

**ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ВВЕДЕНИЯ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ
ИССЛЕДОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ
В АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Е. П. Попов

(Ленинград)

Цель данной статьи состоит в том, чтобы обратить внимание математиков, интересующихся прикладными задачами, на несколько необычную постановку вопроса о малом параметре в уравнениях динамики нелинейных автоматических систем, которая, по-видимому, может быть плодотворной для развития математически строго обоснования (на что сам автор не претендует) широко распространенных приближенных методов исследования автоматических систем, содержащих сильные нелинейности.

Динамика автоматических систем во многих случаях описывается системой нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений, вообще говоря, нелинейных.

Будем считать, для простоты выкладок, что в системе имеется одна нелинейность

$$y = F(x, px) \quad (p = d/dt)$$

хотя последующие рассуждения могут быть распространены и на случай нескольких нелинейностей. При наличии одной нелинейности все остальные уравнения системы, какую бы сложную структуру она не имела, часто приводятся к одному линейному уравнению высокого порядка

$$Q(p)x + R(p)y = S(p)f$$

Здесь $Q(p)$, $R(p)$, $S(p)$ — операторные многочлены с постоянными коэффициентами, f — заданное внешнее воздействие.

В автоматических системах приходится учитывать нелинейности, сильно отличающиеся от соответствующей линейной функции $y = k_1x + k_2px$ (например релейные гистерезисные, типа насыщения, люфта и многие другие). При этом для переменной x , входящей под знак нелинейности, на практике часто наблюдаются процессы, близкие к синусоидальным (периодическим или затухающим), хотя для переменной y , а может быть и для ряда других переменных в той же системе, процесс далек от синусоидального (например, прямоугольный в релейной системе).

Эта важная особенность в дальнейшем и используется. Речь будет идти об автоматических системах, являющихся так называемыми «грубыми» (по терминологии Андропова) системами.

1. О периодическом решении однородного уравнения. Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$Q(p)x + R(p)y = 0, \quad y = F(x, px) \quad (1.1)$$

При отыскании периодического решения для переменной x полагаем

$$x = x_1 + \varepsilon z(t) \quad (x_1 = A_1 \sin \Omega_1 t) \quad (1.2)$$

Здесь $z(t)$ — произвольная ограниченная функция времени, ε — малый параметр.

Для нелинейной функции $y = F(x, px)$ при применении квазилинейных методов часто полагают

$$y = k_1x + k_2px + \mu f(x, px) \quad (1.3)$$

где μ — малый параметр. Другими словами, полагают, что решения для всех переменных данной системы близки к решениям некоторой эквивалентной линейной системы. Для автоматических систем, как уже было сказано, при учете сильной нелинейности это неверно. Поэтому мы не должны пользоваться выражением (1.3), которое часто употребляется в других квазилинейных задачах, или же не должны считать μ малым.

Будем опираться на то, что к линейному близко решение только для x (1.2), а решение для переменной y запишем в виде

$$y = F(x_1, px_1) + \varepsilon\Phi(t) \quad (1.4)$$

т. е. положим, что оно близко к истинной нелинейной функции, взятой от искомого приближенного решения x_1 для переменной x .

Между тем в практических расчетах автоматических систем не вводят явно выражения (1.4), а пользуются приближенным выражением типа $y = k_1x + k_2px$, отбрасывая $\mu f(x, px)$, хотя очевидно, что оно не мало, и получают при этом удовлетворительный результат первого приближения, который в большинстве случаев оказывается достаточным для практики как качественно, так и количественно. Известно (см., например, [1]), что такой подход к приближенному решению оправдывается в автоматике введением физического постулата о наличии в системе свойства фильтра линейной части (1.1), записываемого в виде

$$\left| \frac{R(ik\Omega_1)}{Q(ik\Omega_1)} \right| \ll \left| \frac{R(i\Omega_1)}{Q(i\Omega_1)} \right| \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (1.5)$$

Здесь k порядковые номера высших гармоник означает $k = 2, 3, \dots$ или $k = 3, 5, \dots$.

Покажем при помощи простейших математических выкладок, каким образом можно увязать положения (1.2) — (1.4) между собой, а также и с физическим постулатом о свойстве фильтра (1.5). При этом, по-видимому, хорошее объяснение найдет и тот факт, что непосредственное использование выражения типа $y = k_1x + k_2px$ (гармонический баланс, гармоническая линеаризация, описывающая функция и т. п.) при явно не малом μ в (1.3) дает удовлетворительный результат в первом приближении, несмотря на кажущуюся необоснованность такого решения.

Первая попытка в этом направлении, не доведенная однако до конца, была сделана в работе [2].

2. Построение периодического решения. Итак, предположим, что для переменной x в заданной системе (1.1) существует периодическое решение вида (1.2) с неизвестными пока A_1, Ω_1 и $\varepsilon z(t)$.

Представим заданную нелинейную функцию $y = F(x, px)$ в виде

$$y = F(x_1, px_1) + [F(x_1 + \varepsilon z, px_1 + \varepsilon pz) - F(x_1, px_1)] \quad (2.1)$$

Первое слагаемое можно разложить в ряд Фурье

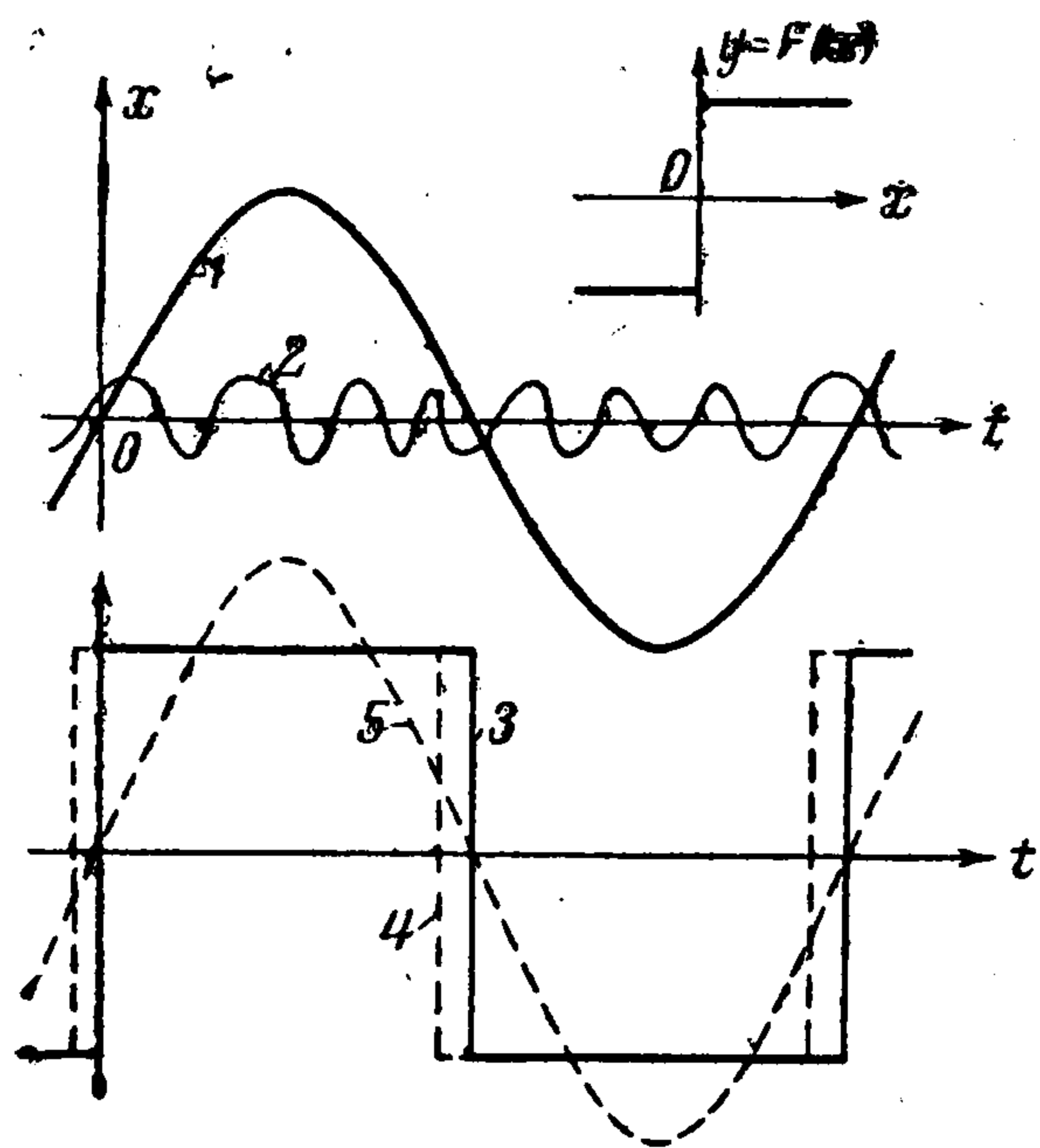
$$F(x_1, px_1) = F_0 + C \sin \Omega_1 t + B \cos \Omega_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(t) \quad (2.2)$$

причем высшие гармоники $F_k(t)$ не малы.

Далее, выражение, стоящее в формуле (2.1) в квадратных скобках, используя ряд Тейлора, можно представить в виде

$$[F(x_1 + \varepsilon z, px_1 + \varepsilon pz) - F(x_1, px_1)] = \\ = \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) z + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) pz \right] + \varepsilon^2 [\dots] + \varepsilon^3 [\dots] + \dots, \quad (2.3)$$

Это выражение будет мало, если входящие в него частные производные от F по x и по px конечны, чему удовлетворяют непрерывные нелинейные функции $F(x, px)$, реально имеющиеся в автоматических



системах. На малость выражения (2.3) можно рассчитывать и при встречающихся на практике разрывных нелинейных функциях, например, релейных, когда указанные производные будут дельта-функциями. Это наглядно видно из примера на фигуре. Добавление εz (кривая 2) к основному слагаемому x_1 (кривая 1) вызывает лишь малое смещение 4 графика 3 для $F(x_1, px_1)$.

При выполнении этих весьма жестких условий, накладываемых на нелинейную функцию и практически не ограничивающих форму ее, из (2.1)

и (2.3) получаем фундаментальное выражение (1.4), а именно

$$y = F(x, px) = F(x_1, px_1) + \varepsilon \Phi(t) \quad (2.4)$$

где

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \varepsilon \Phi_2(t) + \varepsilon^2 \Phi_3(t) + \dots \quad (2.5)$$

причем $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, ... определяются соответствующими выражениями в квадратных скобках правой части (2.3). В результате получаем

$$y = F_0 + C \sin \Omega_1 t + B \cos \Omega_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(t) + \varepsilon \Phi(t) \quad (2.6)$$

где $F_k(t)$ — конечные высшие гармоники, $\varepsilon \Phi(t)$ — малые члены всех частот. Следовательно, здесь отнюдь не предполагается малость отличия нелинейной функции от линейной.

Таким образом, малый член $\varepsilon \Phi(t)$ в формуле (2.4) или (1.4) символизирует малое влияние только высших (малых) гармоник переменной x на форму нелинейных колебаний y , но отнюдь не малость высших гармоник, порождаемых самой нелинейностью при подстановке в нее синусоиды (1.2), как это было бы, если бы использовалось выражение (1.3) при малом μ .

В частности, для разрывных нелинейных характеристик величина $\varepsilon \Phi(t)$ в местах разрыва соответствует малым смещениям линий перескока (например, 3—4 на фигуре).

Подставим теперь (2.6) и (1.2) в заданное уравнение (1.1); имеем

$$Q(p)x_1 + R(p)F_0 + R(p)(C \sin \Omega_1 t + B \cos \Omega_1 t) + R(p) \sum_{k=2}^{\infty} F_k = \\ = -Q(p)\varepsilon z - R(p)\varepsilon \Phi \quad (2.7)$$

Если $x_1 = A_1 \sin \Omega_1 t$ представляет точную первую гармонику искомого периодического решения (1.2), то функции $\varepsilon z(t)$ и $\varepsilon \Phi(t)$ можно представить в виде

$$\varepsilon z = \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sin(k\Omega_1 t + \varphi_k) \quad (2.8)$$

$$\varepsilon \Phi = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \Phi_{j0} + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \sum_{k=1}^{\infty} G_{jk} \sin(k\Omega_1 t + \vartheta_{jk}) \quad (2.9)$$

Кроме того, запишем

$$F_k = N_k \sin(k\Omega_1 t + \eta_k) \quad (2.10)$$

где в общем случае $k = 2, 3, \dots$, а в частном случае $k = 3, 5, \dots$, когда нелинейность (1.1) является нечетной функцией x и не зависит от p . Величины N_k конечны, так как нелинейность существенная, но

$$N_k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

Тогда из (2.7) получим ряд точных равенств для соответствующих гармоник

$$F_0 = -\varepsilon \Phi_{10} - \varepsilon^2 \Phi_{20} - \dots \quad (2.12)$$

$$Q(p)x_1 + R(p)(C \sin \Omega_1 t + B \cos \Omega_1 t) = -R(p)\varepsilon \Phi_{11} - R(p)\varepsilon^2 \Phi_{21} - \dots \quad (2.13)$$

$$Q(p)\varepsilon A_k \sin(k\Omega_1 t + \varphi_k) + R(p)N_k \sin(k\Omega_1 t + \eta_k) = \\ = -R(p)\varepsilon \Phi_{1k} - R(p)\varepsilon^2 \Phi_{2k} - \dots \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2.14)$$

Первое из этих равенств (2.12) говорит только о малости постоянной составляющей ряда Фурье, откуда вытекает определенное требование симметрии нелинейности (с точностью ε)

$$\int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) d\psi = 0 \quad (2.15)$$

Это ограничение может быть снято (см. ниже п. 4). Более важными будут равенства (2.13) и (2.14).

Уравнение (2.13) для точной первой гармоники $x_1 = A_1 \sin \Omega_1 t$ содержит справа малые члены. Определяя без учета этих малых членов первое приближение для искомого периодического решения, которое обозначим

$$x^* = A \sin \Omega t \quad (2.16)$$

получим известное уравнение для приближенного определения периодического решения в виде

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) \right] x^* = 0 \quad (2.17)$$

где

$$q = \frac{G}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \sin \psi d\psi$$

$$q' = \frac{B}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \cos \psi d\psi$$

Далее, так как в уравнениях для высших гармоник (2.14) величины N_k конечны (по крайней мере для нескольких значений k), то величины

$$\left| \frac{R(ik\Omega_1)}{Q(ik\Omega_1)} \right| \quad (k = 2, 3, \dots)$$

должны иметь, по меньшей мере, порядок ε , ибо из (2.14)

$$\varepsilon A_k \sin(k\Omega_1 t + \varphi_k) = - \left| \frac{R(ik\Omega_1)}{Q(ik\Omega_1)} \right| N_k \sin(k\Omega_1 t + \eta_k + \beta_k) - \dots$$

где

$$\beta_k = \arg \frac{R(ik\Omega_1)}{Q(ik\Omega_1)}$$

В то же время величина $\left| \frac{R(i\Omega)}{Q(i\Omega)} \right|$ конечна, так как из (2.17) имеем

$$\sin \Omega t = - \left| \frac{R(i\Omega)}{Q(i\Omega)} \right| \sqrt{q^2 + (q')^2} \sin(\Omega t + \gamma + \beta)$$

где

$$\gamma = \arctg \frac{q'}{q}, \quad \beta = \arg \frac{R(i\Omega)}{Q(i\Omega)}$$

Сравнивая эти два результата (и заменяя в первом из них точное Ω_1 на приближенное Ω , что в данном случае несущественно), приходим к выводу, что должно выполняться условие

$$\left| \frac{R(ik\Omega)}{Q(ik\Omega)} \right| = e^m c_k \left| \frac{R(i\Omega)}{Q(i\Omega)} \right| \quad (m \geq 1) \quad (2.18)$$

где c_k — произвольные конечные положительные числа. Это важное условие, которому должно удовлетворять исходное уравнение (1.1), чтобы можно было искать решение в виде (1.2) при наличии сильной нелинейности (1.1), и соответствует упоминавшемуся выше свойству фильтра (1.5) линейной части системы (1.1). Его выполнение проверяется после отыскания частоты Ω приближенного решения (2.16).

Из изложенного вытекают все опубликованные в литературе способы расчета автоколебаний в нелинейных автоматических системах по первой гармонике при помощи гармонической линеаризации, гармонического баланса или описывающих функций. Все они соответствуют уравнению первого приближения (2.17) (см., например, [3]).

Принципиально важно здесь следующее. Выражение $qx^* + (q'/\Omega)px^*$ в уравнении (2.17) соответствует линейным членам $k_1x + k_2px$ в формуле (1.3). Однако, как видно из изложенного, мы ограничиваемся в первом приближении этими членами вовсе не вследствие малости $\mu f(x, px)$, а потому, что по ходу построения решения конечные высшие гармоники, порождаемые сильной нелинейностью и содержащиеся, следовательно, в члене $\mu f(x, px)$ формулы (1.3) или в выражении $F(x_1, px_1)$ формулы (1.4), вообще не входят в состав приближенного уравнения (2.17), так как оно получается из точного уравнения первой гармоники (2.13). Приближенное уравнение (2.17) должно в связи с этим трактоваться как первое приближение вычисления именно первой гармоники искомого периодического решения, которое только для одной переменной x близко к истинному периодическому решению, в то вре-

ли как для других переменных той же системы первая гармоника (например, кривая 5, фигура) далека от периодического решения.

Все выкладки были проделаны в предположении существования чисто периодического решения (1:2). Однако приближенное уравнение (2.17) может быть оправдано и в случае, когда функция $z(t)$ произвольная (ограниченная), т. е. когда точное решение не строго периодическое, но близко к нему.

3. Дальнейшая реализация полученного результата. Пользуясь уравнениями для высших гармоник (2.14), можно развить полученное приближенное решение. Учитывая условие (2.18), можно в точных уравнениях (2.14) отбросить правые части (малые высшего порядка). Кроме того, введем найденное выше приближенное значение частоты Ω вместо точного Ω_1 , а амплитуды искомым высших гармоник εA_k будем выражать в долях найденного уже приближенного значения амплитуды A первой гармоники, т. е. $\varepsilon A_k = \delta_k A$, где δ_k — малая величина, подлежащая вычислению. Тогда каждую из высших гармоник переменной x можно согласно (2.14) определить по отдельности приближенно в виде

$$x_k = \delta_k A \sin(k\Omega t + \varphi_k) \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (3.1)$$

где

$$\delta_k = \left| \frac{R(ik\Omega)}{Q(ik\Omega)} \right| \sqrt{r_k^2 + s_k^2}, \quad \varphi_k = \pi + \arctg \frac{s_k}{r_k} + \arg \frac{R(ik\Omega)}{Q(ik\Omega)} \quad (3.2)$$

причем

$$r_k = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \sin k\psi d\psi$$

$$s_k = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \cos k\psi d\psi \quad (3.3)$$

После этого можно уточнить первую гармонику, учтя член с первой степенью ε в (2.13). Это даст добавки

$$\Delta q = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x^*, px^*) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x^*, px^*) \sum_{k=2}^n px_k \right] \sin \psi d\psi$$

$$\Delta q' = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x^*, px^*) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x^*, px^*) \sum_{k=2}^n px_k \right] \cos \psi d\psi \quad (3.4)$$

внеся которые в прежнее уравнение первого приближения (2.17), можно найти уточненное значение амплитуды A_1 и частоты Ω_1 первой гармоники (процесс вычисления см. в работе [3]). Для практической осуществимости вычислений в формулах (3.4) ограничимся некоторым конечным числом гармоник n , что вполне допустимо вследствие наличия свойства (2.11).

В результате такого уточнения можно для нелинейной функции (1.1) написать следующее приближенное выражение:

$$y = A_1 [(q + \Delta q) \sin \Omega_1 t + (q' + \Delta q') \cos \Omega_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} (r_k \sin k\Omega_1 t + s_k \cos k\Omega_1 t)] \quad (3.5)$$

в котором действительно отражены конечные высшие гармоники, несмотря на их малость у переменной x

$$x = A_1 \left[\sin \Omega_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} \delta_k \sin (k\Omega_1 t + \varphi_k) \right] \quad (3.6)$$

Это является вычислительной реализацией для описанной в п. 2 принципиальной схемы построения периодического решения.

4. **Некоторые обобщения.** Аналогичный подход может быть применен и для построения решения в ряде других практически важных задач. Простейшие из них: одночастотные вынужденные колебания при периодическом внешнем воздействии, колебательные переходные процессы с медленно меняющимися частотой и показателем затухания, а также несимметричные автоколебания, когда не выполняется условие (2.15).

Особенно важным для практики является приближенное исследование двухчастотных процессов в автоматических системах на базе гармонической линеаризации нелинейностей. Дело в том, что весьма типичным для нелинейных автоматических систем являются такие случаи, когда автоколебания или вынужденные колебания представляют собой вибрационные процессы (сравнительно высокой частоты), которые накладываются на основные медленно меняющиеся процессы регулирования (сравнительно низкая частота). Вследствие нелинейности системы оба вида процессов существенно влияют один на другой.

Тогда для нелинейного уравнения вида

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f \quad (4.1)$$

ищется приближенное решение¹ в форме

$$x = x^\circ + x^*, \quad x^* = A \sin \Omega t' \quad (4.2)$$

Здесь x^* — вибрационная (автоколебательная) составляющая, x° — медленно меняющаяся составляющая, т. е. x° мало изменяется за период колебаний x^* ; внешнее воздействие $f(t)$ задано также медленно меняющимся. Время t' отсчитывается внутри каждого периода отдельно.

Нелинейность, как и прежде, представляется в виде

$$F(x, px) = F^\circ + \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) x^* + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(t) + \varepsilon \Phi(t) \quad (4.3)$$

но с конечным значением F° . В общем случае для каждой нелинейности имеем определенные выражения

$$F^\circ = F^\circ(x^\circ, A, \Omega), \quad q = q(x^\circ, A, \Omega), \quad q' = q'(x^\circ, A, \Omega) \quad (4.4)$$

где все величины будут медленно меняться вместе с x° .

Конечные высшие гармоники $F_k(t)$, входящие в (4.3), как и прежде, не будут фигурировать в приближенном уравнении для переменной x . В результате после подстановки (4.3) заданное уравнение (4.1) распадается на два взаимосвязанных уравнения первого приближения

$$Q(p)x^\circ + R(p)F^\circ = S(p)f, \quad \left[Q(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) \right] x^* = 0 \quad (4.5)$$

¹ Точнее $x = x_0 + x_1 + \varepsilon z$.

соответственно для медленно меняющейся составляющей и для автоколебательной вибрационной составляющей. При этом разделении уравнений сохраняются существенно нелинейные свойства и отсутствие суперпозиции решений, так как остается их нелинейная взаимосвязь через входящие в эти уравнения величины (4.4).

Из второго уравнения (4.5) определяются амплитуда A и частота Ω в зависимости от x° , после чего по первой из формул (4.4) определяется «функция смещения»

$$F^\circ = \Phi^\circ(x^\circ) \quad (4.6)$$

С этой подстановкой первое уравнение (4.5) принимает вид

$$Q(p)x^\circ + R(p)\Phi^\circ(x^\circ) = S(p)f \quad (4.7)$$

Следовательно, функция смещения $\Phi^\circ(x^\circ)$ служит новой нелинейностью по отношению к медленно меняющемуся сигналу в присутствии наложенных на него вибраций. Обычно график функции $\Phi^\circ(x^\circ)$ оказывается плавной кривой (даже для неплавных и для петлевых нелинейностей), поддающейся обычному способу линеаризации

$$F^\circ \approx K_n x^\circ \quad \left(K = \left(\frac{d\Phi^\circ}{dx^\circ} \right)_{x^\circ=0} \right) \quad (4.8)$$

и тогда уравнение (4.7) решается как чисто линейное, но с учетом своеобразия коэффициента K , позволяющего выявлять существенно нелинейные свойства системы.

Если же функция смещения $\Phi^\circ(x^\circ)$ не поддается этой обычной линеаризации и желательно исследовать нелинейные колебания по медленно меняющейся составляющей на основании нелинейного уравнения (4.7), то можно произвести гармоническую линеаризацию нелинейной функции $\Phi^\circ(x^\circ)$. Это будет уже повторная гармоническая линеаризация на новой, более низкой частоте. Фактически, таким образом будут исследованы двухчастотные нелинейные свободные колебания (если $f = 0$) или смешанные колебания (если f периодическое с низкой частотой).

Аналогично можно исследовать процессы в нелинейных системах с вынужденными вибрациями, а также случайные процессы. Это дает возможность учитывать влияние вибрационных и случайных помех на качество работы автоматических систем управления.

Решение перечисленных задач с примерами описано в работе [3].

Практическая эффективность такого рода методов делает актуальным дальнейшее развитие как прикладной их стороны, так и более строгого математического обоснования с определением ограничивающих условий. Идея введения малого параметра, изложенная выше в п. 2, по-видимому, будет плодотворной и в указанных здесь более сложных задачах, но с привлечением дополнительных соображений, учитывающих особенности каждой из этих задач.

Поступила 29 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. Физические основы применения методов малого параметра. Автоматика и телемеханика, 1953, № 5.
2. Попов Е. П. О применении метода гармонической линеаризации в теории регулирования. Докл. АН СССР, 1956, т. 106, № 2.
3. Попов Е. П. и Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.