Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЙ ДЛЯ СИСТЕМ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

В книге П. Пэнлевэ [1] «Лекции о трении» показано, что добавление сил сухого трения не нарушает устойчивости равновесия механической системы, для которой потенциальная энергия в положении равновесия имеет изолированный минимум. В работах [2,3] изучался вопрос об устойчивости стационарных движений частных механических систем с сухим трением и выяснены некоторые ограничения, при которых добавление сил сухого трения не нарушает устойчивости таких движений, если они устойчивы при одних потенциальных силах. В работе [2,3] рассматриваются, однако, лишь силы сухого трения, приводящиеся при наличии скольжения трущихся поверхностей к постоянным и не зависящим от нормальных давлений моментам $\pm$B (силы направлены против относительной скорости скольжения). Такое моделирование сухого трения отличается, конечно, от классической модели Кулона, однако, по-видимому, может служить шагом к изучению проблемы в классической постановке. Этим вопросам посвящается предлагаемая работа.

1. Рассмотрим механическую систему, подчиненную стационарным голономным, идеальным связям с голономными координатами $q_1, \ldots, q_{n+k+l}$, а также неголономным, стационарным $(\partial A_{ij} / \partial t = 0)$ идеальным связям

$$A_{i1}\dot{q}_1 + \ldots + A_{i,n+k+l}\, \dot{q}_{n+k+l} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

с определением возможных перемещений

$$A_{i1}\delta q_1 + \ldots + A_{i,n+k+l}\delta q_{n+l+k} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

Пусть на систему наложены также освобождающие связи с сухим трением

$$q_{n+1} \leqslant 0, \ldots, q_{n+l} \leqslant 0$$

Если эти неравенства обращаются в равенства, то тела или точки системы скользят по телам системы или внешним, причем сила трения пропорциональна нормальной реакции $N_i > 0$ и направлена против относительной скорости скольжения ($N_i > 0$, если тела давят одно на другое). Возьмем в каждой точке контакта на одном из тел закрепленную на нем тройку осей, с осью z_i, направленной по внешней нормали, и осями x_i и y_i, делающими тройку правой и прямоугольной. Тогда работа реакции N_i и силы трения на возможном перемещении $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ точки второго тела по отношению к этой системе отсчета будут

$$N_i \delta z_i - k_i N_i \frac{v_{ix}}{|\mathbf{V}_i|} \delta x_i - k_i N_i \frac{v_{iy}}{|\mathbf{V}_i|} \delta y_i$$

где v_{ix}, v_{iy} — проекции относительной скорости скольжения $\mathbf{V}_i$ на оси x и y_i, а $k_i > 0$ — коэффициент трения.

Во всех дальнейших рассуждениях и формулах не будем упоминать о том, что для задания положения системы необходимо задать $n + l + k$ координат, хотя для задания распределения скоростей достаточно знать лишь $n + l$ скоростей. Будем считать, не упоминая об этом явно, что все координаты могут быть подвергнуты произвольным возмущениям, хотя, может быть, длина траектории, по которой система может прийти из начального состояния в заданное возмущенное состояние, останется ограниченной снизу при неограниченном убывании модулей некоторых начальных возмущений. Это может произойти из-за наличия неголономных связей. К такому предположению вынуждает то обстоятельство, что мы не рассматриваем ни причин, ни времени процесса накопления возмущения. Пропускать упоминание об этом в индексах будем для того, чтобы не усложнять формулы и запись.

Пусть возможные перемещения δx_i, δy_i, δz_i выражаются через независимые $\delta q_1, \ldots, \delta q_{n+l}$ по формулам

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \alpha_{i1}^1 \delta q_1 + \ldots + \alpha_{i,n+l}^1 \delta q_{n+l} \\ \delta y_i &= \alpha_{i1}^2 \delta q_1 + \ldots + \alpha_{i,n+l}^2 \delta q_{n+l} \\ \delta z_i &= \alpha_{i,n+1}^3 \delta q_{n+1} + \ldots + \alpha_{i,n+l}^3 \delta q_{n+l} \end{aligned}$$

где индекс i пробегает по всем точкам контакта, а последние строки не содержат $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$, так как все $\delta z_i = 0$ при

$$\delta q_{n+j} = q_{n+j} = \dot{q}_{n+j} = 0 \qquad (j = n+1, \ldots, n+l)$$

Скорости v_{ix}, v_{iy}, в силу независимости связей от времени, выражаются через $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n+l}$ по аналогичным формулам

$$\begin{aligned} v_{ix} &= \alpha_{i1}^1 \dot{q}_1 + \ldots + \alpha_{i,n+l}^1 \dot{q}_{n+l} \\ v_{iy} &= \alpha_{i1}^2 \dot{q}_1 + \ldots + \alpha_{i,n+l}^2 \dot{q}_{n+l} \\ z_{iz} &= \alpha_{i,n+1}^3 \dot{q}_{n+1} + \ldots + \alpha_{i,n+1}^3 \dot{q}_{n+l} \end{aligned}$$

Вначале рассмотрим системы с полной диссипацией, т. е. такие, у которых v_{ix}, v_{iy} обращаются в нуль только лишь тогда, когда $\dot{q}_1 = \ldots = \dot{q}_n = 0$.

Рассмотрим систему, с начальными условиями $\dot{q}_1 = \dot{q}_{n+l} = 0$; $q_{n+1}^0 = \ldots q_{n+l}^0 = 0$. Компоненты сил трения R_{ix}, R_{iy} в этих начальных условиях могут быть при равновесии любыми, но такими, чтобы модуль силы трения $\sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2}$ не превышал $k_i N_i$. Система останется в равновесии, если сумма виртуальных работ активных сил Q_j (не зависимых от t и непрерывных), сил трения и положительных нормальных реакций N_i может быть сделана подбором R_{ix}, R_{iy} нулем на любом возможном перемещении системы (R_{ix}, R_{iy} должны быть одними и теми же для любого возможного перемещения). При этом необходимо выполнятся уравнения

$$Q_j' + \sum_i R_{ix} \alpha_{ij}^1 + R_{iy} \alpha_{ij}^2 + N_i \alpha_{ij}^3 = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n + l) \tag{1.1}$$

где Q_j' — обобщенная сила из уравнений Аппеля [4], соответствующая неголономной переменной $\dot{q}_j$.

В последней системе уравнений зачастую может оказаться больше неизвестных, чем уравнений; имея это в виду, наложим на возможные решения этих уравнений ограничения, гарантирующие равновесие.

1) Уравнения (1.1) (в совокупности с некоторой дополнительной гипотезой о свойствах N_i) могут быть удовлетворены только лишь положительными значениями нормальных реакций.

2) По любой системе нормальных реакций $N_i > 0$ найдется такая система R_{ix}, R_{iy}, что все величины R_{ix}, R_{iy}, N_i в совокупности удовлетворяют уравнениям (1.1) и, кроме того, $R_{ix}^2 + R_{iy}^2 \leqslant k_i^2 N_i^2$.

Естественной дополнительной гипотезой о распределении нормальных давлений может служить, например, предположение о том, что весомое твердое тело, опирающееся на горизонтальную шероховатую плоскость плоской площадкой, имеющей форму правильного многоугольника, оказывает на площадку равномерно распределенное давление, направленное вниз, если масса тела распределена симметрично относительно вертикали, проходящей через геометрический центр площадки. Пусть математически дополнительная гипотеза выражается в виде равенств или неравенств вида

$$\begin{aligned} \Psi_s(q_i, \dot{q}_i, Q_i, N_i, R_{ix}, R_{iy}) &> 0 \\ \varphi_s(q_1, \dot{q}_i, Q_i, N_i, R_{ix}, R_{iy}) &= 0 \end{aligned} \qquad (s = 1, 2, \ldots p) \tag{1.2}$$

и функции Ψ_s, φ_s — непрерывные функции своих аргументов, причем любые N_i, R_{ix}, R_{iy} из последних равенств непрерывно зависят от остальных аргументов функций φ_s. Всюду в дальнейшем будем считать эти соотношения присоединенными к уравнениям движения или равновесия, хотя и не будем записывать их явно. Если начальные условия $q_1^0, \ldots, q_{n+l+k}^0$ таковы, что при любых $N_i > 0$ возможно найти $R_{ix}^2 + R_{iy}^2 < k_i^2 N_i^2$, то ясно, что таким же свойством будет обладать и некоторая ε-окрестность начальных условий q_i^0

$$\sum_{i=1}^{n+k+l} (q_i^0 - q_i^{10})^2 = \sum_{i=1}^{n+k+l} x_i^2 \leqslant \varepsilon$$

Пусть начальные данные таковы, что равны нулю не все относительные скорости скольжения, а только некоторые из них, а среди ненулевых относительных скоростей скольжения v_{ix}, v_{iy} есть σ независимых между собой $v_1, \ldots, v_\sigma$ (и не более чем σ) и пусть величины $v_1, \ldots, v_n$ представляют собой полную систему неголономных переменных независимых при q_1^0 , q_{n+l}^0; $\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+l} = 0$; пусть S есть энергия ускорений системы, зависящая от $l + n$ переменных $v_1, \ldots, v_n$, $v_{n+1}, \ldots, v_{n+l}$ и их производных по t, а Q_j — обобщенные силы, соответствующие этим переменным.

Пусть

$$\begin{aligned} v_{ix} &= \beta_{i1}^1 v_1 + \ldots + \beta_{i\sigma}^1 v_\sigma \\ v_{iy} &= \beta_{i1}^2 v_2 + \ldots + \beta_{i\sigma}^2 v_\sigma \\ v_{iz} &= \beta_{i,n+1}^3 v_{n+1} + \ldots + \beta_{i,n+l} v_{n+l} \end{aligned}$$

Тогда уравнениями движения будут

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_j} = Q_j - \sum k_i N_i \frac{v_{ix}\beta_{ij}{}^1 + v_{iy}\beta_{ij}{}^2}{\sqrt{v_{ix}{}^2 + v_{iy}{}^2}} + \sum (R_{ix}\beta_{ij}^1 + R_{iy}\beta_{ij}{}^2 + N_i\beta_{ij}^3)$$
$$(j = 1, \ldots, n + l) \tag{1.3}$$

где первая сумма распространяется на точки контакта с ненулевыми V_i, вторая — на точки с нулевыми V_i, а третья на все точки.

В дальнейшем везде будем это подразумевать и не будем указывать пределы изменения i.

Решая эту систему относительно $\dot v_{\sigma+1}, \ldots, \dot v_n, \ddot q_{n+l}, \ldots, \ddot q_{n+l}$ и приравнивая результаты нулю, получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n+l} \gamma_{kj} \Big[Q_j' - \delta_j - \sum k_i N_i \frac{v_{ix}\beta_{ij}^1 + v_{iy}\beta_{iy}^2}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}} + $$
$$+ \sum (R_{ix}\beta_{ij}^1 + R_{iy}\beta_{ij}^2 + \sum N_i\beta_{ij}^3)\Big] = 0 \qquad (j = \sigma+1, \ldots, n+l) \qquad (1.4)$$

где $S_1 = \delta_1 \dot v_1 + \ldots + \delta_{n+l} \dot v_{n+l}$ — линейная относительно $\dot v_j$ часть S.

Если этой системе уравнений совместно с гипотезой (1.2) возможно удовлетворить только системой N_i, R_{ix}, R_{iy}, подчиняющейся неравенствам $k_i N_i' > \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2}$, то $\dot v_{\sigma+1}, \ldots, \dot v_{n+k+l}$ будут нулями, а $\dot v_1, \ldots, \dot v_\sigma$ найдутся из уравнений

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \dot v_j}\right)^0 = Q_j + \sum k_i N_i \frac{v_{ix}\beta_{ij}^1 + v_{iy}\beta_{ij}^2}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}} \qquad (j = 1, \ldots, \sigma)$$

Они найдутся однозначно, в том и только в том случае, если все линейные комбинации $N_i > 0$, входящие в их правые части, найдутся однозначными из соотношений (1.4) и (1.2).

Сложным представляется случай, когда всем неравенствам

$$k_i N_i > \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2}$$

невозможно удовлетворить; тогда придется отказаться от предположения $\dot v_{\sigma+1} = \ldots = \dot v_n = 0$, положить затем, что некоторые из относительных ускорений $\dot v_{\sigma+1}, \ldots, \dot v_\nu$ отличны от нуля и взять в этих точках силы трения направленными против относительных ускорений и равными $k_i N_i$.

Если уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \dot v_j} = Q_j' - \sum k_i N_i \frac{v_{ix}\beta_{ij}^1 + v_{iy}\beta_{ij}^2}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}} - \sum k_i N_i \frac{\dot v_{ix}\beta_{ij}^1 + \dot v_{ij}\beta_{ij}^2}{\sqrt{\dot v_{ix}^2 + \dot v_{iy}^2}} +$$
$$+ \sum (\beta_{ij}^3 N_i + \sum R_{ix}\beta_{ij}^1 + R_{iy}\beta_{ij}^2) \qquad (j = 1, \ldots, n+l)$$

(где вторая сумма берется по точкам с ненулевыми $\dot v_{ix}$, $\dot v_{iy}$) возможно удовлетворить ускорениями $\dot v_{\nu+1} = \ldots = \dot v_n = \dot v_{n+1} \ldots = \dot v_{n+l} = 0$, а также только реакциями

$$N_i > \frac{1}{k_i}\sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2}$$

(в точках с нулевыми $\dot v_{ix}$ $\dot v_{ij}$) то $\dot v_{\gamma+1} = \ldots = \dot v_n = 0$, а система значений $\dot v_1, \ldots, \dot v_\nu$, полученная из этих уравнений, будет допустимой [5]. Интересно заметить, что для любой допустимой системы значений $\dot v_1, \ldots, \dot v_\nu$ функция

$$\Pi = -S_1 + \sum Q_i \dot v_i - \sum k_i N_i \sqrt{\dot v_{ix}^2 + \dot v_{iy}^2} - \sum k_i N_i \frac{\dot v_j (v_{ix}\beta_{ij}^1 + v_{iy}\beta_{ij}^2)}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}}$$

может принимать только одни положительные значения. Действительно, умножая уравнения (1.4) на $\ddot v_j$ и складывая, получим

$$2S_2 = \Pi \geqslant 0$$

где $S_2 > 0$ — квадратичная относительно $\dot{v}_i$ часть S. Функцию Π можно трактовать как «работу» всех активных сил, сил трения и части сил инерции, приложенных к системе, на ее действительном ускорении. Часть сил инерции это суть те силы инерции, которые оказались бы приложенными к системе, если бы на нее подействовали активные силы, при которых ускорения $\dot{v}_i$ оказались бы нулями.

Рассмотрим все системы начальных значений $q_i{}^0$, v_i такие, что модули скоростей v_i достаточно малы и обладают следующими свойствами:

a) При $q_i{}^0 = 0$, $v_i = 0$ удовлетворяются неравенства

$$k_i N_i > \sqrt{R_{ix}{}^2 + R_{iy}} - \delta'$$

где N_i, R_i — решения (1.1).

b) При любых $|v_i| \neq 0 | x_i | \neq 0$ достаточно малых, новые реакции R'_{ix}, R'_{iy}, N_i' — решения любого из вариантов (1.3) удовлетворяют:

$$k_i N_i' \geqslant \sqrt{R'^2_{ix} + R'^2_{iy}} - \delta' \tag{1.5}$$

$$k_i N_i' \geqslant \sqrt{R^2_{ix} + R^2_{iy}} - \delta' \tag{1.6}$$

где $\delta' > 0$ — малая постоянная

Если ни N_i, N_i', ни R_i', R_i не могут быть определены однозначно, то будем считать, что для любой системы N_i' возможно указать систему R_{ix}, R_{iy}, удовлетворяющую неравенству (1.6). Механически это значит, что нормальные реакции при начале скольжения с малой скоростью меняются от своих значений при покое или непрерывно либо совершают достаточно малые скачки вниз.

Зону начальных значений, удовлетворяющих предположениям a) и b), назовем, следуя Булгакову [6], зоной застоя. Оправдывая применение термина, докажем теорему.

Теорема. Любое равновесие, находящееся внутри зоны застоя, является устойчивым, а любое возмущенное около этого равновесия движение, обладающее достаточно малой кинетической энергией, через конечный промежуток времени остановится.

Нетрудно заметить, что каждая точка зоны застоя q_i^0, $\dot{q}_i^0 = 0$ является по отношению к этой зоне внутренней, и ее можно окружить сферой

$$\sum (q_i - q_i^0)^2 + \sum v_i{}^2 \leqslant R$$

такой, что любая ее точка есть также точка зоны застоя. Действительно, левые части любых уравнений, служащих для доказательства, что данная точка есть точка зоны застоя, зависят непрерывно от q_i, $\dot{q}_i$, а неравенства в условиях a) и b) написаны некоторым «запасом» δ'.

Рассмотрим теперь какую-либо систему начальных смещений и скоростей

$$\sum (q_i' - q_i^0)^2 + \sum v_i{}^2 = \sum (x_i{}^2 + v_i{}^2) \leqslant \lambda > 0$$

При λ достаточно малом это движение можно рассматривать как возмущенное около начального равновесия q_i' и все рассуждения в дальнейшем проводить, имея в виду, что возмущены лишь скорости.

На основании теоремы об изменении кинетической энергии T имеем

$$\frac{d}{dt} T = \sum (Q_i{}^{0\prime} + \delta Q_i') \dot{v}_i - \sum k_i N_i' \sqrt{v^2_{ix} + v^2_{iy}}$$

На основании уравнений (1.1) и (1.3) получаем

$$\frac{d}{dt}T = \sum\left(R_{ix}\, v_{ix} + R_{iy}v_{iy} - k_iN_i' \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}\right) - \sum \delta Q_j' v_j$$

Докажем теперь, что

$$\sum\left(R_{ix}v_{ix} + R_{iy}v_{iy} - k_iN_i' \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}\right) - \sum \delta Q_j' v_j < -\theta \sqrt{T} \tag{1.7}$$

в некоторой области $\sum x_i^2 + v_i^2 \leqslant R_1 < R$, где $\theta > 0$ — некоторая постоянная, которая может быть выбрана не зависящей от R_1, если только R_1 достаточно мал по модулю.

Каждый член неравенства (1.7) всегда отрицателен в области R_1. Действительно,

$$(R_{ix} + \delta Q_{ix})\, v_{ix} + (R_{iy} + \delta Q_{iy})\, v_{iy} < k_iN_i' \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}$$

Здесь Q_{ix} — обобщенная сила, соответствующая переменной v_{ix}, и т. д. Возводя в квадрат обе части, получим

$$[(R_{ix} + \delta Q_{ix})\, v_{ix} + (R_{iy} + \delta Q_{iy})\, v_{iy}]^2 - k_iN_i^2\, (v_{ix}^2 + v_{iy}^2) < 0$$

Действительно, условия Селивестра для этой квадратичной формы v_{ix}, v_{iy}, в достаточно малой R_1, сводятся к $\sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2} \leqslant k_iN_i - \delta'$, т. е. условиям (1.6), так как δQ_{ix} сколь угодно малы в силу непрерывности Q_j.

Рассмотрим теперь нижние границы величин k_iN_i; обозначим их через $(k_iN_i)^0$, а через μ_i обозначим верхние границы модулей δQ_i в области R_1. Функция

$$\Phi = \sum_i R_{ix}v_{ix} + R_{iy}v_{iy} - (k_iN_i)^0 \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} + \Sigma \mu_j \,|\, v_j \,|$$

заведомо превосходит левую часть (1.7). Она является однородной первой степени функцией v_i. Следовательно, если γ есть ее отрицательный максимум на сфере R, то всюду внутри сферы

$$-\Phi > +\frac{\gamma}{\sqrt{R}} \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$$

Очевидно, что всегда существует такое $R_1 < R$, что при любых $\Sigma x_i^2 + v_i^2 \leqslant R_1$ справедливо неравенство

$$\sqrt{T} < \sigma' \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$$

причем $0 < \sigma' = \text{const}$ не зависит от R_1. Следовательно,

$$-\Phi > \frac{\gamma}{\sigma' \sqrt{R}} \sqrt{T} = \theta \sqrt{T}$$

что и требовалось доказать.

Итак,

$$\frac{d}{dt}T < -\theta \sqrt{T} \qquad \text{в области} \qquad \sum x_s^2 + v_s^2 \leqslant R_1$$

Если λ достаточно мало, то и T° сколь угодно мало и, следовательно, при любом варианте уравнений движения

$$\sqrt{T} - \sqrt{T^\circ} \leqslant \theta/2\, (t - t_0)$$

Из последнего равенства видно, что движение асимптотически устойчиво по отношению к скоростям и необходимо остановиться по истечении промежутка времени, ограниченного сверху величиной $L(\lambda) > 0$.

Нетрудно показать также, что существует такая постоянная $l(\lambda) > 0$, что модули всех v_i удовлетворяют неравенствам

$$|v_i| \leqslant \frac{l}{n}\left[\sqrt{T^\circ} - \theta/2\,(t - t_0)\right]$$

Из последних неравенств нетрудно получить оценку

$$\sum |x_i| \leqslant l'\left[\sqrt{T^\circ}\,(t - t_0) - \theta/4\,(t - t_0)^2 + C\right]$$

где $l' > 0$, $C > 0$ — некоторые постоянные. Все эти оценки справедливы до тех пор, пока движение не остановится, и из них следует, что исходное равновесие устойчиво.

2. Перейдем теперь к рассмотрению систем с частичной диссипацией. Пусть среди величин v_{ix}, v_{iy} найдется $\sigma < n$ независимых $v_1, \ldots, v_\sigma$ и пусть силы трения не совершают работы на возможных перемещениях $\delta q_{\sigma+1}, \ldots, \delta q_n$. Допустим также, что уравнения неголономных связей выражаются линейно через $v_1, \ldots, v_\sigma$.

Возьмем в качестве неголономных переменных величины

$$v_1, \ldots, v_\sigma, \ \dot q_{\sigma+1}, \ldots, \ \dot q_n, \ v_{n+1}, \ldots, \ v_{n+l}$$

Пусть обобщенные силы, соответствующие этим переменным в уравнениях Аппеля, суть $Q_1, \ldots, Q_{n+l}$. Равновесие

$$\overset{\circ}{q}_1, \ldots, \overset{\circ}{q}_{n+l+k} \tag{2.1}$$

будет иметь место, если уравнениям

$$Q_{\sigma+1} = \ldots = Q_n = 0, \ \ Q_j + \sum R_{ix}\beta_{ij}^1 + R_{iy}\beta_{ij}^2 + N_i\beta_{ij}^3 = 0$$

можно удовлетворить только при $k_i N_i > \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2}$. Пусть также в любых уравнениях движения, составленных для достаточно малых значений вариаций координат и скоростей, нормальные реакции N_i' и касательные реакции R_{ix}', R_{iy}' удовлетворяют неравенствам (1.5) и (1.6). Это значит, что если в какой-либо момент t^* величина $v_{ix}^2 + v_{iy}^2$ обратится в нуль, она будет оставаться нулем для всех $t > t^*$, пока движение не покинет некую малую окрестность положения равновесия.

Пусть $Q_{\sigma+1}, \ldots, Q_n$ зависят только от координат и в окрестности (2.1) выполняются соотношения

$$\frac{\partial U}{\partial q_{\sigma+1}} = Q_{\sigma+1}, \ldots, \ \frac{\partial U}{\partial q_n} = Q_n$$

где U — голоморфная в окрестности (2.1) функция всех координат.

Координаты $q_{\sigma+1}, \ldots, q_n$ назовем свободными, а остальные полусвободными и находящимися во внутренней точке зоны застоя. После введения этих терминов облегчается формулировка теоремы.

Теорема. Если U_1-разложение функции U по степеням вариаций одних лишь свободных координат начинается с квадратичной формы определенно отрицательной по отношению к своим переменным, а полусвободные находятся во внутренней точке зоны застоя, то такое равновесие устойчиво и возмущенное движение через конечный промежуток времени сведется к незатухающим малым колебаниям одних лишь свободных координат и будет таким, как если бы на систему были дополнительно наложены идеальные связи, выражающие постоянство несвободных координат при их значениях, мало отличающихся от значений в положении равновесия. Действительно,

$$\sum_{i=\sigma+1}^{n} Q_i\dot{q}_i = \sum_{i=\sigma+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{dU}{dt} - \sum_{\substack{i\leqslant\sigma\\ i>n}} \frac{\partial U}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

Рассмотрим

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\Big[T - U + \sum_{\substack{i\leqslant\sigma\\ i>n}} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)^{\circ} x_i + \sum_{\substack{i\leqslant\sigma\\ i>n}} \beta_i x_i^2\Big] =$$

$$= \sum_{i=\sigma+1}^{n} Q_i\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{\sigma} Q_i v_i - \sum k_i N_i\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} - \frac{dU}{dt} +$$

$$+ \sum_{\substack{i\leqslant\sigma\\ i>n}} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)\dot{x}_i + 2\beta\sum_{\substack{i\leqslant\sigma\\ i>n}} x_i\dot{x}_i$$

где $(\partial U/\partial q_i)^{\circ}$ взяты в положении равновесия, а $\beta > 0$ постоянная. Если постоянную β взять достаточно большой, то W будет положительно определенной. Действительно, T определенно положительна по отношению к скоростям, а

$$W - T = \sum_{ij=\sigma+1}^{n} \gamma'_{ij}x_i x_j + \sum \gamma'_{ij}x_i x_j + \sum_{\substack{i\leqslant\sigma\\ i>n}} \beta_i x_i^2 + Y$$

где вторая сумма объединяет члены второго порядка, зависящие от вариаций полусвободных координат, а Y объединяет члены порядка выше второго. Первая сумма есть, по условию, определенно положительная по отношению к своим переменным, а любой диагональный минор Δ_k порядка $k > n - \sigma$ квадратичной части $W - T$ имеет вид

$$\Delta_k = \Delta_{n-\sigma}\beta^{k-n+\sigma} + C_{k,n-\sigma+1}\beta^{k-n+\sigma-1} + \ldots$$

и будет положительным при достаточно большой $\beta > 0$. Заметим также, что, по условию, все скорости полусвободных координат выражаются линейно через $v_1, \ldots, v_\sigma$, и производную от W можно представить в виде

$$\frac{dW}{dt} = \sum (Q_i + \mu_i) v_i - k_i N_i\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}$$

где μ_i все уничтожаются в положении равновесия. Как и в предыдущем параграфе, на основании (1.5) и (1.6) можно сделать вывод, что dW/dt постоянно отрицательна и, следовательно, движение устойчиво.

Пусть S — энергия ускорений системы, разбивается на части

$$S = S_2 + b_1\dot{v}_1 + \ldots + b_n\ddot{q}_n + S_0$$

где S_2 — часть, зависящая от ускорений квадратично, S_0 — часть не зависящая от ускорений, $b_1, \ldots, b_n$ все уничтожаются в положении равновесия. Уравнениям движения можно придать вид

$$\frac{\partial S_2}{\partial \dot{v}_j} = -b_j + Q_j - \sum k_i N_i \frac{v_{ix}\beta_{ij}^1 + v_{iy}\beta_{ij}^2}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial \ddot{q}_j} = -b_j + Q_j \qquad (2.2)$$

Если из последних $n - \sigma$ уравнений взять $\ddot{q}_{\sigma+1}, \ldots, \ddot{q}_n$ и подставить в первые σ уравнений, то они приобретут вид

$$\frac{\partial S_2^*}{\partial \dot{v}_j} = -b_j' + Q_j - \sum k_i N_i \frac{v_{ix}\beta_{ij}^1 + v_{iy}\beta_{ij}^2}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}}$$

где b_j' уничтожаются в положении равновесия, а S_2^* — это S_2, в которой $\ddot{q}_{\sigma+1}, \ldots, \ddot{q}_n$ заменены через $\dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_\sigma$ из уравнений $\partial S_2/\partial \ddot{q}_j = 0$.

Действительно,

$$\frac{\partial S_2^*}{\partial \dot{v}_j} = \left(\frac{\partial S_2}{\partial \dot{v}_j}\right)^* + \sum_{i=\sigma+1}^{n} \frac{\partial S_2}{\partial \ddot{q}_i} \frac{\partial \ddot{p}_i}{\partial \dot{v}_j}$$

где $(\partial S_2/\partial \dot{v}_j)^*$ есть $\partial S_2/\partial \dot{v}_j$, в которой учтены последние $n - \sigma$ уравнений (2.2). Все члены правой части последнего равенства, не зависящие от $\dot{v}_j$, будут уничтожаться в начале координат, а все члены, зависящие от $\dot{v}_j$, линейно получатся такими, как если бы мы положили $\partial S_2/\partial \ddot{q}_j = 0$.

Так как

$$S_2^* = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{\sigma} a_{ij} \dot{v}_i \dot{v}_j$$

является определенно положительной функцией $\dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_\sigma$, то после умножения уравнений (2.2) на v_j и сложения получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum a_{ij} v_i v_j = -\frac{1}{2} \sum \frac{da_{ij}}{dt} v_i v_j + \sum (Q_j - b_j') v_j -$$

$$- \sum k_i N_i \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} = \sum (Q_j + \mu_j') v_j - \sum k_i N_i \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}$$

где μ_j' уничтожаются все в положении равновесия. Мажорируя, как в первом параграфе, первую часть последнего уравнения величиной $-\theta \sqrt{\Sigma a_{ij} v_i v_j}$ (это можно сделать в силу устойчивости движения (1.5) и (1.6)), мы придем к выводу, что изменение полусвободных координат прекратится через конечный промежуток времени. Механически это значит, что во время движения на части системы, соответствующей несвободным координатам, действуют малые силы со стороны других ее частей, которые не в состоянии вывести эту часть системы из зоны застоя.

В этом, по-видимому, проявляется одно существенное различие между силами сухого и жидкого трения. Известно [9], что введение частичной диссипации силами жидкого трения делает зачастую равновесие системы в минимуме потенциальной энергии асимптотически устойчивым, если только среди главных частот системы не встретится несколько равных между собой. Процесс затухания происходит бесконечно долго, и в процессе затухания энергия не подверженных затуханию звеньев переходит в подверженные затуханию звенья и рассеивается.

Силы сухого трения способны, вообще говоря, рассеять лишь часть энергии системы, причем затухание колебаний, подверженных сухому трению звеньев, происходит в конечное время.

Причина этого заключается в том, что силы сухого трения зависят разрывно от скорости и при нулевых скоростях неопределенны, так что могут проявлять себя как реакции идеальных связей, так как не работают ни на каких нулевых относительных возможных перемещениях точек контакта. Обращение предложенной теоремы не составит затруднений. Действительно, полусвободные координаты, если начальное возмущение не коснулось ни их, ни их скоростей, будут оставаться постоянными и движение системы будет происходить так, как оно происходило бы у системы с дополнительными связями,— по крайней мере, в некоторой окрестности положения равновесия. Если в качестве ε окрестности, фигурирующей в определении устойчивости, взять окрестность меньшую, то для этой окрестности движение будет движением с дополнительными связями. Следовательно, если разложение U начинается со знакопеременной квадратичной формы, либо определенно положительной формы степени $2m$, либо представляет знакопеременную форму, то, применяя известные теоремы А. М. Ляпунова [7] и Н. Г. Четаева [8], приходим к выводу о неустойчивости по отношению к свободным координатам.

Заметим также, что если к выводу об устойчивости равновесия удалось прийти, наложив какие-либо другие структурные ограничения на силы, то затухание колебаний несвободных координат также произойдет за конечный промежуток времени, так как при доказательстве этого пришлось воспользоваться одной лишь устойчивостью.

Поступила 4 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Пэнлевэ П. Лекции о трении. ГТТИ, 1950.
2. Крементуло В. В. Исследование устойчивости гироскопа с учетом сухого трения на оси внутреннего карданова кольца кожуха. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. Крементуло В. В. Устойчивость гироскопа, имеющего вертикальную ось внешнего кольца, при учете сухого трения в осях подвеса. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
4. Аппель П. Курс теоретической механики. Физматгиз, 1960.
5. Пожарицкий Г. К. Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
6. Булгаков Б. В. Колебания. ГТТИ, 1954.
7. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движений. ГТТИ, 1950.
8. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТИ, 1946.
9. Пожарицкий Г. К. Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.