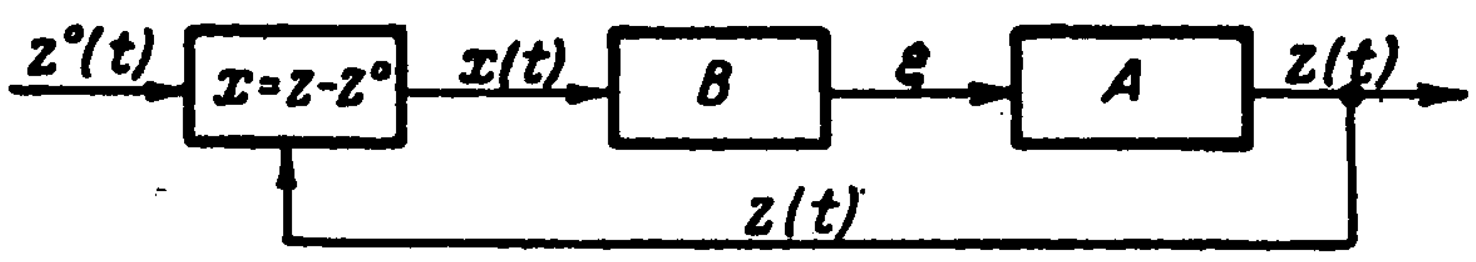
Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ КОНСТРУИРОВАНИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА В СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ВРЕМЕНИ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассматривается задача о формировании управляющего воздействия регулятора в системе, регулируемый объект которой описывается линейными дифференциальными уравнениями с запаздываниями времени. Оптимальное управление формируется при условиях асимптотической устойчивости заданного движения и минимума интеграла по времени от квадратичной ошибки координат регулируемой величины и управляющего воздействия. Решение опирается на метод Ляпунова [1,2], развитый для уравнений с запаздываниями времени [3] и модернизированный в соответствии с принципами динамического программирования [4]. Показано, что оптимальное воздействие регулятора должно формироваться в каждый момент регулирования t в виде линейного функционала от функций, описывающих поведение регулируемой величины на предыдущем отрезке времени $t - h \leqslant \tau \leqslant t$ (h — запаздывание). Дается явное выражение этого функционала. Методом деформации системы [5] выясняется вопрос о существовании решения и строится приближенный способ построения оптимального управления. Результаты обобщают исследования А. М. Летова [6] на случай системы с запаздываниями.



§ 1. Предварительные замечания. Рассмотрим регулируемую систему (фигура), в которой возмущенное движение описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-h) + b_i\xi \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где $x_i(t) = z_i(t) - z_i^\circ(t)$ — отклонения (возмущения) координат векторной регулируемой величины $z(t)$ на выходе регулируемого объекта A от заданного (невозмущенного) движения $z^\circ(t)$; ξ — скалярная величина — управляющее воздействие регулятора B, формируемое на основании информации о реализовавшемся рассогласовании x; h — величина запаздывания ($h = \text{const} > 0$); a_{ij}, b_{ij}, b_i — постоянные числа, параметры системы.

Особенностью системы является наличие запаздывания (последействия) в регулируемом объекте. Известно [7], что для определения (при $t > t_0$) некоторого возмущенного движения $x(t)$ системы, описываемой уравнениями с запаздываниями $h > 0$, требуется знать предысторию этого движения: решения $x_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$) уравнений с запаздываниями определяются начальными функциями

$$x^\circ(t_0+\tau) = \{x_i^\circ(t_0+\tau)\} \qquad (i=1,\ldots,n;\ -h \leqslant \tau \leqslant 0)$$

Поэтому в дальнейшем начальными возмущениями $x^\circ(\cdot)$ (при некотором $t = t_0$) будем называть такие начальные функции $x^\circ(\cdot) = \{x_i^\circ(t_0+\tau)\}$. В этой статье ограничимся лишь стационарным случаем, когда коэффициенты уравнений не зависят от времени, поэтому начальный момент времени t_0 особой роли не играет и там, где это не вызовет недоразумений, будем символ t_0 опускать.

В качестве величины, которая описывает состояние системы с последействием в настоящем ($t = t_0$) и вполне определяет поведение ее в будущем ($t > t_0$), следует, таким образом, рассматривать отрезки траекторий $\{x_i(t_0+\tau)\}$ ($-h \leqslant \tau \leqslant 0$). Но в таком случае и управление должно формироваться в данный момент t на основании информации о *всей* кривой $\{x_i(t+\tau)\}$ на предыдущем отрезке времени $-h \leqslant \tau \leqslant 0$. Иначе говоря, величину ξ в уравнениях (1.1) следует считать некоторым функционалом $\xi(t) = \xi[x(t+\tau)]$, определенным на кривых $x(t+\tau) = \{x_i(t+\tau)\}$ ($-h \leqslant \tau \leqslant 0$).

Уравнения (1.1) при условии, что ξ — некоторый функционал, оказываются уравнениями более общей природы, чем обычные уравнения с запаздываниями. Это уравнения вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i[x(t+\tau)] \qquad (i=1,\ldots,n) \qquad (X_i \text{— функционалы}) \tag{1.2}$$

Такие уравнения были рассмотрены рядом авторов. Упомянем здесь работы А. Н. Тихонова [8] и А. Д. Мышкиса [9]. Теория устойчивости для таких уравнений в разрезе приложений метода функций Ляпунова была развита в книге [3]. В качестве элемента траектории уравнения (1.2), соответствующего моменту t, здесь также удобно рассматривать ([3], стр. 157) отрезок $x(t+\tau)$ этой траектории при $-h \leqslant \tau \leqslant 0$ и изучать движение системы в соответствующем функциональном пространстве $\{x_i(\tau)\}$ ($i = 1, \ldots, n$; $-h \leqslant \tau \leqslant 0$). Если не оговорено противное, в качестве пространства $\{x_i(\tau)\}$ будем рассматривать пространство $C_{-h,0}$ непрерывных функций $\{x_i(\tau)\}$ ($i = 1, \ldots, n$; $-h \leqslant \tau \leqslant 0$). Элементы $C_{-h,0}$ будем обозначать $x_c(\cdot)$. Норму определим равенством

$$\|x_c(\cdot)\| = \sup_\tau \left[\sum_{i=1}^n x_i^2(\tau)\right]^{1/2} \qquad (-h \leqslant \tau \leqslant 0)$$

§ 2. Постановка задачи. Задача заключается в формировании управления $\xi^\circ[x_c(\cdot)]$, обеспечивающего устойчивую работу системы и минимизирующего заданный критерий качества переходного процесса[1]. В качест-

---

[1] Движение, соответствующее начальному условию $x_c^\circ(\cdot)$ (при $t_0 = 0$), будем обозначать символом $x(x_c^\circ(\cdot), t)$, если речь идет о точке $\{x_i(t)\}$, и символом $x_c(x_c^\circ(\cdot), t, \cdot)$, если речь идет об отрезке кривой $\{x_i(t+\tau)\}$ ($-h \leqslant \tau \leqslant 0$).

ве такого критерия выберем интегральную квадратичную ошибку

$$I_\xi [x_c^\circ (\cdot)] = \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 (x_c^\circ (\cdot), t) + \xi^2 [x_c (x_c^\circ (\cdot), t, \cdot)] \right] dt \tag{2.1}$$

При выбранном законе управления $\xi = \xi [x_c (\cdot)]$ величина I_ξ является функционалом от начального возмущения $x_c^\circ (\cdot)$. Будем называть эту величину индексом совершенства системы. Будем считать, что допустимыми управлениями ξ, из которых следует выбрать оптимальное управление ξ°, является множество Ξ всех функционалов $\xi [x_c (\cdot)]$ (не обязательно линейных), определенных на непрерывных кривых $x_c (\cdot)$, являющихся элементами определенного выше пространства $C_{-h, 0}$ (§ 1), и удовлетворяющих условиям Коши — Липшица

$$\| \xi [x_c^* (\cdot)] - \xi [x_c (\cdot)] \| \leqslant L_\xi \, \| x_c^* (\cdot) - x_c (\cdot) \| \tag{2.2}$$

Задача заключается в следующем: при известных параметрах a_{ij}, b_{ij}, b_i и запаздывании h системы (1.1) требуется указать закон регулирования $\xi^\circ = \xi^\circ [x_c (\cdot)]$, при котором выполняются следующие условия.

1) Невозмущенное движение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно любых начальных возмущений $x_c^\circ (\cdot)$ в силу уравнений (1.1) при $\xi = \xi^\circ [x_c (\cdot)]$.

2) Для любого начального условия $x_c^\circ (\cdot)$ индекс системы (2.1) при $\xi = \xi^\circ$ является наименьшим относительно класса допустимых управлений Ξ, т. е.

$$I_{\xi^\circ} [x_c^\circ (\cdot)] = \min I_\xi \; [x_c^\circ (\cdot)] \qquad (\xi \in \Xi) \tag{2.3}$$

Примечание 2.1. Устойчивость понимается здесь в смысле определений из книги [3], т. е. движение $x = 0$ устойчиво (в целом), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, так что

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 (x_c^\circ (\cdot), t) < \varepsilon^2 \qquad \text{при } t > 0 \tag{2.4}$$

если только

$$\| x_c^\circ (\cdot) \| \leqslant \delta \tag{2.5}$$

и, кроме того, для любого $x_c (\cdot)$ выполняется предельное соотношение

$$\lim \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 (x_c^\circ (\cdot), t) \right] = 0 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{2.6}$$

2.2. Можно вместо системы (1.1) рассмотреть уравнения более общего вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i (x_c (t, \cdot), \xi) \tag{2.7}$$

где X_i — функционалы, определенные на кривых $x_c (\cdot)$ и удовлетворяющие условиям Коши — Липшица по $x_c (\cdot)$ и ξ; ξ — r - мерный вектор. В этом случае можно сформулировать задачу о минимуме критерия качества более общего, чем (2.1), вида

$$J_\xi [x_c^\circ (\cdot)] = \int_0^\infty \omega \, [x(x_c^\circ (\cdot), t), \xi \, [x_c (x_c^\circ (\cdot), t, \cdot)]] \, dt \tag{2.8}$$

где $\omega [x, \xi]$ — некоторая определенно положительная функция своих аргументов. Однако эффективное решение такой более общей задачи, по-видимому, затруднительно.

Заметим, однако, что все приведенные дальше рассуждения сохраняют силу (при I_ξ согласно (2.1)) во всяком случае и для уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt}=\int_{-h}^{0}\sum_{j=1}^{n}x_j(\tau)\,d\eta_{ij}(\tau)+b_i\xi \tag{2.9}$$

где в правой части стоит интеграл Стильтьеса. Ограничимся, однако, рассмотрением случая (1.1), чтобы не загромождать изложения.

Аналогичная задача при отсутствии запаздывания была рассмотрена А. М. Летовым [6], который на основе методов динамического программирования вывел уравнения для оптимального управления ξ°. Вопрос о разрешимости этих уравнений при условии возможности стабилизации системы был изучен в статье [10], где также были указаны условия возможности стабилизации линейной системы с одним управлением ξ. Аналогичная задача в случае, когда уравнения возмущенного движения содержат случайные параметры, была исследована в статьях [11,12].

Рассматриваемая задача входит в круг проблем оптимального регулирования, постановка и первая разработка которых принадлежат А. А. Фельдбауму [13] (см. также [14], где приведены основные результаты и библиография). Развитие математической теории в случае обыкновенных уравнений было выполнено Л. С. Понтрягиным и его школой [15]. Задачи оптимального управления в системах с запаздываниями (и в более общих системах с распределенными параметрами) рассматривались рядом авторов. Упомянем работы Т. Крамера [16] и Р. Беллмана и Р. Калаба [17], близкие по теме к нашей работе. Отметим также, что некоторые задачи рассматривались А. Г. Бутковским и А. Я. Лернером [18], Г. Л. Харатишвили [19], однако в аспектах, отличных от рассматриваемого.

Целью настоящей статьи является описать решение поставленной выше задачи для системы (1.1) на базе тех соображений, которые были положены в основу развития метода функций Ляпунова для систем с последействием. Отметим, что предлагаемый метод решения позволяет выписать явный вид оптимального управления ξ°.

§ 3. Общий подход к решению задачи. Следующие рассуждения являются перенесением на случай уравнений с запаздываниями времени аналогичных рассуждений из работ [10–12]. При этом естественно функции Ляпунова заменяются соответствующими функционалами.

Сформулируем и докажем достаточное условие оптимальности управления ξ°. При этом рассмотрим задачу в общей формулировке, данной в примечании 2.2. Следует, однако, иметь в виду, что построение функционалов, фигурирующих в теореме 3.1, в общем случае затруднительно, и в дальнейшем ограничимся приложением теоремы 3.1 лишь к задаче, сформулированной в § 2 для системы (1.1).

Теорема 3.1. Если можно указать функционал $v[x_c(\cdot)]$, который был бы определенно положительным, допускал бы бесконечно малый высший предел[1], удовлетворял бы условию

$$\lim v[x_c(\cdot)]=\infty \qquad \text{при } \|x_c(\cdot)\|\to\infty$$

и такой, что производная $(dv\,/\,dt)_\xi$ в силу уравнений (2.7) удовлетворяет условиям

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\xi^\circ}+\omega[x(0),\quad \xi^\circ[x_c(\cdot)]]=0 \qquad (x_c(\cdot)\in C_{-h,\,0}) \tag{3.1}$$

для некоторого функционала $\xi^\circ\in\Xi$ и

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\xi^\circ}+\omega[x_c(0),\quad \xi^\circ[x_c(\cdot)]]=\min_{\xi\in\Xi}\left(\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\xi}+\omega(x(0),\quad \xi[x_c(\cdot)]]\right)$$
$$(x_c(\cdot)\in C_{-h,\,0}) \tag{3.2}$$

---

[1] Используем терминологию из ([3], стр. 150—170) (в метрике $C_{-h,\,0}$).

то справедливы равенства

$$I_{\xi^\circ}[x_c(\cdot)] = v[x_c(\cdot)] \tag{3.3}$$

$$I_{\xi^\circ} = \min_{\xi \in \Xi} I_\xi \tag{3.4}$$

и следовательно, функционал $\xi^\circ[x_c(\cdot)]$, удовлетворяющий условиям (3.1) и (3.2), будет оптимальным управлением.

Примечание 3.1. Если рассматривается задача с дополнительным ограничением (например $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_r^2} \leqslant 1$), то минимум (3.1) следует определять с учетом этого дополнительного ограничения. Достаточно, чтобы функционал v был определенно положителен лишь на кривых $x_c(\cdot)$, удовлетворяющих условиям Липшица [3].

Доказательство теоремы. Асимптотическая устойчивость в целом решения $x = 0$ при условиях теоремы 3.1 следует из теорем, приведенных в книге [3], так как функционал $v[x_c(\cdot)]$ имеет определенно отрицательную производную $(dv/dt)_{\xi^\circ} = -\omega[x, \xi^\circ]$. Итак, условие 1 (§ 2, стр. 41) выполнено.

Проверим выполнение условия 2. Из (3.1), интегрируя от $t = 0$ до $t = \infty$ (что возможно вследствие асимптотической устойчивости), получим

$$v[x_c^\circ(\cdot)] = \int_0^\infty \omega\, [x(x_c^\circ(\cdot), t)_{\xi^\circ}, \xi^\circ[x_c(x_c^\circ(\cdot), t, \cdot)_{\xi^\circ}]]\, dt = I_{\xi^\circ}[x_c^\circ(\cdot)] \tag{3.5}$$

где индекс ξ° при x указывает, что это есть решение уравнений (2.7) при $\xi = \xi^\circ$. Равенство (3.5) доказывает равенство (3.3).

Рассмотрим теперь некоторое допустимое управление, удовлетворяющее условию 1. Вследствие (3.2) имеем

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(\xi)} \geqslant -\omega[x(0), \xi[x_c(\cdot)]] \tag{3.6}$$

Интегрируя это неравенство от $t = 0$ до $t = \infty$, получим неравенство

$$v[x_c^\circ(\cdot)] \leqslant \int_0^\infty \omega\, [x(x_c^\circ(\cdot), t)_\xi, \xi[x_c(x_c^\circ(\cdot), t(\cdot)_\xi]]\, dt = I_\xi[x_c^\circ(\cdot)] \tag{3.7}$$

из которого вследствие (3.5) следует справедливость (3.4). Теорема доказана.

§ 4. Уравнения для оптимального управления ξ°. Основной результат статьи заключается в следующем [1].

Теорема 4.1. Если система может быть стабилизирована [2] каким-нибудь допустимым управлением $\xi \in \Xi$, то существует оптимальное управление $\xi^\circ[x_c(\cdot)]$, которое является линейным функционалом на кривой $x_c(\cdot) = \{x_i(\tau)\}$ $(i = 1, \ldots, n;\ -h \leqslant \tau \leqslant 0)$, имеющим вид

$$\xi^\circ[x_c(\cdot)] = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(0) + \int_{-h}^0 \left\{\sum_{i=1}^n \beta_i(\tau)\, x_i(\tau)\right\} d\tau \qquad (\alpha_i = \mathrm{const}) \tag{4.1}$$

---

[1] Ограничимся случаем, когда матрица $\|b_{ij}\|_1^n$ в уравнениях (1.1) является неособой. В случае, когда эта матрица является особой, рассуждения ведутся по тому же плану, что и здесь, однако в определении определенной положительности следует внести некоторые изменения (см. ниже, примечание 5.1, § 5, стр. 48).

[2] Иначе если можно указать управление $\xi \in \Xi$, при котором решение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво и интеграл I_ξ сходится.

Оптимальный индекс совершенства системы I_{ξ° является квадратичным функционалом на кривой $x_c(\cdot)$. Этот функционал имеет вид

$$I_{\xi^\circ}[x_c(\cdot)] = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i(0)\, x_j(0) + \int_{-h}^{0} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(\tau)\, x_i(0)\, x_j(\tau) \right\} d\tau +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij}(\tau, \vartheta)\, x_i(\tau)\, x_j(\vartheta) \right\} d\tau d\vartheta = v[x_c(\cdot)] \tag{4.2}$$

$$(\alpha_{ij} = \text{const}, \quad \gamma_{ij}(\tau, \vartheta) = \gamma_{ji}(\vartheta, \tau))$$

Примечание 4. 1. В условиях теоремы предполагается возможность стабилизации системы, по крайней мере, одним допустимым управлением ξ. Решение вопроса о такой возможности представляет самостоятельную задачу. Заметим, что процесс построения решения, описанный ниже в § 6, одновременно приводит и к решению вопроса о возможности стабилизации (см. § 6, стр. 50). Можно также указать в замкнутой форме некоторые достаточные условия возможности стабилизации. Этим вопросам будет посвящена отдельная статья. Здесь же заметим лишь, что стабилизация наверняка возможна, если система (1.1) уже при $\xi = 0$ асимптотически устойчива или если запаздывание h достаточно мало (или малы числа b_{ij}), а для системы

$$dx_i / dt = \Sigma\, a_{ij} x_j + b_i \xi$$

выполняются условия стабилизации, указанные в статье [10].

Эти условия заключаются в следующем. Необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство матрицы $A = \| a_{ij} \|_1^n$, соответствующее корням λ с неотрицательной действительной частью лежало в подпространстве, образованном векторами b, $Ab, \ldots A^{n-1}b$.

Доказательство теоремы будет намечено в § 6. Здесь, предполагая теорему верной, выведем уравнения, которым удовлетворяют величины α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, определяющие оптимальный индекс системы I_{ξ° и оптимальное управление ξ°.

Эти уравнения получаются подстановкой v согласно (4.2) и величины $\omega = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \xi^2$ в условия (3.1) и (3.2). Составим сначала выражение для производной $(dv / dt)_\xi$. Для вычисления этой производной следует согласно общему правилу ([3], стр. 170—179) подставить в (4.2) вместо $x(\tau)$ и $x(\vartheta)$ текущий отрезок траектории $x(t+\tau)$ и $x(t+\vartheta)$ и продифференцировать по t. При этом изменение функций $x(t+\tau)$ и $x(t+\vartheta)$ сводится к правому сдвигу, причем можно предполагать эти функции дифференцируемыми по t и τ, ϑ (см. по этому поводу [3], стр. 158, 162). Указанное дифференцирование сводится к преобразованию функций $x(t+\tau)$, $x(t+\vartheta)$ оператором ([3], стр. 160—166).

$$\begin{aligned} y(t+\tau) &= x_t'(t+\tau) = \begin{cases} x_\tau'(t+\tau) & (-h \leqslant \tau < 0) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j(t-h) + b_i \xi & (\tau = 0) \end{cases} \\ y(t+\vartheta) &= x_t'(t+\vartheta) = \begin{cases} x_\vartheta'(t+\vartheta) & (-h \leqslant \vartheta < 0) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j(t-h) + b_i \xi & (\vartheta = 0) \end{cases} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Учитывая это обстоятельство и преобразовывая получившееся после дифференцирования функционала (4.2) выражение интегрированием по частям[1], получим следующее равенство, определяющее производную (при $t = 0$):

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_\xi = \sum_{i,j,k} (\alpha_{ij}a_{jk} + \alpha_{kj}a_{ji})\, x_i(0)\, x_k(0) +$$

$$+ \sum_{i,j,k} (\alpha_{ij}b_{jk}x_i(0)\, x_k(-h) + \alpha_{ij}b_{ik}x_j(0)\, x_k(-h)) +$$

$$+ \sum_{i,j} (\alpha_{ij}b_j x_i(0) + \alpha_{ij}b_i x_j(0))\, \xi + \sum_{i,j,k} [a_{ik}x_k(0) +$$

$$+ b_{ik}x_k(-h)] \int_{-h}^{0} \beta_{ij}(\tau)\, x_j(\tau)\, d\tau + \sum_{i,j} \xi b_i \int_{-h}^{0} \beta_{ij}(\tau)\, x_j(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{i,j} \beta_{ij}(0)\, x_i(0)\, x_j(0) - \sum_{i,j} \beta_{ij}(-h)\, x_i(0)\, x_j(-h) -$$

$$- \int_{-h}^{0} \Big\{ \sum_{i,j} \beta_{ij}'(\tau)\, x_j(\tau)\, x_i(0) \Big\} d\tau + \tag{4.4}$$

$$+ 2 \int_{-h}^{0} \Big\{ \sum_{i,j} [\gamma_{ij}(0, \vartheta)\, x_i(0)\, x_j(\vartheta) - \gamma_{ij}(-h, \vartheta)\, x_i(-h)\, x_j(\vartheta)] \Big\} d\vartheta -$$

$$- \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} \Big[\sum_{i,j} \Big[\frac{\partial \gamma_{ij}(\tau, \vartheta)}{\partial \tau} + \frac{\partial \gamma_{ij}(\tau, \vartheta)}{\partial \vartheta} \Big] x_i(\tau)\, x_j(\vartheta) \Big] d\tau\, d\vartheta$$

В правую часть (4.4) прибавим $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \xi^2$ и приравняем полученную сумму нулю; получим в силу (3.1) первое уравнение для величин v и $\xi°$. Второе уравнение получается дифференцированием первого уравнения по ξ, так как при $\xi = \xi°$ в силу (3.2) левая часть этого уравнения имеет минимум.

Решая это второе уравнение относительно $\xi°$, получим

$$\xi° = - \Big\{ \sum_{i,j} \alpha_{ij} b_j x_i(0) + \frac{1}{2} \int_{-h}^{0} \sum_{i,j} b_i \beta_{ij}(\tau)\, x_j(\tau)\, d\tau \Big\} \tag{4.5}$$

Итак, задача сводится к определению функционалов v и $\xi°$, удовлетворяющих уравнениям (4.5) и

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\xi°} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2(0) + \xi^2 = 0 \tag{4.6}$$

где $(dv\,/\,dt)_\xi$ имеет вид (4.4).

Подставляя (4.4) и (4.5) в уравнение (4.6) и приравнивая коэффициенты при выражениях $x_i^2(\vartheta)$, $x_i(\tau)$ нулю, получим систему уравнений для функций $\beta_{ij}(\tau)$, $\gamma_{ij}(\tau, \vartheta)$ и постоянных α_{ij}. Получающиеся уравнения имеют довольно громоздкий вид, однако приближенное численное решение

[1] Законность этой операции следует из того, что функции $\beta_{ij}(\tau)$ и $\gamma_{ij}(\tau, \vartheta)$ являются достаточно гладкими (см. § 6).

этих уравнений вполне возможно. Можно, например, решать уравнения, разлагая функции $\beta_{ij}(\tau)$ и $\gamma_{ij}(\tau, \vartheta)$ в ряды Фурье. Этот подход является здесь тем более обоснованным и удобным, что для получения приближенной оптимальной системы достаточно приблизить функции β_{ij}, γ_{ij}, определяющие оптимальное управление ξ° (4.5) в среднем. Техническая трудность решения уравнений для α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij} заключается также в том, что надо найти те решения, при которых функционал (3.2) является определенно положительным. Эта трудность обходится при приближенном способе решения, описанном в § 6, где задача сводится к последовательному решению систем линейных уравнений, причем автоматически получаются те значения, при которых выполняются требования определенной положительности функционала (4.2).

Итак, оптимальным регулятором ξ° в системе с запаздываниями (1.1) при условиях минимизации величины (2.1) является идеальный регулятор ([20], стр. 360), который подает на вход регулируемого объекта A в каждый момент времени t величину $\xi^\circ[x(t, \cdot)]$ (4.1), вырабатываемую на основании измерения рассогласования x в данный момент времени и в предшествующие моменты $t - h \leqslant \tau \leqslant t$, причем результаты измерения предшествующих значений рассогласования перерабатываются в интегрирующих звеньях, вычисляющих интегралы

$$\int_{-h}^{0} \beta_i(\tau) x_i(t+\tau)\, d\tau$$

Интересно отметить, что для системы (1.1) с дискретным запаздыванием h оптимальное управление ξ° вырабатывается в виде, содержащем в качестве слагаемых интегралы, учитывающие непрерывное распределение влияния последействия на всем интервале запаздывания.

§ 5. Вспомогательный материал по теории второго метода Ляпунова. В этом параграфе приводятся некоторые данные, имеющие вспомогательное значение. Эти данные используются ниже в § 6 для построения функционала v (4.2), разрешающего оптимальную задачу.

Рассмотрим линейное уравнение с последействием

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j(t-h) + \int_{-h}^{0} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(\tau) x_j(\tau)\, d\tau \qquad (5.1)$$

$$(c_{ij} = \text{const}, \quad b_{ij} = \text{const})$$

где $d_{ij}(\tau)$ — дифференцируемые функции переменной τ. Матрицу $\|b_{ij}\|_1^n$ будем предполагать неособой (см. выше сноску на стр. 43).

Рассмотрим вопрос о построении для уравнения (5.1) функционала V, играющего роль функции Ляпунова и имеющего заданную производную dV/dt в силу уравнений (5.1).

Для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений наиболее удобными являются функции Ляпунова в виде квадратичных форм. Естественно, что для уравнений с последействием (5.1) аналогичную роль должны играть квадратичные функционалы $V[x_c(\cdot)]$.

В этой статье ограничимся лишь случаем, когда производная dV / dt имеет вид (при $t = 0$)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij} x_i(0)\, x_j(0) + \int_{-h}^{0} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \nu_{ij}(\tau)\, x_i(0)\, x_j(\tau) \right\} d\tau +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i(0)\, x_j(-h) + \int_{-h}^{0} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}(\tau)\, x_i(-h)\, x_j(\tau) \right\} d\tau + \tag{5.2}$$

$$+ \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij}(\tau, \vartheta)\, x_i(\tau)\, x_j(\vartheta) \right\} d\tau d\vartheta = F\,[x_c(\cdot)] \qquad ((\nu_{ij}, \varphi_{ij}, \varepsilon_{ij}) \in C_1)$$

Теория может быть, однако, развита без труда и на более общие случаи, когда $F\,[x_c(\cdot)]$ является квадратичным функционалом от $x_c(\cdot)$ более общей природы[1], а также на случай, когда правые части уравнений (5.2) зависят от времени t. Необходимый материал для такого развития, по аналогии с известной теорией для обыкновенных дифференциальных уравнений, имеется, например, в книге [3].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть решения уравнений (5.1) асимптотически устойчивы, т. е. корни уравнения

$$\det \| J_{kl} - \delta_{kl}\lambda \| = 0$$

$$J_{kl} = c_{kl} + b_{kl} e^{-\lambda h} + \int_{-h}^{0} d_{kl}(\tau)\, e^{\lambda\tau}\, d\tau \qquad \begin{pmatrix} \delta_{kl} = 0 & \text{при} & k \neq l \\ \delta_{kl} = 1 & \text{при} & k = l \end{pmatrix}$$

имеют отрицательные действительные части ([3], стр. 164). Тогда для любого функционала вида (5.2) существует один квадратичный функционал V, который имеет вид

$$V\,[x_c(\cdot)] = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i(0) x_j(0) + \sum_{i,j=1}^{n} \left[\int_{-h}^{0} \{\beta_{ij}(\tau)\, x_j(\tau)\, x_i(0)\}\, d\tau \right] +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij}(\tau, \vartheta)\, x_i(\tau)\, x_j(\vartheta) \right\} d\tau d\vartheta$$

$$(\beta_{ij},\ \gamma_{ij}\ \text{— кусочно гладкие функции}) \tag{5.4}$$

и производная которого в силу уравнений (5.1) удовлетворяет равенству (5.2).

Доказательство. В книге [3] показано, что функционал $V\,[x_c(\cdot)]$, имеющий производную dV / dt и удовлетворяющий условию (5.2), имеет вид

$$V\,[x_c(\cdot)] = -\int_{0}^{\infty} F\,[x_c(x_c(\cdot), t, \cdot)]\, dt \tag{5.5}$$

---

[1] Автор считает своим долгом отметить, что независимо от него теория построения функционалов v, имеющих квадратичную производную в силу линейных уравнений с запаздываниями, была развита в последнее время Ю. М. Репиным. Результаты Ю. М. Репина были изложены в докладе «О некторых функционалах для уравнений с запаздываниями», представленном 4-му Всесоюзному математическому съезду (Программа съезда, стр. 75).

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что функционал (5.5) действительно имеет вид (5.4). Проверка этого обстоятельства может быть выполнена, исходя из общих теорем функционального анализа, или непосредственно построением функционала сначала на кусочно-постоянных начальных функциях $x_i(\tau)$ с последующим переходом к непрерывным функциям $x_i(\tau)$. При этом не возникает существенных затруднений, так как решения $\{x_i(x(\cdot), t)\}$, где $x(\cdot)$ — функция вида

$$x_i(\tau) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ i \neq j,\ -h \leqslant \tau \leqslant 0)$$

$$x_j(\tau) = 0 \quad (-h \leqslant \tau < \tau_1,\ \tau_2 < \tau \leqslant 0), \qquad x_j(\tau) = \zeta \quad (\tau_1 < \tau < \tau_2)$$

или

$$x_j(\tau) = 0 \qquad (-h \leqslant \tau < 0), \qquad x_j(0) = \zeta$$

непрерывно дифференцируемы по τ_1, τ_2 и ζ.

Проверка гладкости построенных таким путем функций β_{ij} и γ_{ij} проводится, опираясь также на свойства интегральной непрерывности и дифференцируемости решений (5.1) по начальным кривым. Технические детали этих рассуждений опустим.

Примечание 5.1. Можно показать, что на начальных кривых $x_c(\cdot)$, удовлетворяющих условиям Коши — Липшица

$$|x_i(\tau_1) - x_i(\tau_2)| \leqslant L\,|\tau_2 - \tau_1| \quad \text{при } \|x_c(\cdot)\| \leqslant 1$$

$$|x_i(\tau_1) - x_i(\tau_2)| \leqslant L\,\|x_c(\cdot)\|\,|\tau_2 - \tau_1| \quad \text{при } \|x_c(\cdot)\| > 1$$

$$(L = \text{const},\ i = 1, \ldots, n)$$

функционал V является определенно положительным, если функционал F на этих кривых является определенно отрицательным[1]. Этого оказывается достаточно для дальнейших рассуждений, так как в силу замечания ([3], стр. 158) в дальнейшем можно ограничиваться только такими кривыми.

§ 6. Построение оптимального управления ξ° деформацией системы. В этом параграфе описывается процесс построения оптимального управления ξ° и функционала v методом деформации системы за счет введения параметра μ. Рассуждения подобны тем рассуждениям, которые были проведены в работах [10-12] в аналогичных случаях.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Найти оптимальное векторное управление

$$\xi\,[x_c(\cdot), \mu] = \{\xi_1\,[x_c(\cdot), \mu], \ldots, \xi_n\,[x_c(\cdot), \mu]\}$$

минимизирующее величину

$$J[x_c^\circ(\cdot)]_\xi^\mu = \int_0^\infty \left\{\sum_{i=1}^n x_i^2(t) + \sum_{i=2}^n (1-\mu)\,\xi_i^2\,[x_c(t,\cdot), \mu] + \xi_1^2\,[x_c(t,\cdot), \mu]\right\} dt \tag{6.1}$$

в регулируемой системе, описываемой уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \mu\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j(t-h) + b_i\xi_1\right] + (1-\mu)\,\xi_i$$

$$(i = 1, \ldots, n) \tag{6.2}$$

[1] При условии, что матрица $\|b_{ij}\|_1^n$ неособая. От этого ограничения можно освободиться, вводя особым образом понятие определенной положительности, а именно — потребовать определенную положительность v лишь по $\|x(0)\|$ на кривых

$$\|x_c(\cdot)\| \leqslant \|x(0)\|$$

При $\mu = 0$ задача решается элементарно. В самом деле, при $\mu = 0$ система не имеет запаздывания и функционал v сводится просто к функции

$$v(x_1, \ldots, x_n) = v[x_c(\cdot), \mu = 0].$$

Для этой функции [1] из (3.1) и (3.2) выводятся уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \xi_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 0, \qquad 2\xi_i + \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, полагая

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 \qquad \left(\alpha_{ii} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Оптимальное управление имеет здесь вид

$$\xi_i[x_c(\cdot)] = -x_i(0) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Предположим теперь, что при некотором значении μ задача решена. Это означает, что найдены функционалы $v[x_c(\cdot), \mu]$ и $\xi_i[x_c(\cdot), \mu]$, имеющие вид

$$v[x_c(\cdot), \mu] = \sum_{i,j} \alpha_{ij}(\mu) x_i(0) x_j(0) + \int_{-h}^{0} \left\{\sum_{i,j} \beta_{ij}(\tau, \mu) x_i(0) x_j(\tau)\right\} d\tau +$$
$$+ \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \left\{\sum_{i,j} \gamma_{ij}(\tau, \vartheta, \mu) x_i(\tau) x_j(\vartheta)\right\} d\tau d\vartheta \tag{6.3}$$

$$\xi_1[x_c(\cdot), \mu] = -\left\{\sum_{i,j} [\alpha_{ij}(\mu) b_i\mu + \alpha_{1j}(1-\mu)] x_j(0) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_{-h}^{0} \left\{\sum_{i,j} [\beta_{ij}(\tau, \mu) b_i\mu + \beta_{1j}(\tau, \mu)(1-\mu)] x_j(\tau)\right\} d\tau\right\} \tag{6.4}$$

$$\xi_i[x_c(\cdot), \mu] = -\left\{\sum_{j} \alpha_{ij}(\mu) x_j(0) + \frac{1}{2}\int_{-h}^{0} \left\{\sum_{j} \beta_{ij}(\tau, \mu) x_j(\tau)\right\} d\tau\right\}$$
$$(i = 2, \ldots, n)$$

и удовлетворяющие уравнениям (3.1), (3.2), т. е. найден функционал v, удовлетворяющий уравнениям

$$\sum_{i,j,k} (\alpha_{ij}(\mu) a_{jk} + \alpha_{kj}(\mu) a_{ji}) \mu x_i(0) x_k(0) +$$
$$+ 2\sum_{i,j,k} \mu\alpha_{ij}(\mu) b_{jk} x_i(0) x_k(-h) + \sum_{i,j,k} [a_{ik} x_k(0) + b_{ik} x_k(-h)] \mu \times$$
$$\times \int_{-h}^{0} \beta_{ij}(\tau, \mu) x_j(\tau) d\tau - \left\{\sum_{i,j} [\alpha_{ij}(\mu) b_i\mu + \alpha_{1j}(1-\mu)] x_j(0) + \right. \tag{6.5}$$

[1] Некоторое неудобство состоит здесь в том, что $v(x_1, \ldots, x_n)$ неопределенно положительна в $\{x_c(\cdot)\}$, однако это не играет существенной роли в этом месте (см. предыдущую сноску).

$$+\frac{1}{2}\int_{-h}^{0}\left\{\sum_{i,j}[\beta_{ij}(\tau,\mu)\,b_i\mu+\beta_{1j}(\tau,\mu)\,(1-\mu)]\,x_j(\tau)\right\}d\tau\Big\}^2-$$

$$-\sum_{i=2}^{n}\Big\{\sum_j \alpha_{ij}(\mu)\,x_j(0)+\frac{1}{2}\int_{-h}^{0}\Big\{\sum_j \beta_{ij}(\tau,\mu)\,x_j(\tau)\Big\}d\tau\Big\}^2+$$

$$+\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\Big\{\sum_{i,j}\gamma_{ij}(\tau,\vartheta,\mu)\,x_i(\tau)\,x_j'(\vartheta)+$$

$$+\gamma_{ij}(\tau,\vartheta,\mu)\,x_i'(\tau)\,x(\vartheta)]\Big\}d\tau d\vartheta+\sum_i x_i^2(0)=0$$

Рассмотрим вопрос о том, как меняются функционалы $v\,[x_c(\cdot),\mu]$ и $\xi_i\,[x_c(\cdot),\mu]$ с изменением параметра μ $(0\leqslant\mu\leqslant 1)$. Для этого продифференцируем формально уравнения (6.5) по μ. Получим после простых выкладок

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(6.2),\,\mu}=-\sum_{i,j,k}(\alpha_{ij}(\mu)\,a_{jk}+\alpha_{kj}(\mu)\,a_{jk})\,x_i(0)\,x_j(0)-$$

$$-2\sum_{i,j,k}\alpha_{ij}(\mu)\,b_{jk}x_i(0)\,x_k(-h)-$$

$$-\sum_{i,j,k}[a_{ik}x_k(0)+b_{ik}x_k(-h)]\int_{-h}^{0}\beta_{ij}(\tau,\mu)\,x_j(\tau)\,d\tau \tag{6.6}$$

Здесь $V=\partial v/\partial\mu$, а символ (dV/dt) означает производную функционала V в силу уравнений (6.2) при выбранном значении μ и при значениях ξ_i, равных функционалам (6.4), определяющим оптимальное управление при данном μ. Но вследствие теоремы 5.1 функционал V, удовлетворяющий условиям (6.6), существует и имеет вид (5.4) (так как при данном μ система (6.2) асимптотически устойчива) и, следовательно, операция дифференцирования была законной. Из выражения для $\partial v/\partial\mu$ находим также по формулам (6.4) $\partial\xi/\partial\mu$. Используя факт существования производной $\partial v/\partial\mu$, можно показать, что решение задачи, найденное при $\mu=0$, может быть продолжено на весь отрезок $0\leqslant\mu\leqslant 1$ (если при $\mu=1$ система может быть стабилизирована) и тем самым получить решение задачи при $\mu=1$, которая совпадает с первоначально поставленной задачей. Тем самым устанавливается справедливость теоремы 4.1. Так как рассуждения здесь проводятся совершенно по тому же плану, что и в статье [11], здесь эти рассуждения опустим.

Заметим в заключение, что описанный выше процесс указывает путь решения задачи приближенно: решаем задачу при $\mu=0$ и затем находим приращения функционалов $\Delta v\,[x_c(\cdot),\mu]$ и $\Delta\xi_i\,[x_c(\cdot),\mu]$, соответствующие приращениям $\Delta\mu$, используя уравнение (6.6) и полагая $\Delta v\approx\approx\Delta\mu\partial v/\partial\mu$, $\Delta\xi_i\approx\Delta\mu\partial\xi_i/\partial\mu$. Уравнения (6.6), определяющие $\partial v/\partial\mu$, здесь также следует решать приближенно. Если величины $\Delta\mu\to 0$ и решения уравнений (6.6) будут находиться с достаточной степенью точности (хотя бы в среднем), то приближенное решение $\xi_{\Delta\mu}{}^{\circ}$ сходится к точному. Заметим еще, что в случае, если система не может быть стабилизирована при $\mu=1$, то величина функционала $v\,[x_c(\cdot),\mu]$ будет неограниченно возрастать при

$\mu \to 1$ на некоторой начальной кривой. Это означает, что один из коэффициентов $\alpha_{ij}(\mu)$ или одна из функций $\beta_{ij}(\tau, \mu)$ или $\gamma_{ij}(\tau, \vartheta, \mu)$ становятся бесконечно большими.

Автор отмечает, что источником этой работы послужили исследования А. М. Летова, которого автор благодарит за обсуждение статьи и ценные замечания.

Поступила 14 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1956.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Гостехиздат, 1960.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. ИИЛ, 1956.
5. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
6. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Метод динамического программирования. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, вып. 4.
7. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. УМН, 1949, т. 4 : 5 3.3.
8. Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Bolterra и их применениях к некоторым задачам математической физики. Бюллетень МГУ, 1938, 1, секция А, вып. 8.
9. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
10. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
11. Красовский Н. Н., Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограничениях на скорость изменения управляющего воздействия. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
12. Красовский Н. Н., Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII вып. 9—11.
13. Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, 1953, т. XIV, № 6.
14. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, 1959.
15. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Принцип максимума в теории оптимальных процессов управления. Докл. на I Международном конгрессе ИФАК, 1960.
16. Kramer I. On control of linear Systems with fime lags. Information and Kontrol, vol. 3, N 4, 1960.
17. Bellman R., Kalabe R., Dynamic Programming and Control Processes. Jorn. of Basic Engineering, march, 1961.
18. Бутковский А. Г., Лернер А. Я. Об оптимальном управлении систем с распределенными параметрами. ДАН СССР, 1960, т. 134, № 4.
19. Харатишвили Г. Л. Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием. ДАН СССР, 1961, т. 136, № 1.
20. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1954.
21. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.— Л., Гостехиздат, 1951.