quad (2.5)$$

¹ Ср. вывод уравнений (2.43) и (4.9) работы [2].

² Так как $\chi(1-z) = \chi(z)$.

³ Заметим, что выбираемая нами функция $w(z)$ удовлетворяет с той же точностью соотношению

$$w(0) = \int_0^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{V\bar{\zeta}} = A$$

вытекающему из уравнения (2.1) при $z=0$.

Заменяя во втором уравнении z на $(1-z)$ и ζ на $(1-\zeta)$, видим, что

$$\int_0^1 \frac{\chi_2(1-\zeta) d\zeta}{V|z-\zeta|} = e^{-2M(1-z)} \quad \text{или} \quad \chi_3(\zeta) = \chi_2(1-\zeta) \quad (2.6)$$

Итак, остается найти решения первого и второго уравнений (2.5), что может быть выполнено при помощи формулы (2.2). Получаем, опуская довольно длинные промежуточные выкладки и преобразования

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{2} [z(1-z)]^{1/4}} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \chi_2(z) = & -\frac{1}{4\sqrt{2}\pi\Gamma(3/4)(2M)^{3/4}} \frac{1}{[z(1-z)]^{1/4}} + \quad (v_m = [(1-z)(1-\sigma)]^{1/4}) \\ & + \frac{\sqrt{2}}{V\pi\Gamma^2(3/4)z^{1/4}} \int_0^1 \frac{e^{-2M\sigma} [6M\sigma - 8M^2\sigma^2] d\sigma}{\sigma^{3/4}} \int_0^{v_m} \frac{v^2 dv}{V(z-\sigma)^2 + 4z\sigma v^4} \quad (2.8) \end{aligned}$$

причем, в последней формуле опять опущены некоторые члены порядка e^{-2M} .

При $z=0$ двойной интеграл в формуле (2.8) становится равным

$$\int_0^1 \frac{e^{-2M\sigma} [6M - 8M^2\sigma] (1-\sigma)^{3/4}}{3\sigma^{1/4}} d\sigma \approx \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{2M} \left(1 + \frac{3}{32M}\right)$$

тогда как при $z=1$ он обращается в нуль. Требование

$$\begin{aligned} \chi(0) &= \{\chi_1(z) + (A-1)[\chi_2(z) + \chi_3(z)]\}_{z \rightarrow 0} = \\ &= \{\chi_1(z) + (A-1)[\chi_2(z) + \chi_2(1-z)]\}_{z \rightarrow 0} = 0 \end{aligned}$$

дает поэтому, если отбросить малые величины порядка $M^{-3/4}$, следующее равенство

$$A-1 = -\frac{\Gamma(3/4)}{(2M)^{1/4} \sqrt{\pi}} \quad (2.9)$$

Таким образом, окончательная в принятом приближении формула для $\chi(z)$ имеет вид

$$\chi(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left\{ \frac{(1 + 1/4 M)}{[z(1-z)]^{1/4}} - \frac{2}{(2M)^{1/4} \Gamma(3/4)} [F(z) + F(1-z)] \right\} \quad (2.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z^{1/4}} \int_0^1 \frac{e^{-2M\sigma} [6M\sigma - 8(M\sigma)^2] d\sigma}{\sigma^{1/4}} \int_0^{v_m} \frac{v^2 dv}{V(z-\sigma)^2 + 4z\sigma v^4} \quad (2.11) \\ & \quad (v_m = [(1-z)(1-\sigma)]^{1/4}) \end{aligned}$$

Заметим, что входящий сюда внутренний интеграл выражается через эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $k = 1/\sqrt{2}$, а именно,

$$\begin{aligned} \int_0^{v_m} \frac{v^2 dv}{V(z-\sigma)^2 + 4z\sigma v^4} &= \frac{V \operatorname{sh} \beta}{2 \sqrt{z\sigma}} \left\{ \frac{1}{2} F\left(\varphi_m, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\varphi_m, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\operatorname{tg} \varphi_m / 2}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_m / 2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^4 \frac{\varphi_m}{2}} \right\} \quad (2.12) \end{aligned}$$

При этом считается, что $z > \sigma$, а также введены обозначения

$$\sqrt{\frac{z}{\sigma}} = e^\beta, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi_m}{2} = \frac{v_m}{\sqrt{\operatorname{sh} \beta}} \quad (2.13)$$

При $\sigma > z$ следует в (2.12) и (2.13) поменять местами z и σ . Формулы (2.12) — (2.13) верны при любом $v_m \leq 1$, а не только при $v_m = [(1-z)(1-\sigma)]^{1/4}$.

Справедливость этих формул легко устанавливается, если положить в исходном интеграле

$$v = \left(\frac{(z-\sigma)^2}{4z\sigma} \right)^{1/4} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \equiv \sqrt{\operatorname{sh} \beta} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

и записать получающийся результат в такой форме:

$$I = \frac{\sqrt{\operatorname{sh} \beta}}{2\sqrt{z\sigma}} \lim_{\varphi_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varphi_0}^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\varphi_m} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \right\}$$

и воспользоваться соотношением

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \Delta(\varphi)} = \int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int \Delta(\varphi) d\varphi - \operatorname{ctg} \varphi \Delta(\varphi) + \operatorname{const}, \quad \Delta(\varphi) = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}$$

которое нетрудно проверить дифференцированием.

3. Переходим к исследованию полученного решения. Заметим, прежде всего, что функция $F(z)$ положительна в смежности с $z=0$, а затем при возрастании z меняет знак и далее остается отрицательной до значения $z=1$, где она обращается в нуль. Это прямо следует из формулы (2.11), если учесть, что в силу быстрой сходимости входящего в нее интеграла по σ заметный вклад в значение $F(z)$ дает лишь участок, на котором σ имеет порядок не выше $O(M^{-1})$.

В силу этого при z заметно большем, чем M^{-1} , можно во внутреннем интеграле (2.11) положить

$$\sqrt{(z-\sigma)^2 + 4z\sigma v^4} \approx z \quad (3.1)$$

В результате получим

$$\int_0^{v_m} \frac{v^2 dv}{\sqrt{(z-\sigma)^2 + 4z\sigma v^4}} \approx \frac{(1-z)^{3/4}}{3z} \quad (v_m = [(1-z)(1-\sigma)]^{1/4}) \quad (3.2)$$

Это дает для соответствующих значений z

$$F(z) \approx \frac{2(1-z)^{3/4}}{3z^{3/4}(2M)^{3/4}} \int_0^\infty e^{-t} \left[\frac{3}{2} t^{3/4} - t^{7/4} \right] dt = -\frac{\Gamma(3/4)(1-z)^{3/4}}{8(2M)^{3/4} z^{3/4}} \quad (3.3)$$

Пользуясь этой формулой, получим из (2.10) приближенное выражение для $\chi(z)$, верное в средней части интервала $0 \leq z \leq 1$, т. е. на расстояниях от его концов, заметно превосходящих M^{-1}

$$\chi(z) \approx \frac{1}{\pi \sqrt{2} [z(1-z)]^{1/4}} \left\{ 1 + \frac{1}{8Mz(1-z)} \right\} \quad (3.4)$$

Отсюда видно, что в этой области функция $\chi(z)$ при достаточно больших M мало отличается от $\chi_1(z)$. Так как при таких M формула (3.4)

должна быть применимой в подавляющей части интервала ($0 \leq z \leq 1$), кроме узких зон, непосредственно около $z = 0$ и $z = 1$ и так как у границ этих зон $\chi(z)$ должна становиться очень большой, то внутри этих зон должно иметь место очень резкое нарастание функции $\chi(z)$ от нуля при $z = 0$ или при $z = 1$, т. е. на внешних границах этих зон до соответствующих больших значений ее на внутренних их границах.

Поведение функции $\chi(z)$ в обеих этих зонах одинаково (см. формулу (2.10), из которой видно, что $\chi(1-z) = \chi(z)$); поэтому исследуем ход $\chi(z)$ в смежности с $z = 0$. В формулах (2.10), (2.11) можно при этом положить

$$1 - z \approx 1, \quad [(1-z)(1-\sigma)]^{1/4} \approx 1, \quad F(1-z) \approx 0$$

и переписать выражение для $\chi(z)$ следующим образом:

$$\frac{\pi \sqrt{2}}{(2M)^{1/4}} \chi(z) \approx \frac{1}{u^{1/4}} \left\{ 1 - \frac{2}{\Gamma(3/4)} \int_0^\infty \frac{e^{-t} [3t - 2t^2] dt}{t^{1/4}} \int_0^1 \frac{v^2 dv}{V(u-t)^2 + 4utv^4} \right\} \equiv \omega(u)$$

$$u = 2Mz \quad (3.5)$$

Однопарам трическая функция $\omega(u)$ может быть табулирована¹ и, в частности может быть найдено то значение $u_m = 2Mz_m$, которому соответствует максимум функции $\chi(z)$, т. е. при котором $\omega'(u_m) = 0$.

Приводим значения $\omega(u)$ для некоторых значений u

$u = 1.0$	1.5	2.0	3.0	3.5	4.0
$\omega(u) = 0.798$	0.868	0.872	0.840		0.794
$\Omega(u) = 0.825$	0.849	0.840	0.792	0.766	

Как показывают расчеты

$$u_m \approx 1.7, \quad \omega_{\max} = \omega(u_m) \approx 0.875$$

В соответствии с этим функция $\chi(z)$ имеет в пристеночной области максимум

$$\chi_{\max} = \chi(z_m) = \frac{(2M)^{1/4}}{\pi \sqrt{2}} \omega_{\max} \approx 0.268M^{1/4} \quad \text{при } z_m = \frac{u_m}{2M} \approx \frac{0.85}{M}$$

Примечание. Для ориентировочных расчетов полезно заметить, что для интеграла

$$A(u, t) = \int_0^1 \frac{v^2 dv}{V(u-t)^2 + 4utv^4} \quad (3.6)$$

можно указать простые оценки сверху и снизу, а именно,

$$\frac{1}{2u} \geq A(u, t) \geq \frac{1}{3u} \quad \text{при } u \geq t \geq 0 \quad (3.7)$$

причем верхний предел достигается при $u = t$, а нижний — при $t = 0$. При $t \geq u \geq 0$ в (3.7) надо поменять местами u и t .

Доказательство оценок (3.7), а также аналогичных, более общих, для интеграла

$$I = \int_0^{v_m \leq 1} \frac{v^2 dv}{V(u-t)^2 + 4utv^4} \quad (3.8)$$

непосредственно вытекает из неравенств

$$I_1 = \int_0^{v_m} \frac{v^2 dv}{V(u-t)^2 v^2 + 4utv^4} \geq I = \int_0^{v_m} \frac{v^2 dv}{V(u-t)^2 + 4utv^4} \geq$$

$$\geq \int_0^{v_m} \frac{v^2 dv}{V(u-t)^2 + 4utv^3} = I_2$$

¹ С использованием формул (2.12), (2.13), где следует при этом положить $v_m = 1$.

в которых оба крайних интеграла вычисляются и дают

$$I_1 = \frac{1}{4ut} [V(u-t)^2 + 4utv_m^2 - |u-t|] \quad (3.9)$$

$$I_2 = \frac{1}{6ut} [V(u-t)^2 + 4utv_m^4 - |u-t|] \quad (3.10)$$

При $v_m = 1$ получаются как раз соотношения (3.7), которые показывают, что, например, при $u \geq t \geq 0$

$$A(u, t) = \frac{\theta(u, t)}{u}$$

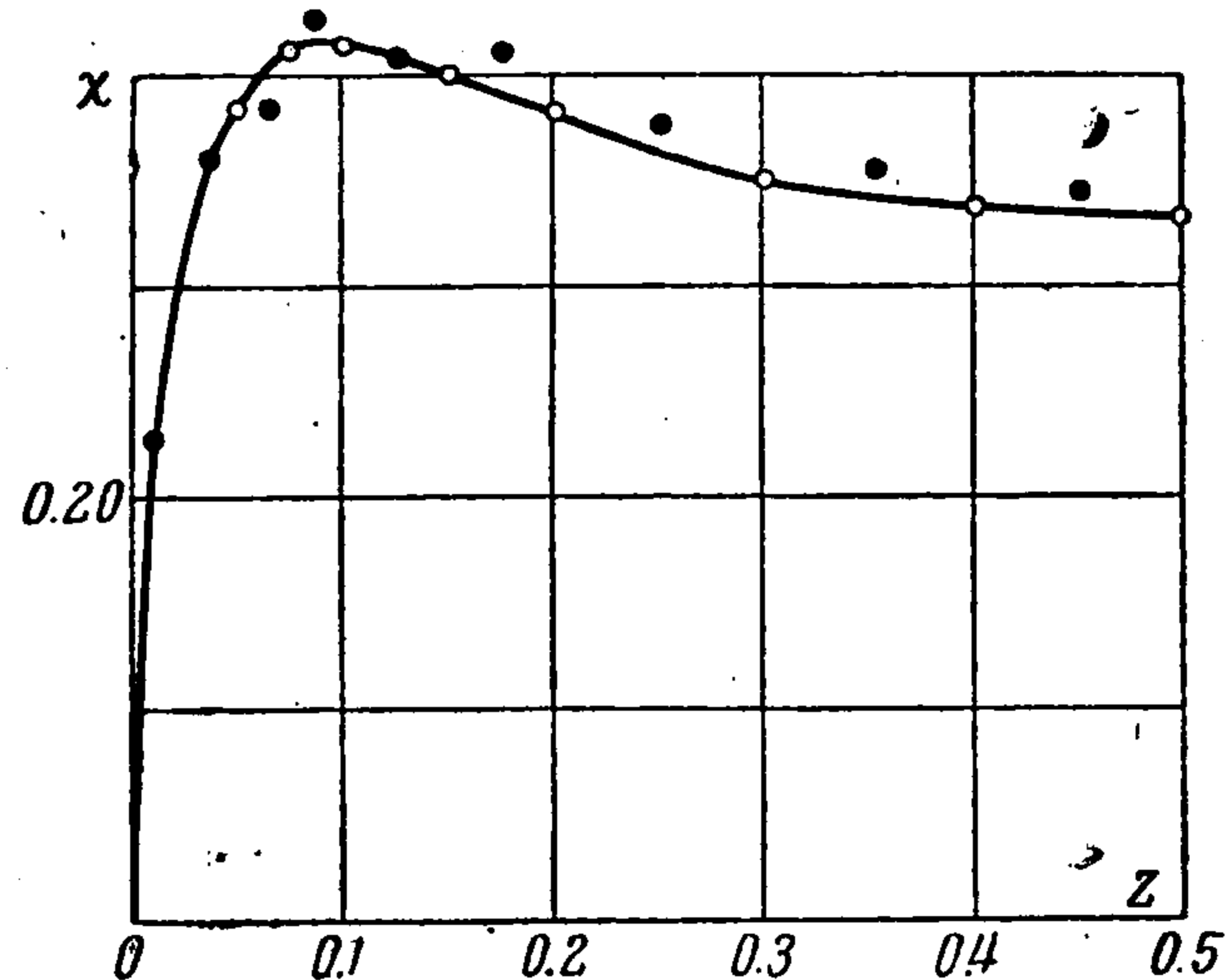
где

$$\frac{1}{3} \leq (t, u) \leq \frac{1}{2}$$

т. е. $\theta(u, t)$ — слабо переменная функция от u и t .

Если теперь положить приближенно

$$A(u, t) = \begin{cases} \frac{1}{3u} & \text{при } u \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{3t} & \text{при } 0 \leq u \leq t \end{cases} \quad (3.11)$$



и подставить эти значения в среднюю часть

формулы (3.5), то приближенное выражение $\Omega(u)$ функции $\omega(u)$ получим в виде:

$$\begin{aligned} \Omega(u) &= \frac{1}{u^{1/4}} \left\{ 1 - \frac{2^t}{\Gamma(3/4)} \left[\frac{1}{u} \int_0^u e^{-t} \left(t^{3/4} - \frac{2}{3} t^{1/4} \right) dt + \int_u^\infty e^{-t} \left(t^{-1/4} - \frac{2}{3} t^{3/4} \right) dt \right] \right\} = \\ &= \frac{2}{u^{1/4} \Gamma(3/4)} \left\{ \Gamma\left(\frac{3}{4}, u\right) - \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{7}{4}, u\right) - \frac{1}{u} \left[\Gamma\left(\frac{7}{4}, u\right) - \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{11}{4}, u\right) \right] \right\} \quad (3.12) \end{aligned}$$

Здесь

$$\Gamma(n, u) = \int_0^u e^{-t} t^{n-1} dt$$

неполная функция гамма¹. На стр. 84 в табличке для сравнения приведены значения функции $\Omega(u)$ при $0 \leq u \leq 3.5$. Максимум $\Omega(u)$, равный 0.849, лежит при $u = U_m \approx 1.5$, чему соответствует в предлагаемом приближении значение

$$\chi_{\max} \approx \frac{\sqrt[4]{2M}}{\pi \sqrt{2}} \Omega(U_m) = 0.228 M^{1/4} \quad \text{при } Z \approx \frac{0.75}{M}$$

Из приведенных данных видно, что расхождение соответствующих значений $\omega(u)$ и $\Omega(u)$ не превышает нескольких процентов, тогда как вычисление значений функции $\omega(u)$ по формулам (2.12), (2.13) и (3.5) требует несравнимо большей затраты вычислительного труда, чем нахождение значений $\Omega(u)$ по формуле (3.12).

В заключение этого раздела приводим на фигуре сравнение результатов численного решения уравнения (3.2) работы [2] для значений числа Гартмана $M = 10$ с результатами, получаемыми для того же значения M по формулам (2.10), (2.11) и (3.4), (3.5). При численном решении значения ζ_i в формуле (3.3) работы [2] выбирались равными 0, 0.0125, 0.0375, 0.0625, 0.0875, 0.125, 0.175, 0.25, 0.35, 0.45 и далее симметрично относительно середины интервала. Соответствующие значения $\chi(\zeta)$ изображаются на фигуре темными кружками.

Значения $\chi(\zeta)$, полученные из (2.10), (2.11) и (3.4), (3.5), изображаются светлыми кружками, через которые проведена кривая. Как видно из фигуры, результаты, полученные обоими способами, близки один к другому, так что даже при таком сравнительно небольшом значении числа Гартмана, как $M = 10$, асимптотическая форма решения (2.10), (2.11) может служить хорошим приближением к точному решению задачи.

¹ Имеются таблицы этих функций. См., например, [4, 5].

4. После того как функция $\chi(z)$ найдена, решение задачи можно считать законченным; действительно, скорость течения u и v , а также вторичное магнитное поле H_z находятся по формулам (2.34) и (2.35) работы [2], в которых надо положить $d = \infty$ и вычеркнуть, в соответствии с этим, $G(\xi, d, x, y)$, заменить $G(\xi, 0, x, y)$ на $g(\xi, 0, x, y)$ и учесть, что

$$f_0(\xi) = \frac{2\alpha}{l} \sqrt{2\pi M} \chi\left(\frac{\xi}{l}\right) \quad (4.1)$$

В результате получим

$$u(x, y) = \frac{1}{2\gamma} \left[\frac{H^0 \mu}{4\pi\eta} H_z + \frac{P(x-a)}{\eta} \right] = \\ = \alpha \left\{ \frac{2\sqrt{2\pi M}}{l} \int_0^l g(\xi, 0, x, y) \chi\left(\frac{\xi}{l}\right) \operatorname{sh} \frac{M(x-\xi)}{l} d\xi - \frac{\operatorname{sh} M(1-2x/l)}{\operatorname{sh} M} \right\} \quad (4.2)$$

$$v(x, y) = -\alpha \left\{ \frac{2\sqrt{2\pi M}}{l} \int_0^l g(\xi, 0, x, y) \chi\left(\frac{\xi}{l}\right) \operatorname{ch} M \frac{(x-\xi)}{l} d\xi - \right. \\ \left. - 2 \frac{\operatorname{sh} Mx/l \operatorname{sh} M(1-x/l)}{\operatorname{sh} M} \right\} \quad (4.3)$$

Не вдаваясь в детальный анализ этих формул, отметим только, что при большом M интегральные члены в этих формулах очень быстро убывают при удалении от стенки $y = 0$. Действительно, из формулы (2.42) работы [2] видно, что $g(\xi, 0, x, y)$ состоит из членов вида

$$\frac{1}{2\pi} K_0 \left[\frac{M}{l} \sqrt{(2ml \pm x - \xi)^2 + y^2} \right] \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

которые при $My/l \gg 1$ асимптотически стремятся к значениям

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{2\pi M \sqrt{(2ml \pm x - \xi)^2 + y^2}}} \exp\left(-\frac{M}{l} \sqrt{(2ml \pm x - \xi)^2 + y^2}\right) \equiv J_m^\pm$$

так что с возрастанием y очень быстро убывают даже произведения $J_m^\pm \operatorname{ch} M(x-\xi)/l$ и $J_m^\pm \operatorname{sh} M(x-\xi)/l$.

Исходя из этого, можно при желании дать надлежащую количественную оценку интегральным членам в правых частях формул (4.2) и (4.3) и установить, на каком расстоянии $y = y_0$ от левого электрода ими можно пренебречь с некоторой практически достаточной степенью точности. Для течения в прямоугольном канале со сторонами l и d следует тогда, что при $d > 2y_0$ функция $f_0(\xi)$, удовлетворяющая уравнению (1.1), практически не отличается от $f_0(\xi)$, даваемой формулой (4.1), т. е. при таких соотношениях размеров можно пренебречь влиянием правого и левого электродов друг на друга. При $d < 2y_0$, но не слишком малых, функция (4.1) может служить в качестве первого приближения при нахождении $f_0(\xi)$.

5. В заключение покажем, как при помощи соответственно измененной функции Грина можно дать новую форму решения задачи Шерклифа о течении проводящей жидкости по такой же прямоугольной трубе, когда все стенки непроводящие.

Пользуясь теми же основными уравнениями, как в пп. 1 и 2 работы [2], и заменяя лишь граничные условия (2.1) и (2.2) работы [2]

такими:

$$H_z|_{x=0} = H_z|_{x=l} = H_z|_{y=0} = H_z|_{y=d} = 0 \quad (5.1)$$

сведем задачу к решению уравнений (2.12) работы [3] при граничных условиях

$$s|_{x=0} = -\beta e^{-\gamma a}, \quad s|_{x=l} = \beta e^{\gamma a} \quad (5.2)$$

$$s|_{y=0} = s|_{y=d} = -\beta \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{\gamma(x-a)} \quad \left(\beta = \frac{Pa}{2\gamma\eta}\right)$$

$$t|_{x=0} = -\beta e^{\gamma a}, \quad t|_{x=l} = \beta e^{-\gamma a} \quad (5.3)$$

$$t|_{y=0} = t|_{y=d} = -\beta \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{-\gamma(x-a)}$$

т. е. при граничных условиях первого рода. Пользуясь функцией Грина $G(\xi, \eta, x, y)$ для уравнений (2.14) работы [2], обращаясь в нуль на сторонах прямоугольника, имеющей вид

$$G(\xi, \eta, x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{K_0(\gamma \sqrt{(x_m - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}) - K_0(\gamma \sqrt{(x_m - \xi)^2 + (y_n' - \eta)^2}) - K_0(\gamma \sqrt{(x_m' - \xi)^2 + (y_n' - \eta)^2}) + K_0(\gamma \sqrt{(x_m' - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2})\} \quad (5.4)$$

обозначения здесь те же, как в (2.15 I), (2.16 I), находим значение s в любой точке внутри прямоугольника по формуле

$$s = \int_0^d \{s|_{\xi=l} G'_\xi(l, \eta, x, y) - s|_{\xi=0} G'_\xi(0, \eta, x, y)\} d\eta + \int_0^l s|_{\eta=0} [G'_\eta(\xi, 0, x, y) - G'_\eta(\xi, d, x, y)] d\xi = \beta \left\{ e^{\gamma a} \int_0^d G'_\xi(l, \eta, x, y) d\eta + e^{-\gamma a} \int_0^d G'_\xi(0, \eta, x, y) d\eta + \frac{1}{a} \int_0^l (\xi - a) e^{\gamma(\xi-a)} [G'_\eta(\xi, 0, x, y) - G'_\eta(\xi, d, x, y)] d\xi \right\} \quad (5.5)$$

и аналогично для t , после чего u и v получаются из соотношений

$$u = \frac{1}{2}(p + q) = \frac{1}{2}[e^{-\gamma(x-a)}s + e^{\gamma(x-a)}t], \quad v = \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2}[e^{-\gamma(x-a)}s - e^{\gamma(x-a)}t] \quad (5.6)$$

Эта форма решения особенно выгодна при больших M .

Все расчеты, относящиеся к числовым данным и фигуре, выполнены К. А. Аристовой, Т. А. Черновой и Н. В. Королевой, которых автор благодарит.

Поступила 11 VIII 1961

Физико-технический ин-т АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff I. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields, Proc. of the Cambr. Phil. Soc., 1953. No. 1, 49.
2. Гринберг Г. А. Об установившемся течении проводящей жидкости в прямоугольной трубе с двумя непроводящими стенками и двумя проводящими, параллельными внешнему магнитному полю. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
3. Ахизер Н. И., Щербина В. А. Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Записки матем. отд. физ.-матем. фак-та Харьковского ун-та им. А. М. Горького и Харьковского матем. об-ва, 1957, сер. 4, т. XXV.
4. Слущкий Е. Е. Таблицы для вычисления неполной Γ -функции и функции вероятности χ^2 . М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950.
5. Pearson K. Tables of the incomplete Γ -Function. Printed by the Cambridge University Press and published by the Office of Biometrika, Re-issue, 1954.