Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О СИНТЕЗЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ СМЕЩЕНИЯХ РЕГУЛИРУЮЩИХ ОРГАНОВ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ В ЗАДАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

К. Штайдтен
(Дрезден)

1. Для краткости будем пользоваться матричными обозначениями. На число строк и число столбцов матриц, как правило, указывать не будем. Если специально ничего не оговорено, то они могут быть любыми, лишь бы произведения в определяющих их формулах имели смысл. Единичную матрицу будем обозначать буквой E или E_n, если необходимо указать порядок. Транспонированную матрицу какой-нибудь матрицы A будем обозначать через A', так что, в частности, x' — строка, если x — столбец. Если матрица A квадратная, то будем обозначать через $|A|$ ее определитель, а через $\operatorname{sp}(A)$ ее след (т. е. сумму элементов, стоящих в главной диагонали). Если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы с одинаковым числом строк и одинаковым числом столбцов, то имеет место соотношение

$$\operatorname{sp}(AB') = \operatorname{sp}(BA') = \operatorname{sp}(A'B) = \operatorname{sp}(B'A) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} \tag{1.1}$$

Кроме обыкновенных матриц, состоящих из чисел или функций времени, будем иметь дело со столбцами, состоящими из случайных величин или случайных процессов (которые, конечно, в частном случае могут совпадать с определенными числами или функциями времени). Аргументы функций и случайных функций времени будут всегда указываться.

Для поставленных целей случайные величины полностью характеризуются их начальными вторыми моментами. Если $a(t)$ и $b(\tau)$ являются случайными векторами-столбцами, то через $\psi_{ab}(t, \tau)$ обозначим матрицу вторых моментов их составляющих

$$\psi_{ab}(t, \tau) = M[a(t)\, b'(\tau)] \tag{1.2}$$

Здесь M обозначает математическое ожидание.

Очевидно, имеет место равенство

$$\psi_{ab}(t, \tau) = \psi_{ba}'(\tau, t) \tag{1.3}$$

Вместо $\psi_{ab}(t_1 t)$ будем писать $\psi_{ab}(t)$. Предполагаем существование конечных вторых моментов всегда, за исключением так называемого белого шума, когда матрица вторых моментов имеет вид

$$\psi_{aa}(t, \tau) = A(t)\, \delta(t - \tau) \tag{1.4}$$

2. Допустим, что задана динамическая система, описываемая уравнением

$$x(t) = s(t) - \int_0^t h(t, \tau)\, y(\tau)\, d\tau \tag{2.1}$$

При этом $x(t)$ — столбец координат системы; $s(t)$ — столбец заданных случайных величин, характеризующих внешние воздействия и состояние системы в начальный момент времени $t = 0$; $y(\tau)$ — столбец координат управляющих органов и $h(t, \tau)$ — заданная матрица.

Управляющие воздействия $y(t)$ формируются из заданного вектора-столбца ρ и из значений в интервале времени $0 \leqslant \tau \leqslant t$ заданного случайного вектора-столбца $r(\tau)$ как сумма двух линейных операторов над ρ и $r(\tau)$. Множество всех случайных векторов-столбцов, полученных таким образом при всевозможных линейных операторах, переместительных с операцией математического ожидания, обозначим через $L(t)$. $L(t)$ как раз множество всех случайных векторов-столбцов α, для которых функция $\psi_{\beta\alpha} = 0$, если $\psi_{\beta\rho} = 0$ и $\psi_{\beta r}(\tau) = 0$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$.

Ставится задача найти $y(t) \in L\,(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, для которого среднеквадратическое отклонение системы от заданного положения x_T в заданный момент времени $T > 0$ будет минимальным. Без ограничения общности можно принять, что $x_T = 0$ и

$$\varepsilon^2(T) = M\,[x'(T)\, x(T)] = \operatorname{sp} \psi_{xx}(T) = \min \tag{2.2}$$

Чтобы добиться единственности оптимальной системы, наложим на $y(t)$ ограничения вида

$$l_i \leqslant k_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.3}$$

где k_i — заданные числа, а l_i — функционалы вида

$$l_i = M \int_0^T \lambda_i(t)\, y_i^2(t)\, dt \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.4}$$

т. е. l_i равны значению интеграла по среднеквадратическим значениям координаты i-го регулирующего органа; $\lambda_i(t)$ — заданные функции веса. Они могут быть любыми функциями времени, которые для всех t больше некоторого положительного числа

$$\lambda_i(t) \geqslant \lambda > 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

В следующих параграфах излагается решение этой общей задачи. Результаты применяются к одной задаче синтеза системы автоматического регулирования.

3. Допустим найденной оптимальную систему. Тогда

$$\delta\varepsilon^2(T) \geqslant 0 \tag{3.1}$$

для всех вариаций $\delta y\,(t)$, которые удовлетворяют условиям

$$l_i + \delta l_i \leqslant k_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.2}$$

(l_i определены по уравнению (2.4)).

Как обычно, считаем вариации бесконечно малыми. Поэтому неравенства (3.2) выполняются при любых вариациях, если $l_i < k_i$. Для тех значений индекса i, при которых $l_i = k_i$, неравенства (3.2) равносильны неравенствам

$$\delta l_i \leqslant 0 \tag{3.3}$$

Таким образом, имеем неравенство (3.1) при всех вариациях, удовлетворяющих неравенствам (3.3) для тех i, для которых $l_i = k_i$. Так как это, в частности, имеет место, когда $\delta l_i = 0$, то существуют такие множители Лагранжа μ_i, что

$$\delta\varepsilon^2(T) + \sum_i \mu_i\, \delta l_i = 0 \tag{3.4}$$

при любых вариациях $\delta y(t)$. Суммирование при этом производится по тем значениям i, при которых имеет место равенство $l_i = k_i$. Но, полагая $\mu_i = 0$, для остальных значений i (при которых $l_i < k_i$) можно принять, что суммирование ведется по всем индексам (от 1 до m). Если варьировать только i-й составляющий столбца $y(t)$, то будет $\delta l_i \neq 0$, а $\delta l_j = 0$ $(j \neq i)$ и по (3.4), (3.3) и (3.1) $\mu_i \geqslant 0$. Таким образом, имеем условия

$$\mu_i \geqslant 0, \quad \mu_i = 0, \qquad \text{если } l_i < k_i \ (i=1, \ldots, m) \tag{3.5}$$

Если положить

$$\beta(t) = \begin{Vmatrix} \mu_1\lambda_1(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \mu_m\lambda_m(t) \end{Vmatrix} \tag{3.6}$$

и учесть соотношения (2.2) и (2.4), то можно написать уравнение (3.4) в форме

$$\mathrm{sp}\,[\delta\psi_{xx}(T) + \delta\int_0^T \beta(t)\,\psi_{yy}(t)\,dt] = 0 \tag{3.7}$$

Отсюда непосредственно получим

$$\mathrm{sp}\,[\psi_x\delta_x(T) + \int_0^T \beta(t)\,\psi_y\,\delta_y(t)\,dt] = 0 \tag{3.8}$$

По уравнению (2.1) имеем

$$\delta x(T) = -\int_0^T h(T, t)\,\delta y(t)\,dt \tag{3.9}$$

Подставим это выражение в уравнение (3.8) и, применяя формулу (1.1), получим

$$\mathrm{sp}\int_0^T M[w(t)\,\delta y'(t)]\,dt = 0 \tag{3.10}$$

При этом $w(t)$ определено формулой

$$w(t) = \beta(t)\,y(t) - h'(T, t)\,x(T) \tag{3.11}$$

Так как $y(t) \in L(t)$, это равносильно уравнениям

$$\psi_{w\rho}(t) = 0, \qquad \psi_{wr}(t, \tau) = 0 \qquad (t \geqslant \tau) \tag{3.12}$$

Можно доказать, наоборот, что каждая система управления, удовлетворяющая условиям (3.12) и (3.5), минимизирует ε^2 (T) среди всех систем, которые удовлетворяют ограничениям (2.3). Допустим для этого, что $y_*(t)$ — управляющее воздействие такой системы. Тогда полагаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(T) &= M[x'(T)\,x(T)], & \eta^2(T) &= \mathrm{sp}\int_0^T \beta(t)\,\psi_{yy}(t)\,dt \\ \varepsilon_*^2(T) &= M[x_*'(T)\,x_*(T)], & \eta_*^2(T) &= \mathrm{sp}\int_0^T \beta(t)\,\psi_{y*y*}(t)\,dt \end{aligned} \tag{3.13}$$

($\beta(t)$ в определении η_*^2 (T) то же самое, что и при η^2 (T)!) и определяем разности

$$\Delta x(t) = x_*(t) - x(t), \qquad \Delta y(t) = y_*(t) - y(t) \tag{3.14}$$

и соответственно $\Delta\varepsilon^2$ (T), $\Delta\eta^2$ (T). Из уравнений (3.12) вытекает, что символ δ в уравнении (3.10) можно заменить символом Δ. Так как это имеет место и для уравнений (3.9), то приходим к уравнению в конечных разностях

$$\mathrm{sp}\,\{\psi_{x\Delta x}(T) + \int_0^T \beta(t)\,\psi_{y\Delta y}(t)\,dt\} = 0 \tag{3.15}$$

Это уравнение соответствует уравнению в вариациях (3.8). По уравнениям (3.13) имеем соотношения

$$\Delta\varepsilon^2(T) = 2\,\mathrm{sp}\,\psi_{x\Delta x}(T) + \mathrm{sp}\,\psi_{\Delta x\Delta x}(T) \tag{3.16}$$

$$\Delta\eta^2(T) = 2\,\mathrm{sp}\int_0^T \beta(t)\,\psi_{y\Delta y}(t)\,dt + \mathrm{sp}\int_0^T \beta(t)\,\psi_{\Delta y\Delta y}(t)\,dt \tag{3.17}$$

Условие (3.5) дает нам $\eta_*^2(T) \leqslant \eta^2(T)$, т. е. $\Delta\eta^2(T) \leqslant 0$. Так как $\beta(t)$ положительно полуопределенная матрица, вторые слагаемые на правых сторонах уравнений (3.16) и (3.17) неотрицательны; следовательно,

$$\mathrm{sp}\int_0^T \beta(t)\,\psi_{y\Delta y}(t)\,dt \leqslant 0$$

Тогда, по уравнению (3.15)

$$\mathrm{sp}\,\psi_{x\Delta x}(T) \geqslant 0$$

Значит, по уравнению (3.16) $\Delta\varepsilon^2(T) \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Если все $\mu_i > 0$, т. е. $\beta(t)$ положительно определенная матрица, то имеем строгое неравенство $\Delta\varepsilon^2(T) > 0$. В случае, когда все $\mu_i > 0$ и, следовательно, все $l_i = k_i$, поведение оптимальной системы $y(t)$ однозначно определено.

Таким образом, доказано, что множество оптимальных систем соответствует множеству решений уравнений (3.12) с числами μ_i, удовлетворяющими условиям (3.5).

4. Решение уравнений (3.12) выразим через лучшую среднеквадратическую аппроксимацию $\sigma(\tau)$ случайного вектора $s(T)$ случайными векторами из $L(\tau)$. $\sigma(\tau)$ однозначно определяется уравнениями

$$\psi_{\sigma\rho}(\tau) = \sigma_{s\rho}(T), \qquad \psi_{\sigma r}(\tau, \vartheta) = \psi_{sr}(T, \vartheta) \qquad (\tau \geqslant \vartheta) \tag{4.1}$$

Введем вспомогательные величины $\xi(\tau)$, $\eta(t, \tau)$, определенные подобным образом как лучшие среднеквадратические аппроксимации векторов $x(T)$, $y(t)$ соответственно, т. е. $\xi(\tau), \eta(t, \tau) \in L(\tau)$ и

$$\begin{aligned} \psi_{\xi\rho}(\tau) &= \psi_{x\rho}(T), \qquad & \psi_{\xi r}(\tau, \vartheta) &= \psi_{xr}(T, \vartheta) \\ \psi_{\eta\rho}(t, \tau) &= \psi_{y\rho}(t), \qquad & \psi_{\eta r}(t; \tau, \vartheta) &= \psi_{yr}(t, \vartheta) \end{aligned} \qquad (\tau \geqslant \vartheta) \tag{4.2}$$

Ввиду единственности такого рода лучших аппроксимаций уравнения (3.11) и (3.12) дают

$$\beta(t)\,\eta(t, \tau) - h'(T, t)\,\xi(\tau) = 0 \qquad (t \geqslant \tau) \tag{4.3}$$

Уравнение (2.1) дает

$$\xi(\tau) = \sigma(\tau) - \int_0^T h(T, t)\,\eta(t, \tau)\,dt \tag{4.4}$$

Очевидно, имеем

$$\eta(t, \tau) = \eta(t, t) = y(t) \qquad (t \leqslant \tau) \tag{4.5}$$

и (4.4) можно поэтому написать в виде

$$\xi(\tau) = \sigma(\tau) - \int_0^\tau h(T, t)\,\eta(t, t)\,dt - \int_\tau^T h(T, t)\,\eta(t, \tau)\,dt \tag{4.6}$$

Допустим, что $|\beta(t)| \neq 0$, т. е. все $\mu_i > 0$. В этом случае получим при помощи уравнения (4.3)

$$\sigma(\tau) = \gamma(\tau)\,\xi(\tau) - \int_0^\tau \dot{\gamma}(t)\,\xi(t)\,dt \tag{4.7}$$

причем

$$\gamma(\tau) = E + \int_\tau^T h(T, t)\,\beta^{-1}(t)\,h'(T, t)\,dt \tag{4.8}$$

Так как $\gamma(\tau)$ — положительно определенная матрица, то $|\gamma(\tau)| \neq 0$; тогда получим

$$\xi(\tau) = \gamma^{-1}(\tau)\,\sigma(\tau) - \int_0^\tau \frac{d}{dt}\gamma^{-1}(t)\,\sigma(t)\,dt \tag{4.9}$$

Искомое $y(t)$ определяется отсюда уравнением

$$y(t) = \beta^{-1}(t)\,h'(T, t)\,\xi(t) \tag{4.10}$$

Чтобы найти уравнения для множителей Лагранжа в замкнутом виде, подставим найденное $y(t)$ в выражения (2.4) для функционалов l_i. Если обозначим i-й столбец матрицы $h(T, t)$ через $h_i(T, t)$ и введем матрицы

$$\Gamma_i(t) = \int_t^T \frac{1}{\lambda_i(\tau)} h_i(T, \tau)\,h_i'(T, \tau)\,d\tau \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{4.11}$$

то получим

$$l_i = -\frac{1}{\mu_i^2}\,\mathrm{sp}\int_0^T \dot{\Gamma}_i(t)\,\psi_{\xi\xi}(t)\,dt \tag{4.12}$$

В дальнейшем предположим, что $\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(t)$ существует. Так как, по определению $\sigma(t)$

$$\psi_{\sigma\sigma}(t,\tau) = \psi_{\sigma\sigma}(\min\{t,\tau\})$$

уравнение (4.9) дает

$$\psi_{\xi\xi}(0) = \gamma^{-1}(0)\psi_{\sigma\sigma}(0)\,\gamma^{-1}(0), \quad \dot{\psi}_{\xi\xi}(\tau) = \gamma^{-1}(\tau)\,\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(\tau)\,\gamma^{-1}(\tau) \tag{4.13}$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что $\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(\tau)$ является положительно полуопределенной матрицей.

Проинтегрировав по частям выражение (4.12), получим (4.14)

$$l_i = \frac{1}{\mu_i^2}\,\mathrm{sp}\left[\gamma^{-1}(0)\,\Gamma_i(0)\,\gamma^{-1}(0)\,\psi_{\sigma\sigma}(0) + \int_0^T \gamma^{-1}(\tau)\,\Gamma_i(\tau)\,\gamma^{-1}(\tau)\,\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(\tau)\,d\tau\right]$$

Кроме множителя $1/\mu_i^2$, μ_j входят в уравнения (4.14) только через $\gamma(\tau)$, которое выражается через них соотношением

$$\gamma(\tau) = E + \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\mu_i}\Gamma_i(\tau) \tag{4.15}$$

Из уравнений (4.14) и (4.15) можно составить уравнения $l_i = k_i$, определяющие μ_i. Оптимальное $\varepsilon^2(T)$ получается в виде

$$\varepsilon^2(T) = \mathrm{sp}\,\{\psi_{ss}(T) - \psi_{\sigma\sigma}(T)\} + l_0 \tag{4.16}$$

причем

$$l_0 = \mathrm{sp}\left[\gamma^{-1}(0)\,\psi_{\sigma\sigma}(0)\,\gamma^{-1}(0) + \int_0^T \gamma^{-1}(t)\,\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(t)\,\gamma^{-1}(t)\,dt\right] \tag{4.17}$$

В общем случае, по крайней мере, одно решение получается в виде предела, когда некоторые μ_i определенным образом стремятся к нулю (ср. п. 5). При помощи уравнений (3.12) нетрудно убедиться, что i-я координата $y(t)$ имеет бесконечное число возможных значений, если $l_i < k_i$. Поэтому в рассматриваемой постановке задачи, за исключением предельных случаев, представляет интерес только рассмотренный в этом параграфе случай ненулевых μ_i.

5. Чтобы доказать существование μ_i, удовлетворяющих условиям (3.5), рассматриваем величину l, определенную соотношением

$$l = \mathrm{sp}\left[\gamma^{-1}(0)\,\psi_{\sigma\sigma}(0) + \int_0^T \gamma^{-1}(t)\,\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(t)\,dt\right] \tag{5.1}$$

Если сравнивать это выражение с уравнениями (4.14), (4.15) и (4.17), то получаем

$$l = l_0 + \sum_{i=1}^{m}\mu_i\,l_i, \qquad l_i = \frac{\partial l}{\partial \mu_i} \tag{5.2}$$

Учитывая, что l и l_i неотрицательны, можно доказать, что l будет непрерывной функцией от μ_i в замкнутой области $\mu_i \geqslant 0$. Поэтому функция

$$H(\mu_1,\ldots,\mu_m) = l - \sum_{i=1}^{m}k_i\mu_i \tag{5.3}$$

принимает в какой-то точке $\mu_{i0} \geqslant 0$ максимальное значение $H_{\max}$. Если все $\mu_{i0} > 0$, то для них $l_i = k_i$ и $y(t)$, найденное в предыдущем пункте, будет искомым оптимальным. Допустим сейчас, что без ограничения общности

$$\mu_{i0} > 0 \quad (i = 1, \ldots, p), \qquad \mu_{i0} = 0 \quad (i = p+1, \ldots, m)$$

Рассмотрим тогда с любыми $\mu_{i1} > 0$

$$\mu_i = \begin{cases} \mu_{i0} & (i \leqslant p) \\ \mu\mu_{i1} & (i \geqslant p+1) \end{cases} \tag{5.4}$$

при $\mu \to 0$. Можно показать, что $y(t)$ при $\mu \to 0$ сремится к выражению $y^\circ(t)$, которое будет решением уравнений (3.12) при $\mu_i = \mu_{i0}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Функционалы l_i° для этого решения являются пределом функционалов l_i. Для $i \leqslant p$ имеем $l_i^\circ = k_i$, т. е. условия (3.5) выполнены. Остальные l_i° $(i = p+1, \ldots, m)$ зависят от значений μ_{i1}. Имеют место соотношения, подобные (5.2)

$$l^1 = \sum_{i=p+1}^{m} \mu_{i1} l_i^\circ, \qquad l_i^\circ = \frac{\partial l^1}{\partial \mu_{i1}} \tag{5.5}$$

причем

$$l^1 = \operatorname{sp}\left[B_1(0)\,\psi_{\sigma\sigma}(0) + \int_0^T B_1(t)\,\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(t)\,dt\right] \tag{5.6}$$

Положительно полуопределенная матрица $B_1(t)$ определяется при помощи

$$A(t) = E + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\mu_{i0}} \Gamma_i(t), \qquad B(t) = \sum_{i=p+1}^{m} \frac{1}{\mu_{i1}} \Gamma_i(t) \tag{5.7}$$

и какой-то матрицы $U(t)$ уравнениями

$$B(t)\,A^{-1}(t) = B(t)\,A^{-1}(t)\,B(t)\,B_1(t), \qquad B_1(t) = U(t)\,B(t)\,A^{-1}(t) \tag{5.8}$$

Из $H \leqslant H_{\max}$ вытекает важное неравенство

$$l^1 \leqslant \sum_{i=p+1}^{m} \mu_{i1} k_i \tag{5.9}$$

Если $m = p + 1$, то получим $l_m^\circ \leqslant k_m$ непосредственно из (5.5) и (5.9). Чтобы в общем случае доказать существование таких μ_{i1}, при которых удовлетворяются все неравенства $l_i^\circ \leqslant k_i$ $(i = p+1, \ldots, m)$, нужно опять сначала доказать, что l^1 непрерывно в замкнутой области $\mu_{i1} \geqslant 0$. Поэтому функция l^1 в какой-то точке μ_{i2} области $\mu_{i1} \geqslant 0$, $\Sigma\mu_{i1}k_i = 1$ принимает максимальное значение. Для тех i, при которых $\mu_{i2} > 0$, можно непосредственно доказать $l_i^\circ \leqslant k_i$.

Если некоторые $\mu_{i2} = 0$, то придется опять перейти к пределу и повторить все рассуждения. Так как $\Sigma\mu_{i2} k_i = 1$, не все $\mu_{i2} = 0$ и по индукции можно доказать, что существует решение $y(t)$, удовлетворяющее условиям $l_i \leqslant k_i$ $(i = p+1, \ldots, m)$.

Из соотношений (5.6) и (5.9) видно, что система уравнений $l_i = k_i$ имеет решение $\mu_i > 0$ при любых (конечных) $k_i > 0$, если для любых $\mu_{i_0} > 0$ $(i = 1, \ldots, p)$ и некоторых $\mu_{i1} > 0$ $(i = p + 1, \ldots, m)$

$$\mathrm{sp} \int_0^T B_1(t)\, \dot{\psi}_{\sigma\sigma}(t)\, dt = \infty \tag{5.10}$$

(При этом нужно, конечно, учитывать все $p = 0, \ldots, m - 1$ и всевозможные перестановки индексов i.)

Если $h(T, t)$—аналитическая функция от t (это имеет место, в частности, в случае стационарного объекта) и $\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(t)$— непрерывная функция от t при $t = T$, то можем утверждать следующее. Если ни для какого столбца $h_i(T, t)$ матрицы $h(T, t)$ не имеет места равенство

$$h_i'(T_1 t)\, \dot{\psi}_{\sigma\sigma}(T) = 0 \tag{5.11}$$

тождественно для всех t, то существует при любых k_i однозначно определенная оптимальная система с положительными μ_i.

6. Как применение общих результатов, рассмотрим задачу синтеза системы автоматического регулирования. Предположим, что задан объект, описываемый системой линейных дифференциальных уравнений, и что внешние возмущения являются случайными процессами, связанными с белым шумом дифференциальными уравнениями. За счет введения дополнительных координат систему уравнений можно всегда привести к виду

$$\dot{\zeta}(t) = C_0(t)\, \zeta(t) + C_1(t)\, y(t) + C_2(t)\, u(t) \tag{6.1}$$

причем $\zeta(t)$ — столбец координат системы, $u(t)$ — белый шум, $C_i(t)$ — заданные матрицы. В качестве регулируемых величин возьмем некоторые линейные комбинации $x(t) = M\zeta(t)$ координат системы. Допустим, что измеряются линейные комбинации $N\zeta(t)$ с ошибками, характеризуемыми случайным процессом $n(t)$.

Как раньше, ставится задача минимизации $\varepsilon^2(T)$ при соблюдении неравенств $l_i \leqslant k_i$, ищется, однако, зависимость $y(t)$ от ρ и $z(t) = N\zeta(t) + n(t)$. В рассматриваемом случае она получается в виде системы дифференциальных уравнений. При этом заданы случайные величины ρ, ζ_0 (начальное значение координат $\zeta(t)$) и случайные процессы $u(t)$ и $n(t)$. Предположим, что $u(t)$ и $n(t)$ представляют собой белый шум и что они не коррелированы ни между собой, ни с ρ и ни с ζ_0, т. е.

$$\begin{gathered}
\psi_{\rho u}(t) = 0, \quad \psi_{\zeta_0 u}(t) = 0, \quad \psi_{\rho n}(t) = 0, \quad \psi_{\zeta_0 n}(t) = 0 \\
\psi_{uu}(t, \tau) = E\delta(t - \tau), \quad \psi_{nn}(t, \tau) = E\delta(t - \tau), \quad \psi_{nu}(t, \tau) = 0
\end{gathered} \tag{6.2}$$

Предположения о $n(t)$ физически означают, что все величины $N\zeta(t)$ измеряются независимо одна от другой с высокочастотными помехами, не зависящими ни от внешних воздействий, ни от положения системы.

О столбце ρ предположим без ограничения общности, что либо $\rho = 0$, либо его составляющие линейно независимы и $\psi_{\rho\rho} = E$.

7. Чтобы свести задачу к задаче, рассмотренной в предыдущих параграфах, введем матрицу фундаментальных решений $R(t)$, определенную уравнениями

$$\dot{R}(t) = G_0(t) R(t), \qquad R(0) = E \tag{7.1}$$

и полагаем для краткости записи

$$D_1(t) = R^{-1}(t) G_1(t), \quad D_2(t) = R^{-1}(t) G_2(t), \quad M_1 = MR(T) \tag{7.2}$$

Уравнение (6.1) можно тогда привести к виду (2.1), причем

$$s(t) = MR(t)\left[\zeta_0 + \int_0^t D_2(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right] \tag{7.3}$$

$$h(t, \tau) = -MR(t) D_1(\tau) \tag{7.4}$$

Чтобы определить $r(\tau)$ в выражении для $z(t)$ положим $y(t) \equiv 0$. Получим

$$r(t) = NR(t)\left[\zeta_0 + \int_0^\tau D_2(\tau)\, u(\tau) d\tau\right] + n(t) \tag{7.5}$$

При помощи уравнений (4.1) нетрудно проверить, что в нашем случае

$$\sigma(t) = M_1 P^{-1}(t)\left[\psi_{\zeta_0\rho} + \int_0^t Q(\tau) R'(\tau) N' r(\tau)\, d\tau\right] \tag{7.6}$$

При этом

$$\dot{P}(t) = Q(t) R'(t) N'NR(t), \qquad P(0) = E$$

$$\dot{Q}(t) = P(t) D_2(t) D_2'(t), \qquad Q(0) = \psi_{\zeta_0\zeta_0} - \psi_{\zeta_0\rho}\psi'_{\zeta_0\rho} \tag{7.7}$$

Уравнения (4.9) и (4.10) дают $y(t)$, выраженное через $\sigma(t)$. Это выражение вместе с (7.6) и уравнением, выражающим $r(t)$ через $z(t)$ и $y(t)$, дают искомую систему уравнений. Из (6.1) и (7.5) получим

$$r(t) = z(t) - NR(t)\int_0^t D_1(\tau)\, y(\tau)\, d\tau \tag{7.8}$$

и после ряда преобразований, наконец

$$y(t) = \beta^{-1}(t) D_1'(t) M_1' \gamma^{-1}(t) M_1 \eta(t) \tag{7.9}$$

причем вспомогательный столбец $\eta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\eta}(t) + [P^{-1}(t)\dot{P}(t) - D_1(t)\beta^{-1}(t) D_1'(t) M_1'\gamma^{-1}(t) M_1]\,\eta(t) =$$
$$= -P^{-1}(t)\, Q(t)\, R'(t)\, N' z(t) \tag{7.10}$$

с начальным условием

$$\eta(0) = \psi_{\zeta_0\rho}\,\rho \tag{7.11}$$

Матрицы $\psi_{\sigma\sigma}(0)$ и $\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(t)$ получаются при помощи уравнений (7.5) и (7.6) в виде

$$\psi_{\sigma\sigma}(0) = M_1\psi_{\zeta_0\rho}[M_1\psi_{\zeta_0\rho}]'$$

$$\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(t) = M_1 P^{-1}(t)\, Q(t)\, R'(t)\, N'\,[M_1 P^{-1}(t)\, Q(t)\, R'(t)\, N']' \tag{7.12}$$

В частном случае, когда величины $x(t)$ являются линейными комбинациями измеряемых величин $N\zeta(t)$ (т. е. $N = UM$), критерий (5.11) физически означает, что при нулевых $y_j(t)$ $(j \neq i)$ оптимальный в смысле наименьшего $\varepsilon^2(T)$ регулятор $y_i(\rho, z(t))$ можно выбрать независимым от $z(t)$ (т. е. измерение $z(t)$ не позволяет при помощи только одного i-го регулирующего органа $y_i(t)$ уменьшить $\varepsilon^2(T)$).

8. В конкретном случае ход вычислений таков. Надо задаваться матрицами $G_0(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$, N, M, $\psi_{\zeta_0\zeta_0}$, $\dot{\psi}_{\zeta_0\rho}$; функциями веса $\lambda_i(t)$; числами k_i и T.

Следует вычислить сначала $R(t)$ как решение системы дифференциальных уравнений (7.1), потом определять $R^{-1}(t), D_1(t)$, $D_2(t)$, $M_1, \Gamma_i(t)$ (по уравнениям (7.4) и (4.11)), $P(t)$, $Q(t)$ как решение системы дифференциальных уравнений (7.7), $P^{-1}(t)$ и $\psi_{\sigma\sigma}(0)$ и $\dot{\psi}_{\sigma\sigma}(t)$. При помощи уравнений (4.14) и (4.15) определяются числа μ_i из системы уравнений $l_i = k_i$. После этого можно вычислять $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\gamma^{-1}(t)$, найти оптимальное значение $\varepsilon^2(T)$ по уравнениям (4.16) и (4.17) и уравнения оптимального регулятора по (7.9), (7.10), (7.11).

В случае стационарного объекта и стационарных шумов, т. е. если G_0, G_1, G_2, N, M и λ_i не зависят от t, $R(t)$ определяется из системы с постоянными коэффициентами. Уравнения (7.7) можно привести к системе с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &[P(t)R^{-1}(t)]^{\cdot} = -[P(t)R^{-1}(t)]\,G_0 + [Q(t)R'(t)]\,N'N \\ &[Q(t)R'(t)]^{\cdot} = [P(t)R^{-1}(t)]\,G_2G_2' + [Q(t)R'(t)]\,G_0' \end{aligned} \qquad (8.1)$$

так что в этом случае коэффициенты уравнений оптимального регулятора являются рациональными выражениями времени t и показательных функций времени.

По содержанию рассмотренная в этой работе задача примыкает к некоторым ранее опубликованным исследованиям. Подход к решению (пп. 3, 4) основывается на общих методах, разработанных в [1]. Задача оптимизации в заданный момент времени в дискретном случае была рассмотрена Бутоном [2].

Если через ε_2^0 обозначить оптимальное значение $\varepsilon^2(T)$, то задача равносильна минимизации функционала $\Sigma\,\mu_i l_i$ среди всех регуляторов, для которых $\varepsilon^2(T) \leqslant \varepsilon_2^0$. В этой формулировке постановка задачи близка к вопросам, рассмотренным, например, в [3]. Существенная разница состоит в том, что мы искали регулятор, оптимальный при заданных (детерминированных или случайных) начальных условиях. Это позволило ограничиться знанием вторых моментов случайных функций.

Решение задачи синтеза без ограничений (определение $\sigma(t)$, п. 7) дано в работе [4].

Поступила 30 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
2. Booton R. C. Jr. Final — Value Systems with Gaussian Inputs. IRE Trans. of Information Theory Sept., 1956. Vol. IT-2, No. 3.
3. Красовский Н. Н., Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограничениях на скорость изменения управляющего воздействия. ПММ, т. XXV, 1961, вып. 3.
4. Kalman R. E., Bucy R. S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Trans. of the ASME, J. of Basic Engineering, March 1961.