Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза СССР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

А. И. Климушев

(Свердловск)

Исследуются системы дифференциальных уравнений с последействием, содержащие малый параметр при производных. На основании известной равномерной асимптотической устойчивости вырожденной системы дифференциальных уравнений и равностепенной асимптотической устойчивости некоторых вспомогательных систем доказывается равномерная асимптотическая устойчивость исходной системы. Задачи исследуются методом Ляпунова — Четаева [1, 2], развитым для систем уравнений с последействием Н. Н. Красовским [3]. Отметим, что вопросы устойчивости систем дифференциальных уравнений с последействием, содержащих малый параметр, рассматривались Л. Э. Эльсгольцем [4]. Ниже результаты работы [5] обобщаются на системы с последействием.

§ 1. Линейные системы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с последействием вида

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{l=1}^{m} a_{il}(t)\,x_l+\sum_{s=1}^{n} b_{is}(t)\,y_s+\sum_{l=1}^{m} \alpha_{il}(t)\,x_l(t-\theta)$$

$$\mu\frac{dy_j}{dt}=\sum_{l=1}^{m} c_{jl}(t)\,x_l+\sum_{s=1}^{n} d_{js}(t)\,y_s+\sum_{l=1}^{m} \beta_{jl}(t)\,x_l(t-\theta)\qquad\begin{pmatrix}i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\end{pmatrix}$$

$$x_{i0}=g_{i0}(t)\quad\text{для } t_0-\theta\leqslant t_i\leqslant t_0,\qquad y_{j0}=p_{j0}\tag{1.1}$$

где μ — положительный малый параметр, а θ — постоянное запаздывание.

Предположим, что коэффициенты $a_{il}(t)$, $b_{is}(t)$, $\alpha_{il}(t)$, $c_{jl}(t)$, $d_{js}(t)$ и $\beta_{jl}(t)$ — непрерывные ограниченные функции аргумента t, имеющие непрерывные ограниченные производные для значений t, $t_0\leqslant t<\infty$. Кроме этого, выполняется условие

$$\begin{vmatrix} d_{11}(t)\ldots d_{1n}(t)\\ \ldots\ldots\ldots\\ d_{n1}(t)\ldots d_{nn}(t)\end{vmatrix}>\beta>0\tag{1.2}$$

Вырожденная система для исходной системы имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{l=1}^{m} a_{il}(t)\,x_l+\sum_{s=1}^{n} b_{is}(t)\,y_s+\sum_{l=1}^{m} \alpha_{il}(t)\,x_l(t-\theta)\qquad(i=1,\ldots,m)\tag{1.3}$$

$$\sum_{l=1}^{m} c_{jl}(t)\,x_l+\sum_{s=1}^{n} d_{js}(t)\,y_s+\sum_{l=1}^{m} \beta_{jl}(t)\,x_l(t-\theta)=0\qquad(j=1,\ldots,n)\tag{1.4}$$

$$x_{i0}=g_{i0}(t)\quad\text{для } t_0-\theta\leqslant t\leqslant t_0$$

Обозначим символами $x_i=x_i(t,\mu)$, $y_j=y_j(t,\mu)$ — решение системы уравнений (1.1), а символами $x_i=x_i(t)$, $y_j=y_j(t)$ — решение вырожденной системы (1.3), (1.4).

Решение системы n линейных алгебраических уравнений (1.4) относительно $y_1, \ldots, y_n$ имеет вид

$$y_s = \sum_{l=1}^{m} \lambda_{sl}(t) x_l(t) + \sum_{l=1}^{m} \gamma_{sl}(t) x_l(t-\theta) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

Здесь $\lambda_{sl}(t)$ и $\gamma_{sl}(t)$ — ограниченные непрерывные функции t.

Подстановка выражений (1.5) в первые m уравнений (1.3) вырожденной системы приводит к системе m дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}(t) x_k(t) + \sum_{k=1}^{m} \tau_{ik}(t) x_k(t-\theta) \tag{1.6}$$

Здесь $r_{ik}(t)$ и $\tau_{ik}(t)$ — непрерывные ограниченные функции t.

Систему n линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{s=1}^{n} d_{js}(t) y_s \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

назовем вспомогательной системой уравнений.

В дальнейшем покажем, что для достаточно малых значений параметра μ, при выполнении некоторых условий, траектория исходной системы уравнений (1.1) стремится к траектории вырожденной системы уравнений (1.3) и (1.4) и из устойчивости вспомогательных систем следует устойчивость решения исходной системы (1.1).

Теорема 1.1. Пусть для системы уравнений с последействием (1.1) и соответствующей ей вырожденной системы (1.3), (1.4) справедливы условия:

а) система дифференциальных уравнений с последействием (1.6) равномерно асимптотически устойчива;

б) системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{s=1}^{n} d_{js}(\omega) y_s \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

при всех фиксированных значениях ω асимптотически устойчивы равностепенно по $\omega \ni [t_0, \infty)$ (или, что то же самое, корни характеристического уравнения $|d_{js} - \rho\delta_{js}| = 0$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\rho < -\Delta$, $\Delta > 0$ — const, $\delta_{js} = 0$, если $j \neq s$ и $\delta_{js} = 1$, если $j = s$).

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число μ_0, что справедливы неравенства

$$|x_i(t, \mu) - x_i(t)| < \varepsilon, \qquad |y_j(t, \mu) - y_j(t)| < \varepsilon \quad \text{при } t > t_1,\ \mu < \mu_0 \tag{1.9}$$

2) При достаточно малом μ_0 исходная система дифференциальных уравнений с последействием асимптотически устойчива.

3) Для заданного решения вырожденной системы (1.3), (1.4) и числа $Q > 0$ можно указать столь малое μ_0, чтобы число t_1 из условия (1.9) отличалось от числа t_0 меньше, чем на заданное $\delta > 0$, для всех начальных условий $|y_j(t_0, \mu) - y_j(t_0)| < Q$.

Доказательство. Введем новые переменные ξ_i и η_j при помощи равенств

$$\xi_i(t, \mu) = x_i(t, \mu) - x_i(t)$$

$$\eta_j(t, \mu) = y_j(t, \mu) - \sum_{s=1}^{m} \lambda_{js}(t)\, x_s(t, \mu) - \sum_{s=1}^{m} \gamma_{jl}(t)\, x_l(t-\theta, \mu)$$

Составим системы дифференциальных уравнений возмущенного движения, которым удовлетворяют переменные ξ_i и η_j. Эти уравнения следует составлять отдельно для значений t, между t_0 и $t_0+\theta$, и для t больших $t_0+\theta$

$$\frac{d\xi_i(t, \mu)}{dt} = \frac{dx_i(t, \mu)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt}$$

$$\frac{d\eta_j(t, \mu)}{dt} = \frac{dy_j(t, \mu)}{dt} - \sum_{s=1}^{m} \frac{d\lambda_{js}(t)}{dt} x_s(t, \mu) - \sum_{s=1}^{m} \lambda_{js}(t) \frac{dx_s(t, \mu)}{dt} -$$
$$- \sum_{l=1}^{m} \frac{d\gamma_{jl}(t)}{dt} x_l(t-\theta, \mu) - \sum_{l=1}^{m} \gamma_{jl}(t) \frac{dx_l(t-\theta, \mu)}{dt}$$

На основании этих равенств будем иметь:

а) для $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\theta$

$$\frac{d\xi_i(t, \mu)}{dt} = \sum_{l=1}^{m} r_{il}(t)\, \xi_l(t, \mu) + \sum_{l=1}^{m} \tau_{il}(t)\, \xi_l(t-\theta, \mu) - \sum_{s=1}^{n} b_{is}(t)\, \eta_s(t, \mu)$$

$$\frac{d\eta_j(t, \mu)}{dt} = \frac{1}{\mu} \sum_{s=1}^{n} d_{js}(t)\, \eta_s(t, \mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \Big[\sum_{l=1}^{m} r_{kl}(t)\, \xi_l(t, \mu) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{m} \tau_{kl}(t)\, \xi_l(t-\theta, \mu) \Big] - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt} \xi_k(t, \mu) - \sum_{l=1}^{m} \frac{d\gamma_{jl}(t)}{dt} \xi_l(t-\theta, \mu) -$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \Big[\sum_{f=1}^{m} r_{kf}(t)\, x_f(t) + \sum_{f=1}^{m} \tau_{kf}(t)\, x_f(t-\theta) \Big] - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt} x_k(t) -$$
$$- \sum_{l=1}^{m} \frac{d\gamma_{jl}(t)}{dt} x_l(t-\theta) - \sum_{l=1}^{m} \gamma_{jl}(t) \frac{dg_{l0}(t)}{dt} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \sum_{s=1}^{n} b_{ks}(t)\, \eta_s(t, \mu) \qquad (1.10)$$

б) для $t > t_0+\theta$

$$\frac{d\xi_i(t, \mu)}{dt} = \sum_{l=1}^{m} r_{il}(t)\, \xi_l(t, \mu) + \sum_{l=1}^{m} \tau_{il}(t)\, \xi_l(t-\theta, \mu) + \sum_{s=1}^{n} b_{is}(t)\, \eta_s(t, \mu)$$

$$\frac{d\eta_j(t, \mu)}{dt} = \frac{1}{\mu} \sum_{s=1}^{n} d_{js}(t)\, \eta_s(t, \mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \Big[\sum_{l=1}^{m} r_{kl}(t)\, \xi_l(t, \mu) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{m} \tau_{kl}(t)\, \xi_l(t-\theta, \mu) \Big] - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt} \xi_k(t, \mu) - \sum_{l=1}^{m} \frac{d\gamma_{jl}(t)}{dt} \xi_l(t-\theta, \mu) -$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \Big[\sum_{f=1}^{m} r_{kf}(t)\, x_f(t) + \sum_{f=1}^{m} \tau_{kf}(t)\, x_f(t-\theta) \Big] - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt} x_k(t) -$$
$$- \sum_{l=1}^{m} \frac{d\gamma_{jl}(t)}{dt} x_l(t-\theta) - \sum_{l=1}^{m} \gamma_{jl}(t) \Big[\sum_{f=1}^{m} r_{lf}(t)\, \xi_f(t-\theta, \mu) +$$
$$+ \sum_{f=1}^{m} \tau_{lf}(t)\, \xi_f(t-2\theta, \mu) \Big] - \sum_{l=1}^{m} \gamma_{jl}(t) \Big[\sum_{k=1}^{m} r_{lk}(t)\, x_k(t-\theta) + \sum_{k=1}^{m} \tau_{lk}(t)\, x_k(t-2\theta) \Big] -$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \sum_{s=1}^{n} b_{ks}(t)\, \eta_s(t, \mu) - \sum_{l=1}^{m} \gamma_{jl}(t) \sum_{s=1}^{n} b_{ls}(t)\, \eta_s(t-\theta, \mu) \qquad (1.11)$$

Для доказательства теоремы следует показать, что решения $\xi_i(t, \mu)$, $\eta_j(t, \mu)$ систем уравнений (1.10) и (1.11) удовлетворяют следующим условиям: для любых наперед заданных чисел Q, ε и δ можно указать число $\mu_0 > 0$ такое, что при любых начальных данных $\xi_{i0} = 0$ для $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$, $|\eta_{j0}| < Q$ выполняются неравенства $|\xi_i(t, \mu)| < \varepsilon$, $|\eta_j(t, \mu)| < \varepsilon$ при $t > t_0 + \delta$, если только $\mu < \mu_0$.

По условию теоремы система дифференциальных уравнений с последействием (1.6) равномерно асимптотически устойчива, следовательно, для нее существует определенно положительный функционал $v[\xi_1(\vartheta), \xi_2(\vartheta), \ldots, \xi_m(\vartheta), t] = v[\xi_i(\vartheta), t]$, для которого справедливы неравенства

$$c_1 \| \xi_i(\vartheta) \|^2 \leqslant v[\xi_i(\vartheta), t] \leqslant c_2 \| \xi_i(\vartheta) \|^2 \tag{1.12}$$

и такой, что производная его в силу системы (1.6)

$$\frac{dv[\xi_i(\vartheta), t]}{dt} \leqslant c_3 \| \xi_i(\vartheta) \|^2 \tag{1.13}$$

Кроме этого, справедливо неравенство

$$\overline{\lim} \frac{|v[\xi_{i1}(\vartheta), t] - v[\xi_{i2}(\vartheta), t]|}{\| \xi_{i1}(\vartheta) - \xi_{i2}(\vartheta) \|} = c_4 \| \xi_i(\vartheta) \| \tag{1.14}$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 — положительные числа, а [3] (§ 33)

$$\| \xi_i(\vartheta) \| = \sup_{\vartheta} \sqrt{\xi_1^2(\vartheta) + \ldots + \xi_m^2(\vartheta)} \quad \text{при } t_0 - 2\theta \leqslant \vartheta \leqslant t_0$$

Заметим, что в работе [3], § 33 доказано существование функционала $v[x_i(\vartheta), t]$, удовлетворяющего оценкам

$$c_1 \| x(\vartheta) \| \leqslant v[x(\vartheta), t] \leqslant c_2 \| x(\vartheta) \|, \qquad \lim \sup \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)_{(33.1)} \leqslant c_3 \| x(\vartheta) \|$$
$$| v[x''(\vartheta), t] - v[x'(\vartheta), t] | \leqslant c_4 \| x''(\vartheta) - x'(\vartheta) \|,$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 — положительные постоянные числа, а $\| x(\vartheta) \| = \sup | x_i(\vartheta) |$ при $-\theta \leqslant \vartheta \leqslant 0$. Рассуждениями, аналогичными работе [3], можно проверить существование функционала с оценками, которые указаны здесь.

Из второго условия теоремы вытекает, что система уравнений (1.7) при всех фиксированных значениях ω асимптотически устойчива равностепенно по ω, следовательно, для системы уравнений (1.7) существует определенно положительная квадратичная форма $w(\omega, \eta_1, \ldots, \eta_n) = w(\omega, \eta_j)$, полная производная которой в силу системы (1.7) (при $\omega = \mathrm{const}$) определенно отрицательная форма, при этом частная производная $\partial w / \partial \omega$ ограничена и оценки определенной положительности и отрицательности $w(\omega, \eta_j)$ и $(dw/dt)_{(1.7)}$ соответственно равномерны по ω.

Составим определенно положительный функционал вида

$$u[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j] = v[\xi_i(\vartheta), t] + w(t, \eta_j) \tag{1.15}$$

Покажем, что при достаточно малых значениях μ функционал удовлетворяет условиям теоремы ((31.4) работы [3], стр. 195) в области $\| \xi_i \| > M_1$, $\| \eta_j \| > M_1$.

Полная производная функционала $u[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]$ в силу (1.10) имеет вид

$$\begin{aligned}
\left(\frac{du[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]}{dt} \right)_{(1.10)} &= \left(\frac{dv[\xi_i(\vartheta), t]}{dt} \right)_{(1.7)} + F_1(t, \xi_i, \eta_j) + \frac{\partial w(t, \eta_j)}{\partial t} + \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w(t, \eta_j)}{\partial \eta_j} \left\{ \frac{1}{\mu} \sum_{s=1}^{n} d_{js}(t) \eta_s(t, \mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \left[\sum_{l=1}^{m} r_{kl}(t) \xi_l(t, \mu) + \right. \right. \\
&+ \left. \sum_{l=1}^{m} \tau_{kl}(t) \xi_l(t - \theta, \mu) \right] - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt} \xi_k(t, \mu) - \sum_{l=1}^{m} \frac{d\gamma_{jl}(t)}{dt} \xi_l(t - \theta, \mu) - \\
&- \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \left[\sum_{f=1}^{m} r_{kf}(t) x_f(t) + \sum_{f=1}^{m} \tau_{kf}(t) x_f(t - \theta) \right] - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt} x_k(t) - \\
&- \left. \sum_{l=1}^{m} \frac{d\gamma_{jl}(t)}{dt} x_l(t - \theta) - \sum_{l=1}^{m} \gamma_{jl}(t) \frac{dg_{l0}(t)}{dt} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \sum_{s=1}^{n} b_{ks}(t) \eta_s(t, \mu) \right\}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Здесь символом $F_1(t, \xi_i, \eta_j)$ обозначены все члены в производной функционала $v[\xi_i(\vartheta), t]$ в силу первых m уравнений возмущенного движения (1.10), которые содержат множителями величины $b_{i1}(t)\eta_1(t, \mu)+\ldots+b_{in}(t)\eta_n(t, \mu)$.

Из (1.16), учитывая свойства функционала $v[\xi_i(\vartheta), t]$ и функции $w(t, \eta_j)$, можно вывести неравенство

$$\left(\frac{du[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]}{dt}\right)_{(1.10)} \leqslant -c_3\|\xi_i\|^2+M^*c_4\|\xi_i\|\left(\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t)\right)^{1/2}+\frac{1}{\mu}\left[-\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t)\right]+$$
$$+N_1\|\xi_i\|\left(\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t)\right)^{1/2}+N_2\left(\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t)\right)^{1/2}+N_3\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t) \tag{1.17}$$

где M^*, N_1, N_2 и N_3 — некоторые числа. Правая часть этого неравенства (1.17), если исключить из нее предпоследний член, будет квадратичной формой относительно $\|\xi_i\|=\rho$ и $\|\eta_j\|=\sigma$.

При достаточно малом μ эта форма определенно отрицательна и поэтому при таком μ вне окрестности точки $\xi_i=0$, $\eta_j=0$ левая часть неравенства (1.17) меньше нуля. Рассуждения здесь аналогичны тем, которые приведены в работе [5].

Полная производная функционала $u[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]$ в силу системы (1.11) при $t>t_0+\theta$ будет

$$\left(\frac{du[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]}{dt}\right)_{(1.11)}=\left[\frac{dv[\xi_i(\vartheta), t]}{dt}\right]_{(1.6,\xi)}+F_1(t, \xi_i, \eta_j)+\frac{\partial w(t, \eta_j)}{\partial t}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w(t, \eta_j)}{\partial \eta_j}\left\{\frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}d_{js}(t)\eta_s(t, \mu)-\sum_{k=1}^{m}\lambda_{jk}(t)\left[\sum_{l=1}^{m}r_{kl}(t)\xi_l(t, \mu)+\right.\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{m}\tau_{kl}(t)\xi_l(t-\theta, \mu)\right]-\sum_{k=1}^{m}\frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt}\xi_k(t, \mu)-\sum_{l=1}^{m}\frac{d\gamma_{jl}(t)}{dt}\xi_l(t-\theta, \mu)-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\lambda_{jk}(t)\left[\sum_{f=1}^{m}r_{kf}(t)x_f(t)+\sum_{f=1}^{m}\tau_{kf}(t)x_f(t-\theta)\right]-\sum_{k=1}^{m}\frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt}x_k(t)-$$
$$-\sum_{l=1}^{m}\frac{d\gamma_{jl}(t)}{dt}x_l(t-\theta)-\sum_{l=1}^{m}\gamma_{jl}(t)\left[\sum_{f=1}^{m}r_{lf}(t)\xi_f(t-\theta, \mu)+\sum_{f=1}^{m}\tau_{lf}(t)\xi_f(t-2\theta, \mu)\right]-$$
$$-\sum_{l=1}^{m}\gamma_{jl}(t)\left[\sum_{k=1}^{m}r_{lk}(t)x_k(t-\theta)+\sum_{k=1}^{m}\tau_{lk}(t)x_k(t-2\theta)\right]-$$
$$\left.-\sum_{l=1}^{m}\lambda_{jk}(t)\sum_{s=1}^{n}b_{ks}(t)\eta_s(t, \mu)-\sum_{l=1}^{m}\gamma_{jl}(t)\sum_{s=1}^{n}b_{ls}(t)\eta_s(t-\theta, \mu)\right\} \tag{1.18}$$

Здесь символом $F_1(t, \xi_i, \eta_j)$ обозначены члены в производной функционала $v[\xi_i(\vartheta), t]$ в силу первых m уравнений (1.11), которые содержат множителями величины $b_{i1}(t)\eta_1(t, \mu)+\ldots+b_{in}(t)\eta_n(t, \mu)$.

Из равенства (1.18) выводится следующая оценка

$$\left(\frac{du[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]}{dt}\right)_{(1.11)} \leqslant -c_3\|\xi_i\|^2+M^*c_4\|\xi_i\|\left(\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t)\right)^{1/2}+$$
$$+\frac{1}{\mu}\left[-\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t)\right]+N_1\|\xi_i\|\left(\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t)\right)^{1/2}+N_2\left(\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t)\right)^{1/2}+$$
$$+N_3\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t)+N_4\left(\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t)\right)^{1/2}\left(\sum_{s=1}^{n}\eta_s^2(t-\theta)\right)^{1/2} \tag{1.19}$$

где M^*, N_1, N_2, N_3 и N_4 — некоторые числа.

Рассмотрим кривые

$$\sum_{s=1}^{n} \eta_s^2 (t-\theta) < g \sum_{s=1}^{n} \eta_s^2 (t) \tag{1.20}$$

где g — некоторое число. На этих кривых правая часть неравенства (1.19), за исключением члена, содержащего множителем N_2, может быть оценена как квадратичная форма относительно $\| \xi_i \| = \rho$ и $\| \eta_j \| = \sigma$. Отсюда вытекает, что при достаточно малых μ на кривых (1.20) левая часть неравенства (1.19) без линейного члена будет меньше некоторой определенно отрицательной формы величин ρ и σ. Это означает, что функционал $u[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]$ удовлетворяет всем условиям теоремы (31.4) работы [3] для $|\rho| > M_1$, $|\sigma| > M_1$, где M_1 — некоторое число.

Можно показать, что со стремлением μ к нулю область $|\rho| > M_1$, $|\sigma| > M_1$, вне которой левая часть неравенства (1.19) на кривых (1.20) определенно отрицательна, тоже стремится к нулю, т. е. $M_1 \to 0$ при $\mu \to 0$. Как следствие отсюда и область $M < |\xi_i|$, $M < |\eta_j|$ тоже стремится к нулю.

Теперь, повторяя рассуждения из доказательства теоремы (31.4) работы [3] (стр. 185), можно убедиться в справедливости первого утверждения теоремы.

Далее проверим асимптотическую устойчивость системы уравнений (1.1). Для этого рассмотрим два решения этой системы, отличающиеся начальными условиями, или два решения системы (1.10) с разными начальными данными. Обозначим эти решения символами $\xi_{i1}(t, \mu)$, $\eta_{j1}(t, \mu)$ и $\xi_{i2}(t, \mu)$, $\eta_{j2}(t, \mu)$.

Составим систему дифференциальных уравнений с последействием, которым удовлетворяют разности этих решений

$$\alpha_i(t, \mu) = \xi_{i1}(t, \mu) - \xi_{i2}(t, \mu), \qquad \beta_j(t, \mu) = \eta_{j1}(t, \mu) - \eta_{j2}(t, \mu) \tag{1.21}$$

На основании равенств (1.21) и (1.10) имеем

$$\frac{d\alpha_i(t, \mu)}{dt} = \sum_{l=1}^{m} r_{il}(t)\alpha_l(t, \mu) + \sum_{l=1}^{m} \tau_{il}(t)\alpha_l(t-\theta, \mu) + \sum_{s=1}^{n} b_{is}(t)\beta_s(t, \mu)$$

$$\frac{d\beta_j(t, \mu)}{dt} = \frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n} d_{js}(t)\beta_s(t, \mu) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t)\left[\sum_{l=1}^{m} r_{kl}(t)\alpha_l(t, \mu) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{m} \tau_{kl}(t)\alpha_l(t-\theta, \mu)\right] - \sum_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_{jk}(t)}{dt}\alpha_k(t, \mu) - \sum_{l=1}^{m} \frac{d\gamma_{jl}(t)}{dt}\alpha_l(t-\theta, \mu) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}(t) \sum_{s=1}^{n} b_{ks}(t)\beta_s(t, \mu) \tag{1.22}$$

Рассмотрим определенно положительный функционал переменных t, α_i и β_j вида

$$u[t, \alpha_i(\vartheta), \beta_j] = v[t, \alpha_i(\vartheta)] + w(t, \beta_j) \tag{1.23}$$

построенный как и ранее (1.15). Этот функционал при достаточно малых значениях параметра μ имеет определенно отрицательную полную производную $du[t, \alpha_i(\vartheta), \beta_j]/dt$, вычисленную в силу системы (1.22), что проверяется аналогично тому, как это сделано выше в равенстве (1.14). Следовательно, функционал (1.23) обеспечивает асимптотическую устойчивость системы уравнений с последействием (1.22). Из асимптотической устойчивости системы уравнений (1.22) следует асимптотическая устойчивость исходной системы уравнений (1.1).

Теперь остается показать, что при $\mu \to 0$ величина $\delta \to 0$. В самом деле, если μ достаточно мало, то производная $du[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]/dt$ согласно (1.16) будет большой по модулю отрицательной величиной, до тех пор, пока ρ остается малой по величине. Но в начальный момент времени и при $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$ величина $\rho = 0$, а в течение малого промежутка $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$, $(\delta > 0)$ вследствие интегральной непрерывности величина $\rho(t)$ не может сильно возрасти.

Но так как $du[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]/dt$ большая по модулю отрицательная величина, то определенно положительный функционал $u[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]$ за это же время должен быстро уменьшиться по величине, последнее возможно лишь при условии, что в некоторый момент $u[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j]$ сделается близкой к нулю. Теорема доказана.

§ 2. Нелинейные системы. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i[x_s, y_k, x_l(t-\theta), t], \qquad \mu\frac{dy_j}{dt} = Y_j[x_s, y_k, x_l(t-\theta), t] \tag{2.1}$$

$$x_{i0} = g_{i0}(t) \text{ для } t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0, \qquad y_{j0} = b_{j0} \qquad \begin{pmatrix} i, s, l = 1, \ldots, m \\ j, k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Здесь μ — положительный малый параметр, θ — постоянное запаздывание

$$X_i[x_s, y_k, x_l(t-\theta), t] =$$
$$= X_i[x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1(t-\theta), x_2(t-\theta), \ldots, x_m(t-\theta), t]$$
$$Y_j[x_s, y_k, x_l(t-\theta), t] =$$
$$= Y_j[x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1(t-\theta), x_2(t-\theta), \ldots, x_m(t-\theta), t]$$

Предположим, что функции

$$X_i[x_s, y_k, x_l(t-\theta), t], \qquad Y_j[x_s, y_k, x_l(t-\theta), t]$$
$$(i, s, l = 1, \ldots, m; \quad j, k = 1, \ldots, n)$$

имеют непрерывные ограниченные производные по всем аргументам в области $|x_s| \leqslant \infty$, $|y_k| \leqslant \infty$, $t_0 \leqslant t < \infty$, причем

$$\frac{D(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0$$

Вырожденная система для уравнений (2.1) при $\mu = 0$ имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i[x_s, y_k, x_l(t-\theta), t], \qquad Y_j[x_s, y_k, x_l(t-\theta), t] = 0$$
$$x_{i0} = g_{i0}(t), \qquad t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0 \tag{2.2}$$

Допустим, что система n уравнений $Y_j[x_s, y_k, x_l(t-\theta), t] = 0$ имеет единственное решение: систему функций $y_j = f_j[x_s, x_l(t-\theta), t]$, имеющих ограниченные частные производные по всем аргументам $(j = 1, \ldots, n)$.

Подставим $y_j = f_j[x_s, x_l(t-\theta), t]$ в первые m уравнений (2.2); получим

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i[x_s, f_k(x_s, x_l(t-\theta), t), x_l(t-\theta), t] = F_i[x_s, x_l(t-\theta), t]$$
$$x_{i0} = g_{i0}(t) \text{ для } t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0 \tag{2.3}$$

Обозначим при данных начальных условиях $x_i = x_i(t, \mu)$, $y_j = y_j(t, \mu)$ — решение исходной системы (2.1), а $x_i = x_i(t)$, $y_j = y_j(t) = f_j[x_s(t), x_l(t-\theta), t]$ — решение вырожденной системы уравнений (2.2) при соответствующих начальных данных.

Составим дифференциальные уравнения возмущенного движения для данного решения $x_i = x_i(t)$ системы (2.3), исходя из равенств $z_i(t) = x_i^*(t) - x_i(t)$, где $x^*_i(t)$ — решение системы (2.3), соответствующее изменению начальных условий $\Delta x_{i0} = x_{i0}^* - x_{i0}$; имеем

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = F_i[z_s(t) + x_s(t), z_l(t-\theta) + x_l(t-\theta), t] - F_i[x_s(t), x_l(t-\theta), t] =$$
$$= X_i\{z_s(t) + x_s(t), f_k[z_s(t) + x_s(t), z_l(t-\theta) + x_l(t-\theta), t], z_l(t-\theta) +$$
$$+ x_l(t-\theta), t\} - X_i\{x_s(t), f_k[x_s(t), x_l(t-\theta), t], x_l(t-\theta), t\} \tag{2.4}$$

Предположим, что линейное приближение системы (2.4) равномерно асимптотически устойчиво, т. е. асимптотически устойчива система уравнений

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{m} r_{is}(t) z_s(t) + \sum_{l=1}^{m} \tau_{il}(t) z_l(t-\theta) \tag{2.5}$$

где

$$r_{is}(t) = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_s}\right]_{(x_s=x_s(t))}$$

$$\tau_{il}(t) = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_l(t-\theta)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_l(t-\theta)}\right]_{(x_l=x_l(t))} \tag{2.6}$$

Рассмотрим также систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{dt} = Y_j(\alpha_s, y_k, \gamma_l, \beta) \tag{2.7}$$

где α_s и γ_l заменяют соответственно $x_s(t)$ и $x_l(t-\theta)$, а β заменяет t.

Допустим, что при всех фиксированных значениях

$$\alpha_s = x_s(\beta), \qquad \gamma_l = x_l(\beta-\theta), \qquad |x_s| < \infty, \qquad \beta = t, \qquad t_0 \leqslant \beta < \infty$$

для системы (2.7) можно указать постоянную симметрическую матрицу $A(\alpha_s, \gamma_l, \beta)$, равномерно ограниченную α_s, γ_l и β, имеющую положительные собственные значения и такую, что симметризованная матрица

$$\{B\}_{jk} = \left(\left\{A\frac{\partial Y}{\partial y}\right\}_{jk} + \left\{A\frac{\partial Y}{\partial y}\right\}_{kj}\right) \qquad \left(\left\{\frac{\partial Y}{\partial y}\right\}_{jk} = \frac{\partial Y_j}{\partial y_k}\right) \tag{2.8}$$

имеет отрицательные собственные числа r_j, удовлетворяющие неравенству

$$r_j < -\gamma \quad \text{при } |y_j| < \infty \qquad (\gamma = \text{const} > 0)$$

Тогда любое решение системы (2.7) асимптотически устойчиво (см., например, [6], стр. 313) при любых начальных условиях (y_{j0}).

Теорема 2.1. Пусть для системы дифференциальных уравнений (2.1) выполняются условия.

1) Система уравнений (2.5) равномерно асимптотически устойчива.

2) Для системы уравнений (2.7) при каждых фиксированных значениях α_s, γ_l и β можно указать симметрические матрицы $A(\alpha_s, \gamma_l, \beta)$, равномерно ограниченные по α_s, γ_l и β и такие, что симметризованная матрица $\{B\}_{jk}$ (2.8) имеет отрицательные собственные значения, удовлетворяющие неравенству $r_j < -\gamma$ $(\gamma = \text{const} > 0)$. Тогда при достаточно малых значениях параметра μ решение $x_i(t, \mu)$, $y_j(t, \mu)$ системы уравнений (2.1) равномерно асимптотически устойчиво относительно малых отклонений x_{i0} и любых отклонений y_{j0}; для любых наперед заданных чисел $Q > 0$, $\varepsilon > 0$ можно указать число $\mu_0 > 0$ такое, что будут справедливы неравенства

$$|x_i(t,\mu) - x_i(t)| < \varepsilon, \qquad |y_j(t,\mu) - y_j(t)| < \varepsilon \quad \text{при } t > t_1(Q, \varepsilon)$$
$$|y_j(t_0,\mu) - y_j(t_0)| < Q \tag{2.9}$$

если только $\mu < \mu_0$. При этом μ_0 можно выбрать столь малым, чтобы t_1 из условий (2.9) отличалось от числа t_0 меньше, чем на любое наперед заданное число.

Доказательство. Решение исходной системы (2.1) выразим через решение вырожденной системы (2.2) при помощи равенств

$\xi_i(t, \mu) = x_i(t, \mu) - x_i(t), \qquad \eta_j(t, \mu) = y_j(t, \mu) - f_j[x_s(t, \mu), x_l(t-\theta, \mu), t]$

используя равенства

$$\frac{d\xi_i(t, \mu)}{dt} = \frac{dx_i(t, \mu)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt}$$

$$\frac{d\eta_j(t, \mu)}{dt} = \frac{dy_j(t, \mu)}{dt} - \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \frac{dx_s(t, \mu)}{dt} - \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_l(t-\theta)} \frac{dx_l(t-\theta, \mu)}{dt} - \frac{\partial f_j}{\partial t}$$

Составим системы дифференциальных уравнений возмущенного движения отдельно:

для $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta$ (2.10)

$$\frac{d\xi_i(t, \mu)}{dt} = \sum_{s=1}^{m} r_{is}(t)\, \xi_s(t, \mu) + \sum_{l=1}^{m} \tau_{il}(t)\, \xi_l(t-\theta, \mu) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i^*}{\partial y_k} \eta_k(t, \mu) + R_i(\xi_s)$$

$$\frac{d\eta_j(t, \mu)}{dt} = \frac{Y_j\{\alpha_s^*(t), f_k[\alpha_s^*(t), \alpha_l^*(t-\theta), t] + \eta_k(t, \mu), \alpha_l^*(t-\theta), t\}}{\mu} -$$

$$- \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \left[\sum_{l=1}^{m} r_{sl}(t)\, \xi_l(t, \mu) + \sum_{l=1}^{m} \tau_{sl}(t)\, \xi_l(t-\theta, \mu)\right] - \sum_{k=1}^{n} H_{jk}\eta_k(t, \mu) +$$

$$+ R_j(\xi_s) + R^*(t) - \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_l(t-\theta)} \frac{dg_{l0}(t)}{dt}$$

для $t > t_0 + \theta$ (2.11)

$$\frac{d\xi_i(t, \mu)}{dt} = \sum_{s=1}^{m} r_{is}(t)\, \xi_s(t, \mu) + \sum_{l=1}^{m} \tau_{il}(t)\, \xi_l(t-\theta, \mu) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i^*}{\partial y_k} \eta_k(t, \mu) + R_i(\xi_s)$$

$$\frac{d\eta_j(t, \mu)}{dt} = \frac{Y_j\{\alpha_s^*(t), f_k[\alpha_s^*(t), \alpha_l^*(t-\theta), t] + \eta_k(t, \mu), \alpha_l^*(t-\theta), t\}}{\mu} -$$

$$- \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \left[\sum_{l=1}^{m} r_{sl}(t)\, \xi_l(t, \mu) + \sum_{l=1}^{m} \tau_{sl}(t)\, \xi_l(t-\theta, \mu)\right] -$$

$$- \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_l(t-\theta)} \left[\sum_{s=1}^{m} r_{ls}(t)\, \xi_s(t-\theta, \mu) + \sum_{s=1}^{m} \tau_{ls}(t)\, \xi_s(t-2\theta, \mu)\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_{jk}\eta_k(t, \mu) - \sum_{k=1}^{n} H_{jk}^*\eta_k(t-\theta, \mu) + R_j(\xi_s) + R_j^*(t)$$

В (2.10) и (2.11) символом $R_i(\xi_s)$ обозначены члены, содержащие функции $\xi_l(t, \mu)$, $\xi_s(t-\theta, \mu)$ и $\xi_l(t-2\theta, \mu)$ и их линейные комбинации во второй и в высших степенях; выражения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i^*}{\partial y_k} \eta_k(t, \mu), \qquad \sum_{k=1}^{n} H_{jk}\eta_k(t, \mu), \qquad \sum_{k=1}^{n} H_{jk}^*\eta_k(t-\theta, \mu)$$

представляют приращения функции $X_i[x_s, y_k, x_l(t-\theta), t]$ по y_k, выраженные по теореме о конечном приращении, наконец $\alpha^*(t) = x_s(t) + \xi_s(t, \mu)$.

По условию теоремы система (2.5) равномерно асимптотически устойчива, следовательно, для нее, как и выше в § 1, стр. 55, можно указать определенно положительный функционал $v[\xi_1(\vartheta), \xi_2(\vartheta), \ldots, \xi_m(\vartheta), t] = v[\xi_i(\vartheta), t]$, удовлетворяющий условиям (1.12) — (1.14).

Во втором условии теоремы принято, что для системы (2.7) при фиксированных значениях

$$\alpha_s = x_s(t) = x_s(\beta), \qquad \gamma_l = x_l(t-\theta) = x_l(\beta-\theta), \qquad \beta = t \qquad (t_0 \leqslant \beta < \infty)$$

можно указать симметрические матрицы $A(\alpha_s, \gamma_l, \beta)$, равномерно ограниченные по α_s, γ_l и β, имеющие положительные собственные значения и удовлетворяющие равенствам (2.8).

При этом предполагается, что матрица $\{B\}_{jk}$ имеет отрицательные собственные значения, удовлетворяющие условию $r_j < -\gamma$ ($\gamma = \text{const} > 0$). Следовательно, для системы (2.7) существует определенно положительная функция Ляпунова

$$w(\alpha_s, \gamma_l, \beta, \eta_k) = w(\alpha_s, \gamma_l, \beta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \quad \eta_k = y_k - f_k(\alpha_s, \gamma_l, \beta)$$

полная производная которой при α_s, γ_l и β постоянных, вычисленная в силу системы (2.7), удовлетворяет оценкам (16.22) — (16.24), указанным в книге [3], § 16.

Составим определенно положительный функционал вида

$$u[t, \xi_i(\vartheta), \eta_j] = v[\xi_i(\vartheta), t] + w[x_s(t), x_l(t-\theta), t, \eta_j] \tag{2.12}$$

Можно показать, что полные производные этого функционала $du[t, \xi_i(\vartheta), t]/dt$, вычисленные в силу систем уравнений возмущенного движения (2.10) и (2.11), при достаточно малых значениях μ будут отрицательными в области

$$|\xi_i| > M, \qquad |\eta_j| > M, \qquad M > 0$$

Не будем выписывать здесь подробно выражений для этих производных; отметим, что хотя структура производных du/dt в силу систем уравнений возмущенного движения (2.10) и (2.11) имеет несколько более сложный вид, чем в линейном случае, рассмотренном выше, однако можно провести рассуждения об оценке du/dt по тому же плану, что и ранее (§ 1, стр. 56). Хотя здесь придется рассматривать функции, не являющиеся квадратичными формами, однако остаются в силе оценки, характерные для квадратичных форм. Таким образом, придем к выводу об определенной отрицательности du/dt вне области $|\xi_i| > M$, $|\eta_j| > M$ при достаточно малом значении параметра $\mu > 0$.

Далее, как и для систем линейных уравнений, можно доказать, что область $|\xi_i| > M$, $|\eta_j| > M$, $M > 0$ стремится к нулю при $\mu \to 0$, а этим самым убеждаемся в справедливости сформулированной теоремы.

Поступила 29 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ. 1955.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматиздат, 1959.
4. Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. М., ГИТ-ТЛ, 1955.
5. Климушев А. И., Красовский Н. Н. Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.
6. Красовский Н. Н. Об устойчивости при больших начальных возмущениях. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.