Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

В. А. Троицкий

(Ленинград)

Задачи оптимизации процессов управления привлекают в последние годы все большее внимание исследователей. При решении их пользуются и классическим аппаратом вариационного исчисления [1-5], и новейшими методами. Важные для теории оптимальных систем результаты получены при помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина [6-9], методами функционального анализа [10] и методом динамического программирования [11].

Многие задачи оптимизации процессов управления могут быть поставлены в форме проблем Лагранжа [1, 12-15], Майера [6, 8] и Майера — Больца вариационного исчисления. Здесь рассматривается наиболее общая из них — проблема Майера — Больца — с теми изменениями, которые вносят в нее задачи оптимизации [2-4,13,14]. Изучаются ограничения, накладываемые на управления; для этого случая приводятся все необходимые условия минимума.

Автор считает долгом выразить благодарность А. И. Лурье за внимание и помощь при выполнении настоящей работы.

1. Постановка задачи. Среди функций $x_s(t)$ $(s=1,\ldots,n)$ и $u_k(t)$ $(k=1,\ldots,m)$, удовлетворяющих в интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$ системе n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$g_s=\dot{x}_s-f_s(x_1,\ldots,x_n,\ u_1,\ldots,u_m,\ t)=0 \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

и r конечным соотношениям

$$\psi_k=\psi_k(u_1,\ldots,u_m,\ t)=0 \qquad (k=1,\ldots,r<m) \tag{1.2}$$

а также p условиям на концах (t_0 и T могут быть нефиксированными)

$$\varphi_l=\varphi_l\,[x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0),\ t_0,\ x_1(T),\ldots,x_n(T),\ T]=0$$
$$(l=1,\ldots,p\leqslant 2n+1) \tag{1.3}$$

требуется найти такие, которые сообщают функционалу

$$J=g\,[x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0),\ t_0,x_1(T),\ldots,x_n(T),T]+$$
$$+\int_{t_0}^{T} f_0(x_1,\ldots,x_n,\ u_1,\ldots,u_m,\ t)\,dt \tag{1.4}$$

минимальное (или максимальное) значение.

Такая постановка приводит к вариационной проблеме Майера — Больца [13] частного вида, усложненной наличием равенств (1.2) и функций $u_k(t)$, производные которых не входят в уравнения задачи. Ею охватывается достаточно широкий класс задач оптимизации процессов управления [14], при рассмотрении которых функции $u_k(t)$ называются обычно управлениями или параметрами управления, а $x_s(t)$ — координатами. Эта терминология будет применяться в дальнейшем.

Будем предполагать, что все требования вариационного исчисления, накладываемые на функции, вошедшие в формулировку задачи, выполнены. Будут изучаться только нормальные кривые [13] в $n+m$-мерном пространстве координат и управлений, сообщающие минимум функционалу J. Случай максимума может быть сведен к изучаемому или изменением знака J, или переменой знаков приводимых ниже неравенств.

В отличие от рассмотренных ранее [14, 15] случаев, когда использовались лишь необходимые условия стационарности, здесь исследуются траектории с общими условиями (1.3) для концов, в функционал J включены два слагаемых и приводятся все необходимые условия минимума функционала J. В работе [14] описан способ использования равенств типа (1.2) при учете ограничений вида

$$U_k^{(1)} \leqslant u_k(t) \leqslant U_k^{(2)} \tag{1.5}$$

задающих интервалы допустимых изменений управлений. В этом случае зависимости (1.2) составляются в виде

$$\psi_k = u_k - \chi_k(u_{k_1}) = 0 \tag{1.6}$$

причем функция $\chi_k(u_{k_1})$ равна

$$\chi_k(u_{k_1}) = \begin{cases} U_k^{(1)}, & \dfrac{d\chi_k}{du_{k_1}} = 0, \quad u_{k_1} \leqslant U_{k_1}^{(1)} \\ \chi_k, & \dfrac{d\chi_k}{du_{k_1}} \neq 0, \quad U_{k_1}^{(1)} < u_{k_1} < U_{k_1}^{(2)} \\ U_k^{(2)}, & \dfrac{d\chi_k}{du_{k_1}} = 0, \quad u_{k_1} \geqslant U_{k_1}^{(2)} \end{cases} \tag{1.7}$$

где u_{k_1} — дополнительно вводимое управление. Эти равенства можно также строить в форме [4]

$$(U_k^{(1)} - u_k)(u_k - U_k^{(2)}) - u_{k_1}^2 = \psi_k = 0 \tag{1.8}$$

Заметим, что аналогичный прием может быть использован при учете более общих ограничений

$$\Omega^{(1)} \leqslant \omega(u_1, \ldots, u_{m'}, t) \leqslant \Omega^{(2)} \tag{1.9}$$

для которых ψ_k будет иметь вид

$$\psi = \omega(u_1, \ldots, u_{m'}, t) - \chi(u_{m'+1}) = 0 \tag{1.10}$$

а $\chi(u_{m'+1})$ получится из (1.7) заменой $U_k^{(1)}$ и $U_k^{(2)}$ на $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$.

На каждое из ограничений типа (1.5) или (1.9) этим путем вводится одно дополнительное управление. Все они должны быть включены в общее число m управлений, имеющихся в уравнениях задачи. Дополнительные управления будут входить только в уравнения (1.2) и не будут содержаться в уравнениях (1.1). Функции f_s могут зависеть от всех управлений в тех случаях, когда зависимости (1.2) отражают какие-либо кинематические или иные свойства оптимизируемой системы и рассматривается задача оптимизации без ограничений.

При помощи формул вида (1.6) или (1.10) осуществляется переход от замкнутой области изменения координат и реально имеющихся в уравнениях (1.1) управлений к открытой области изменения координат и всех управлений, в число которых включены также дополнительные управления, вводимые равенствами (1.2).

Ограничения (1.5) или (1.9) будут существенной особенностью задач оптимизации процессов управления. Они сильно усложняют решение задачи, так как приводят к необходимости рассмотрения разрывных функций $u_k(t)$. В связи с этим функции, сообщающие минимум функционалу J, будут искаться среди непрерывных функций $x_s(t)$ с кусочно-непрерывными производными $\dot{x}_s(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $u_k(t)$. В работе [15] приводились ограничения интегрального типа, которые здесь не рассматриваются.

2. Условие стационарности функционала J. При построении условия стационарности функционала используется равное ему выражение

$$I = \theta + \int_{t_0}^{T} L\,dt \tag{2.1}$$

в котором

$$\theta = g + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l \tag{2.2}$$

$$L = f_0 + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s g_s - \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \dot{x}_s - H \tag{2.3}$$

$$H = H_\lambda + H_\mu = \sum_{s=0}^{n} \lambda_s f_s + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k \qquad (\lambda_0 = -1) \tag{2.4}$$

Здесь ρ_l, $\lambda_s(t)$ и $\mu_k(t)$ — подлежащие вычислению неопределенные множители Лагранжа. Далее строится первая вариация ΔI функционала I и приравнивается нулю. Это приводит к требующемуся условию стационарности функционала J.

Такой процесс, правда, для более простой задачи подробно описан в работе [14]; поэтому приводим только окончательные результаты: уравнения

$$\dot{\lambda}_s^{\pm} = -\frac{\partial H}{\partial x_s^{\pm}} \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\partial H}{\partial u_k^{\pm}} = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

краевые условия

$$\lambda_s^-(t_0) - \frac{\partial \theta}{\partial x_s(t_0)} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad (f_0)_{t_0} - \frac{d\theta}{dt_0} = 0 \tag{2.6}$$

$$\lambda_s^+(T) + \frac{\partial \theta}{\partial x_s(T)} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad (f_0)_{t_0} + \frac{d\theta}{dT} = 0 \tag{2.7}$$

условия Эрдманна — Вейерштрасса (условия непрерывности $\lambda_s(t)$ и H)

$$\lambda_s^-(t^*) = \lambda_s^+(t^*) \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad (H^-)_{t^*} = (H^+)_{t^*} \tag{2.8}$$

В равенствах (2.6) и (2.7) производные $d\theta/dt_0$ и $d\theta/dT$ равны

$$\frac{d\theta}{dt_0} = \frac{\partial \theta}{\partial t_0} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_s(t_0)} \dot{x}_s(t_0), \qquad \frac{d\theta}{dT} = \frac{\partial \theta}{\partial T} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_s(T)} \dot{x}_s(T)$$

Как и в работе [14], предположим, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется одна точка $t = t^*$ разрыва непрерывности управлений $u_k(t)$ и значками — и + обозначим значения соответствующих функций в подынтервалах $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ и $t^* \leqslant t \leqslant T$.

Зависимости (2.5) — (2.8) доставляют условие стационарности функционала J. Для решения задачи оптимизации к ним нужно добавить уравнения (1.1) и (1.2), которые можно переписать в форме

$$\dot{x}_s^{\pm} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_s^{\pm}}, \quad (s=1, \ldots, n), \qquad \frac{\partial H}{\partial \mu_k^{\pm}} = 0 \quad (k=1, \ldots, r) \tag{2.9}$$

концевые условия (1.3) и условия сопряжения координат

$$x_s^{-}(t^*) = x_s^{+}(t^*) \quad (s=1, \ldots, n) \tag{2.10}$$

Теперь для определения $4n+2m+2r$ функций $x_s^{\pm}(t)$, $\lambda_s^{\pm}(t)$, $u_k^{\pm}(t)$ и $\mu_k^{\pm}(t)$ имеются $2n+2m$ уравнений (2.5) и $2n+2r$ уравнений (2.9). Интегрирование дифференциальных уравнений введет $4n$ произвольных постоянных, для нахождения которых вместе с множителями ρ_l $(l=1,\ldots,p)$ и величинами t_0, t^* и T следует использовать $4n+p+3$ условий (2.6) — (2.8), (2.10).

Особого упоминания заслуживают вторые из равенств (2.5), которые совпадают с необходимыми условиями экстремума функции H по управлениям u_k. Если функции f_s и ψ_k не зависят явно от времени, то имеет место первый интеграл

$$H = H_\lambda + H_\mu = h = \text{const} \tag{2.11}$$

В этом случае будут иметь место зависимости

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t_0} = \frac{\partial \theta}{\partial T} = h \tag{2.12}$$

заменяющие вторые из равенств (2.6) и (2.7).

3. **Необходимое условие Вейерштрасса.** Необходимое и достаточное условие Вейерштрасса сильного минимума функционала J строится при помощи функции Вейерштрасса E, имеющей в изучаемом здесь случае вид

$$\begin{aligned} E = {} & L(x_1, \ldots, x_n, \dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_n, U_1, \ldots, U_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) - \\ & - L(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, u_1, \ldots, u_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) - \\ & - \sum_{s=1}^{n} (\dot{X}_s - \dot{x}_s) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь x_s и u_k соответствуют кривой, сообщающей минимум функционалу J, а X_s и U_k — любые допустимые функции, удовлетворяющие уравнениям (1.1) и (1.2) и условиям (1.3).

В учебной литературе [12, 13] приводится обычно другая форма функции E. В ней отсутствуют управления u_k и U_k, что соответствует рассматриваемым в этих книгах задачам. В необходимости введения управлений u_k и U_k в вариационных задачах оптимизации процессов управления можно убедиться, если повторить рассуждения и выкладки, проводимые при установлении необходимого условия Вейерштрасса [13] с изменениями, учитывающими зависимость функций f_s и ψ_k от управлений u_k, но не от их производных (это дано в приложении, п. 6).

После подстановки в равенство (3.1) выражения (2.3) получим

$$\begin{aligned} E = {} & -H(x_1, \ldots, x_n, U_1, \ldots, U_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) + \\ & + H(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Необходимое условие сильного минимума функционала J

$$E \geqslant 0 \tag{3.3}$$

эквивалентно неравенству

$$H(x_1, \ldots, x_n, U_1, \ldots, U_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) \leqslant \\ \leqslant H(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) \tag{3.4}$$

Выходя за рамки предлагаемой работы, можно отметить, что достаточное условие Вейерштрасса сильного минимума получится из (3.4), если в нем опустить знак равенства. Тогда в оптимальном режиме, соответствующем минимуму функционала J, функция H имеет максимум по управлениям u_k при любых допустимых их величинах.

Если вспомнить, что дополнительные управления, о которых шла речь в п.1, в функцию H_λ не входят и что $H_\mu \equiv 0$, то можно условие Вейерштрасса и условие стационарности в рассматриваемой здесь задаче сформулировать в виде, аналогичном принципу максимума Л. С. Понтрягина [6, 8].

Параметры управления u_k, для которых значение функционала J минимально, сообщают максимум функции H_λ при любых допустимых $x_s(t)$, $\lambda_s(t)$, $\mu_k(t)$, удовлетворяющих уравнениям (2.9), (2.5), условиям (1.3), (2.6) и (2.7) и условиям сопряжения (2.8) и (2.10).

Нужно еще раз подчеркнуть, что при помощи этого принципа в работах Л. С. Понтрягина, Р. В. Гамкрелидзе, В. Г. Болтянского, А. И. Розоноэра и других получены важные результаты теории оптимальных систем.

4. Необходимое условие Клебша. Для того чтобы получить необходимое условие Клебша слабого минимума функционала J, можно воспользоваться результатами предыдущего пункта. Предположим, что U_k и $\dot{X}_s$, удовлетворяющие уравнениям (1.1) и (1.2), отличаются от u_k и $\dot{x}_s$ на малые величины, так что

$$U_k = u_k + \delta u_k, \qquad \dot{X}_s = \dot{x}_s + \delta \dot{x}_s \tag{4.1}$$

где δu_k и $\delta \dot{x}_s$ — малые допустимые вариации, для которых справедливы уравнения вариаций вдоль кривой, дающей минимум функционалу J

$$\delta \dot{x}_s - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial u_k} \delta u_k = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.2}$$

$$\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial \psi_k}{\partial u_\beta} \delta u_\beta = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{4.3}$$

Подставим выражения (4.1) в равенство (3.1) и разложим первое слагаемое его правой части в ряд по δu_k и $\delta \dot{x}_s$. Тогда будем иметь

$$E = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_s \partial \dot{x}_\alpha} \delta \dot{x}_s \delta \dot{x}_\alpha + 2 \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_s \partial u_k} \delta \dot{x}_s \delta u_k + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial u_k \partial u_\beta} \delta u_k \delta u_\beta \tag{4.4}$$

где слагаемые степени выше второй отброшены. Если в это соотношение подставить L из (2.3) и воспользоваться условием (3.3), то

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial u_\beta} \delta u_k \delta u_\beta \leqslant 0 \tag{4.5}$$

Это неравенство вместе с уравнениями (4.2) и (4.3) доставляет необходимое условие Клебша слабого минимума функционала J. Нетрудно видеть, что вместе с условием стационарности оно совпадает с необходимыми условиями максимума H_λ по управлениям u_k при выполнении равенств (1.2) при малых допустимых отклонениях управлений. Все производные, входящие в соотношения (4.2) — (4.5), вычисляются в точках кривой, сообщающей минимум функционалу J.

5. Необходимое условие Якоби. Последним, четвертым необходимым условием минимума функционала J является условие Якоби. В соответствии с ним нужно потребовать, чтобы вторая вариация $\Delta^2 I$ функционала I, вычисленная на кривой, сообщающей минимум функционалу J, не принимала отрицательных значений [13]. Эта вариация имеет следующий вид:

$$\Delta^2 I = 2\varphi\,[\Delta x_1(t_0), \ldots, \Delta x_n(t_0), \delta t_0, \Delta x_1(T), \ldots, \Delta x_n(T), \delta T] + \\ + 2\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial x_s}\Delta x_s \delta t\right]_{t_0}^{T} + \left\{\left[\frac{\partial L}{\partial t} - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_s}\dot{x}_s\right]\delta t^2\right\}_{t_0}^{T} + \\ + \int_{t_0}^{T} 2\omega\,(\delta x_1, \ldots, \delta \dot{x}_n, \delta u_1, \ldots, \delta u_m)\,dt \tag{5.1}$$

и может быть найдена приемами, описанными в указанной выше книге Г. А. Блисса [13].

В выражении (5.1) через 2φ и 2ω обозначены квадратичные формы

$$2\varphi = \left\{\sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_s \partial x_\alpha}\Delta x_s \Delta x_\alpha + 2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\theta}{\partial t\,\partial x_s}\Delta x_s \delta t + \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\delta t^2\right\}_{t_0}^{T} \tag{5.2}$$

$$2\omega = \sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_s \partial x_\alpha}\delta x_s \delta x_\alpha + 2\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial x_s \partial u_k}\delta x_s \delta u_k + \sum_{k=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial u_k \partial u_\beta}\delta u_k \delta u_\beta \tag{5.3}$$

В форме (5.2) и в соотношении (5.1) пределы, указанные у отдельных слагаемых, введены для сокращения записи, так что, например, вместо второго слагаемого в равенстве (5.1) можно было бы писать

$$2\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial x_s}\Delta x_s \delta t\right]_{t_0}^{T} = 2\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial x_s}\right)_T \Delta x_s(T)\,\delta T - 2\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial x_s}\right)_{t_0}\Delta x_s(t_0)\,\delta t_0$$

Наконец, через $\Delta x_s(t_0)$ и $\Delta x_s(T)$ обозначены вариации концов кривых сравнения

$$\Delta x_s(t_0) = \delta x_s(t_0) + \dot{x}_s(t_0)\,\delta t_0, \quad \Delta x_s(T) = \delta x_s(T) + \dot{x}_s(T)\,\delta T \tag{5.4}$$

Все коэффициенты при произведениях вариаций в зависимостях (5.1)—(5.3) вычисляются в точках кривой, сообщающей минимум функционалу J.

Если воспользоваться формулой (2.3), то коэффициенты квадратичной формы (5.3) можно будет выразить через вторые производные функции H, после чего получим

$$-2\omega = \sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial x_\alpha}\delta x_s \delta x_\alpha + 2\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial u_k}\delta x_s \delta u + \sum_{k=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial u_\beta}\delta u_k \delta u_\beta \tag{5.5}$$

Остается составить условие неотрицательности второй вариации (5.1). Его получают обычно путем перехода к решению присоединенной задачи о минимуме второй вариации [13] к задаче определения таких вариаций $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$, $\delta u_1, \ldots, \delta u_m$, δt_0 и δT, связанных уравнениями вариаций вдоль кривой, сообщающей минимум функционалу J

$$\delta g_s = \delta \dot{x}_s - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial u_k} \delta u_k = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.6}$$

$$\delta \psi_k = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial \psi_k}{\partial u_\beta} \delta u_\beta = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{5.7}$$

и условиями (5.8)

$$\frac{d\varphi_l}{dt_0} \delta t_0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_s(t_0)} \delta x_s(t_0) + \frac{d\varphi_l}{dT} \delta T + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_s(T)} \delta x_s(T) = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p)$$

которые сообщают минимум второй вариации $\Delta^2 I$, представляемой в этом случае в следующей форме:

$$\Delta^2 I = j\,[\delta x_1(t_0), \ldots, \delta x_n(t_0), \delta t_0, \delta x_1(T), \ldots, \delta x_n(T), \delta T] + \\ + \int_{t_0}^{T} 2\omega(\delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta u_1, \ldots, \delta u_m)\, dt \tag{5.9}$$

которая найдется из (5.1) после подстановки вариаций (5.4).

Вид функционала (5.9) и ограничений (5.6) — (5.8) показывает, что присоединенная задача о минимуме второй вариации будет вариационной проблемой Майера — Больца, описанного в п. 1 типа. При решении ее можно пользоваться всеми описанными выше результатами.

Следует отметить, что во многих случаях можно ограничиться только исследованием условий стационарности и условий Вейерштрасса или Клебина. Действительно, присоединенная задача о минимуме второй вариации $\Delta^2 I$ функционала I имеет тривиальное решение

$$\delta x_1 = \ldots = \delta x_n = \delta u_1 = \ldots = \delta u_m = \delta t_0 = \delta T = 0 \tag{5.10}$$

Если это решение окажется единственным, удовлетворяющим условию стационарности второй вариации, то условие Якоби будет тем самым выполнено.

6. Приложение. Необходимое условие Вейерштрасса. При установлении необходимого условия Вейерштрасса сильного минимума функционала J будем следовать приемам, описанным в книге Г. А. Блисса [13]. Вариационная задача будет рассматриваться в постановке п. 1. Предполагается существование производных функций f_s и ψ_k нужного для дальнейшего порядка.

В $n+m$-мерном пространстве $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_m$ рассмотрим некоторую нормальную [13] кривую C, удовлетворяющую уравнениям (1.1) и (1.2) и условиям (1.3) и сообщающую минимум функционалу J. Будем считать, что матрица

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} \right\|,$$

у которой i, j-й элемент представляет собой производную $\partial \psi_i / \partial u_j$, имеет на кривой C ранг r, равный числу уравнений (1.2).

Тогда, повторив выкладки, имеющиеся в указанной выше книге Г. А. Блисса, найдем, что кривая C может быть включена в p-параметрическое семейство кривых

$$x_s(b, t) \qquad (s = 1, \ldots, n), \qquad u_k(b, t) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{6.1}$$

удовлетворяющих уравнениям (1.1) и (1.2), причем кривой C соответствуют значения $b_1 = \ldots = b_p = 0$. Здесь и в дальнейшем для сокращения записи через b обозначается вся совокупность параметров $b_1, \ldots, b_p$. Аналогичными обозначениями x и u будем пользоваться для обозначения совокупностей координат $x_1, \ldots, x_n$ и управлений $u_1, \ldots, u_m$.

Выберем теперь в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ точку t', не совпадающую с угловой точкой кривой C, и построим три семейства кривых

$$\begin{gathered} x_s(b, t), \qquad u_k(b, t) \qquad (t_0 - \delta < t < t', \ |b| < \varepsilon) \\ X_s(b, t), \qquad U_k(t) \qquad (t' \leqslant t \leqslant t' + e, \ |b| < \varepsilon, \ |e| < \varepsilon) \\ x_s(b, e, t), \qquad u_k(b, t) \qquad (t' + e \leqslant t < T + \delta, \ |b| < \varepsilon, \ |e| < \varepsilon) \\ (s = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{6.2}$$

удовлетворяющих в первом и третьем интервалах уравнениям

$$\dot{x}_s - f_s(x, u, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n), \qquad \psi_k(u, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{6.3}$$

Для кривых второго семейства справедливы уравнения

$$\dot{X}_s - f_s(X, U, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n), \qquad \psi_k(U, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{6.4}$$

При построении этих семейств использованы условия

$$\begin{gathered} x_s(b, t_0) = x_s(t_0) + \sum_{\alpha=1}^{p} b_\alpha \xi_{s\alpha}(t_0) \\ X_s(b, t') = x_s(b, t'), \qquad x_s(b, e, t' + e) = X_s(b, t' + e) \qquad (s = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{6.5}$$

Под $U_k(t)$ понимаются любые допустимые функции. При $b = e = 0$ первое и третье семейства дают функции, определяющие кривую C. Обозначим через

$$\xi_{s\alpha} = \frac{\partial x_s}{\partial b_\alpha}, \qquad \zeta_{k\alpha} = \frac{\partial u_k}{\partial b_\alpha} \tag{6.6}$$

вариации первого и третьего семейств по параметрам b_α, а через

$$\xi_s = \frac{\partial x_s}{\partial e}, \qquad \zeta_k = \frac{\partial u_k}{\partial e} \equiv 0 \tag{6.7}$$

аналогичные вариации по параметру e. На основании (6.2) и (6.5) имеем

$$\xi_s(t) = 0 \qquad (t_0 - \delta < t < t'), \qquad \dot{x}_s(t') + \xi_s(t') = \dot{X}_s(t') \tag{6.8}$$

Введем вариации $\tau_{0\alpha}$ и $\tau_{T\alpha}$ абсцисс левого и правого концов по параметрам b_α

$$t_0(b) = t_0 + \sum_{\alpha=1}^{p} b_\alpha \tau_{0\alpha}, \qquad T(b) = T + \sum_{\alpha=1}^{p} b_\alpha \tau_{T\alpha} \tag{6.9}$$

где t_0 и T соответствуют кривой C. Если подставить функции x_s и u_k и величины t_0 и T из равенств (6.2) и (6.9) в краевые условия (1.3), то придем к равенствам

$$\varphi_l = \varphi_l(b, e) = \varphi_l\{x[b, t_0(b)], \ t_0(b), \ x[b, e, T(b)], \ T(b)\} = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p) \tag{6.10}$$

Заметим, что определитель $|\partial\varphi_l / \partial b_\alpha|$ на кривой C отличен от нуля, так как эта кривая считается нормальной. Но тогда уравнения (6.10) имеют решения

$$b_\alpha = B_\alpha(e) \tag{6.11}$$

обращающиеся в нуль при $e = 0$.

Исключив при помощи этих равенств параметры b_α из выражений (6.2), получим однопараметрическое семейство кривых, удовлетворяющих уравнениям (1.1) и (1.2) и концевым условиям (1.3). Это семейство содержит кривую C при $e = 0$. При этом значении $e = 0$ справедливо равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial b_\alpha}\right)_0 B_\alpha'(0) + \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial e}\right)_0 = 0 \tag{6.12}$$

Здесь нижний индекс 0 указывает, что производные вычисляются при $e = 0$

Так как кривая C сообщает минимум функционалу J, производная его по e, $(e>0)$ при $e=0$ не может быть отрицательной. Следовательно, необходимым условием минимума функционала J будет неравенство

$$\left(\frac{dJ}{de}\right)_0=\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{\partial J}{\partial b_\alpha}\right)_0 B_\alpha'(0)+\left(\frac{\partial J}{\partial e}\right)_0\geqslant 0 \tag{6.13}$$

При вычислении входящих в него значений производных подставим функции (6.2) в функционал J, после чего получим

$$J(b,e)=J[x(b,t_0(b)),\ \ t_0(b),\ x(b,e,T(b)),\ T(b)] \tag{6.14}$$

Добавим в правую часть этого выражения тождественно равное нулю слагаемое

$$\int_{t_0}^{T}(L-f_0)\,dt$$

Тогда будем иметь сумму

$$J=g(b,e)+\int_{t_0(b)}^{t'}L[x(b,t),\dot{x}(b,t),u(b,t),\lambda(t),\mu(t),t]\,dt+$$
$$+\int_{t'}^{t'+e}L[X(b,t),\dot{X}(b,t),U(t),\lambda(t),\mu(t),t]\,dt+$$
$$+\int_{t'+e}^{T(b)}L[x(b,e,t),\dot{x}(b,e,t),u(b,t),\lambda(t),\mu(t),t]\,dt \tag{6.15}$$

Продифференцируем ее по b_α

$$\frac{\partial J}{\partial b_\alpha}=\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial g}{\partial x_s(t_0)}-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)_{t_0}\right]\xi_{s\alpha}(t_0)+\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial g}{\partial x_s(T)}+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)_T\right]\xi_{s\alpha}(T)+$$
$$+\frac{dg}{dt_0}\tau_{0\alpha}+\frac{dg}{dT}\tau_{T\alpha}+\sum_{s=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)_{t'+e}\xi_{s\alpha}(t'+e)-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)_{t'}\xi_{s\alpha}(t')\right]+$$
$$+\int_{t_0(b)}^{t'}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial x_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)\right]\xi_{s\alpha}+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial u_\beta}\zeta_{\beta\alpha}\right\}dt+$$
$$+\int_{t'}^{t'+e}\left\{\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial X_s}\frac{\partial X_s}{db_\alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_s}\frac{\partial \dot{X}_s}{\partial b_\alpha}\right\}dt+$$
$$+\int_{t'+e}^{T(b)}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial x_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)\right]\xi_{s\alpha}+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial u_\beta}\zeta_{\beta\alpha}\right\}dt \tag{6.16}$$

При определении значения этой производной при $e=0$ заметим, что при $e=0$ второй интеграл в правой части равенства обращается в нуль. Предполагая выполненными условия стационарности, увидим, что отличными от нуля будут только первые четыре члена суммы (2.16), причем они могут быть преобразованы к виду

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial g}{\partial x_s(t_0)}-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)_{t_0}\right]\xi_{s\alpha}(t_0)+\left[\frac{\partial g}{\partial x_s(T)}+\left(\frac{\partial l}{\partial \dot{x}_s}\right)_T\right]\xi_{s\alpha}(T)\right\}+$$
$$+\frac{dg}{dT}\tau_{T\alpha}+\frac{dg}{dt_0}\tau_{0\alpha}=-\sum_{l=1}^{p}\rho_l\frac{\partial\varphi_l}{\partial b_\alpha} \tag{6.17}$$

так что окончательно будем иметь

$$\left(\frac{\partial J}{\partial b_\alpha}\right)_0+\sum_{l=1}^{p}\rho_l\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial b_\alpha}\right)_0=0 \tag{6.18}$$

Аналогичным способом находится производная

$$\left(\frac{\partial J}{\partial e}\right)_0 = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_s(T)} \xi_s(T) + L(x, \dot{X}, U, \lambda, \mu, t)_{t'} - L(x, \dot{x}, u, \lambda, \mu, t)_{t'} -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)_{t'} \xi_s(t') + \int_{t'+e}^{T(b)} \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial x_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)\right] \xi_s \, dt \qquad (6.19)$$

Последнее слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль в соответствии с условием стационарности, и если учесть, что вариации абсцисс обоих концов семейства равны нулю $\partial t_0 / \partial e = \partial T / \partial e = 0$, то придем к следующему результату:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial e}\right)_0 + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial e}\right)_0 = (E)_{t'} \qquad (6.20)$$

где через E обозначена функция Вейерштрасса нашей задачи

$$E = L(x, \dot{X}, U, \lambda, \mu, t) - L(x, \dot{x}, u, \lambda, \mu, t) - \sum_{s=1}^{n} (\dot{X}_s - \dot{x}_s) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \qquad (6.21)$$

Подставив производные $(\partial J / \partial b_\alpha)_0$ и $(\partial J / \partial e)_0$ в неравенство (6.13) и использовав соотношение (6.12), придем к окончательному результату

$$\left(\frac{\partial J}{\partial e}\right)_0 = (E)_{t'} \geqslant 0 \qquad (6.22)$$

Это неравенство должно выполняться в любой точке t', не совпадающей с угловыми точками кривой C. Однако из соображений непрерывности следует, что оно должно выполняться и в угловых точках.

Поступила 23 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Ч. 1. Автоматика и телемеханика, 1960, XXI, 4, 436—441; ч. II, Автоматика и телемеханика, 1960, XXI, 5, 561—568; ч. III, Автоматика и телемеханика, 1960, XXI, 6, 661—665; ч. IV, Автоматика и телемеханика, 1961, XXII, 4, стр. 425—435.
2. Рулев В. А. О необходимых и достаточных условиях экстремума в вариационных задачах динамики полета летательных аппаратов. Изв. вузов, сер. авиационная техника, 1961, N. 1, стр. 19—26.
3. Miele A. General Variational Theory of the Flight Paths of Rocket Powered Aircraft, Missiles, and Sattelite Carriers. Astronaut. acta, 1958, 4, No 4, 264—288.
4. Leitmann G. On a Class of Variational Problems in Rocket Flight. Journal of aero/space sciences, 1959, 9, 586—591.
5. Розенман Е. А. О предельном быстродействии следящих систем с ограниченным по мощности, моменту и скорости исполнительным элементом. Автоматика и телемеханика, 1958, XIX, 7.
6. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. Усп. матем. наук, 1959, т. XIV, вып. 1 (85), 3—20.
7. Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. Изв. АН СССР, сер. матем., 1960, XXIV, 3, 315—356.
8. Розоноэр А. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. Ч. I, Автоматика и телемеханика, 1959, XX, 10, 1320—1334; ч. II, Автоматика и телемеханика, 1959, XX, 11, 1441—1458; ч. III, Автоматика и телемеханика, 1959, XX, 12, 1561—1578.
9. Исаев В. К. Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет. Автоматика и телемеханика, 1961, XXII, 8, 987—1001.
10. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, 1957, XVIII, 11, 960—970.
11. Беллман Р. Динамическое программирование. ИИЛ, 1960.
12. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941.
13. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. ИИЛ, 1950.
14. Троицкий В. А. Задача Майера—Больца вариационного исчисления и теория оптимальных систем. ПММ, 1961, XXV, 4, 668—679.
15. Троицкий В. А. Задача Лагранжа вариационного исчисления и теория оптимальных систем. Научно-технич. информац. бюллетень Ленинград. политехн. ин-та им. М. И. Калинина, 1961, № 7, 58—64.