Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

А. Анчев
(София)

Достаточные условия устойчивости вращений тяжелого гиростата, движущегося по инерции, и для ряда частных случаев распределения масс гиростата получены В. В. Румянцевым [1].

Ниже указываются некоторые достаточные условия устойчивости перманентных вращений тяжелого гиростата при произвольном распределении масс гиростата и указываются области устойчивости на конусе перманентных осей.

1. Перманентные оси. Пусть гиростат S состоит из твердого тела S_1 с одной неподвижной точкой O и связанных с ним не неизменно других тел S_2. Примем точку O за начало неподвижной прямоугольной системы осей координат $O\xi\eta\zeta$ с вертикально вверх направленной осью ζ и за начало подвижной прямоугольной системы осей координат $Oxyz$, неизменным образом связанной с телом S_1, оси которой совмещены с главными осями инерции гиростата. Необходимо отметить, что, по определению гиростата [2], в результате внутренних движений тел S_2 не изменяются ни положение центра тяжести, ни направления главных осей, ни моменты инерции гиростата, отнесенные к точке O.

Момент количеств движения гиростата $\mathbf{K}$ относительно точки O можно представить в виде геометрической суммы момента количеств движения $\mathbf{K}_1$ относительно O всей системы S, рассматриваемой как твердое тело, и момента количеств движения $\mathbf{K}_2$ относительно O (гиростатический момент) тел S_2, происходящего от их внутренних движений относительно S_1, т. е.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \qquad (K_1 = \{Ap,\ Bq,\ Cr\},\ K_2 = \{a, b, c\})$$

Здесь указаны проекции момента векторов на оси x, y, z, причем A, B, C — главные моменты инерции гиростата, а p, q, r — проекции вектора угловой скорости ω тела S_1 на подвижные оси. Будем предполагать, что проекции гиростатического момента $\mathbf{K}_2$ на те же оси

$$a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \quad c = \text{const} \tag{1.1}$$

Движение тяжелого гиростата с одной неподвижной точкой при условиях (1.1) описывается системой шести уравнений

$$\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr + qc - rb = P\,(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3)\\
&B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp + ra - pc = P\,(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1)\\
&C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq + pb - qa = P\,(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2 \tag{1.3}$$

Здесь P — вес гиростата, x_0, y_0, z_0 — координаты его центра тяжести G, а γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси ζ относительно подвижных осей x, y, z. Уравнения (1.2) и (1.3) допускают три первых интеграла

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = \text{const} \tag{1.4}$$

$$(Ap + a)\gamma_1 + (Bq + b)\gamma_2 + (Cr + c)\gamma_3 = \text{const} \tag{1.5}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{1.6}$$

Рассуждая, как при движении твердого тела с одной неподвижной точкой [2], увидим, что гиростат при условии (1.1) может перманентно вращаться только вокруг постоянной оси (в пространстве и в теле S_1), которая расположена вертикально.

Пусть α, β, γ — направляющие косинусы вертикальной перманентной оси относительно осей x, y, z. Проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ ($\omega = \text{const}$) на те же оси можно написать в виде

$$p = \omega\alpha, \qquad q = \omega\beta, \qquad r = \omega\gamma \tag{1.7}$$

а проекции $\mathbf{K}_1$ в виде

$$A\omega\alpha, \qquad B\omega\beta, \qquad C\omega\gamma \tag{1.8}$$

Если принять во внимание (1.7) и (1.8), уравнения движения (1.2) принимают вид

$$\begin{aligned} (C - B)\,\omega^2\beta\gamma + \omega(\beta c - \gamma b) &= P(z_0\beta - y_0\gamma) \\ (A - C)\,\omega^2\gamma\alpha + \omega(\gamma a - \alpha c) &= P(x_0\gamma - z_0\alpha) \\ (B - A)\,\omega^2\alpha\beta + \omega(\alpha b - \beta a) &= P(y_0\alpha - x_0\beta) \end{aligned} \tag{1.9}$$

а уравнения (1.3) тождественно удовлетворены.

Уравнения (1.9), дающие по величине и по знаку угловую скорость перманентных вращений, совместны, если

$$\frac{\beta c - \gamma b}{(C - B)\beta\gamma} = \frac{\gamma a - \alpha c}{(A - C)\alpha\gamma} = \frac{\alpha b - \beta a}{(B - A)\alpha\beta} = 2m \tag{1.10}$$

$$\frac{z_0\beta - y_0\gamma}{(C - B)\beta\gamma} = \frac{x_0\gamma - z_0\alpha}{(A - C)\alpha\gamma} = \frac{y_0\alpha - x_0\beta}{(B - A)\alpha\beta} = \frac{n}{p} \tag{1.11}$$

Если разделим (1.10) на (1.11), получаем

$$\frac{\beta c - \gamma b}{z_0\beta - y_0\gamma} = \frac{\gamma a - \alpha c}{x_0\gamma - z_0\alpha} = \frac{\alpha b - \beta a}{y_0\alpha - x_0\beta} = \frac{2mp}{n} \tag{1.12}$$

следовательно, векторы $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{K}_2$ и OG должны быть компланарными, т. е.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.13}$$

Ниже будем предполагать, что условие (1.13) выполнено.

Уравнения (1.9) можно записать в виде

$$\omega^2 + 2m\omega - n = 0 \tag{1.14}$$

Если уравнения (1.9) умножить соответственно на x_0, y_0, z_0 и сложить, то, учитывая (1.13), получаем уравнение

$$(C - B)x_0\beta\gamma + (A - C)y_0\gamma\alpha + (B - A)z_0\alpha\beta = 0 \tag{1.15}$$

являющееся геометрическим местом вертикальных перманентных осей.

Как известно [4], уравнение (1.15) — конус второго порядка в текущих координатах α, β, γ. Конус (1.15) имеет для образующих главные оси инерции x, y, z, а также прямые, проходящие через вершину O конуса и точки $G(x_0, y_0, z_0)$ и $F(x_0/A, y_0/B, z_0/C)$. Эти пять прямых вполне определяют конус.

Если с центром O провести сферу единичного радиуса [3] (фигура), то геометрическое место точек пересечения образующих конуса со сферой представится в виде двух замкнутых ветвей некоторой сферической кривой. Пусть x, y, z, g, f — точки пересечения образующих Ox, Oy, Oz, OG и OF конуса со сферой, а $-x$, $-y$, $-z$, $-g$, $-f$ — диаметрально противоположные им. Одна ветвь сферической кривой проходит через точки x, g, f, z, $-y$, а другая — через точки $-x$, $-g$, $-f$, $-z$, y.

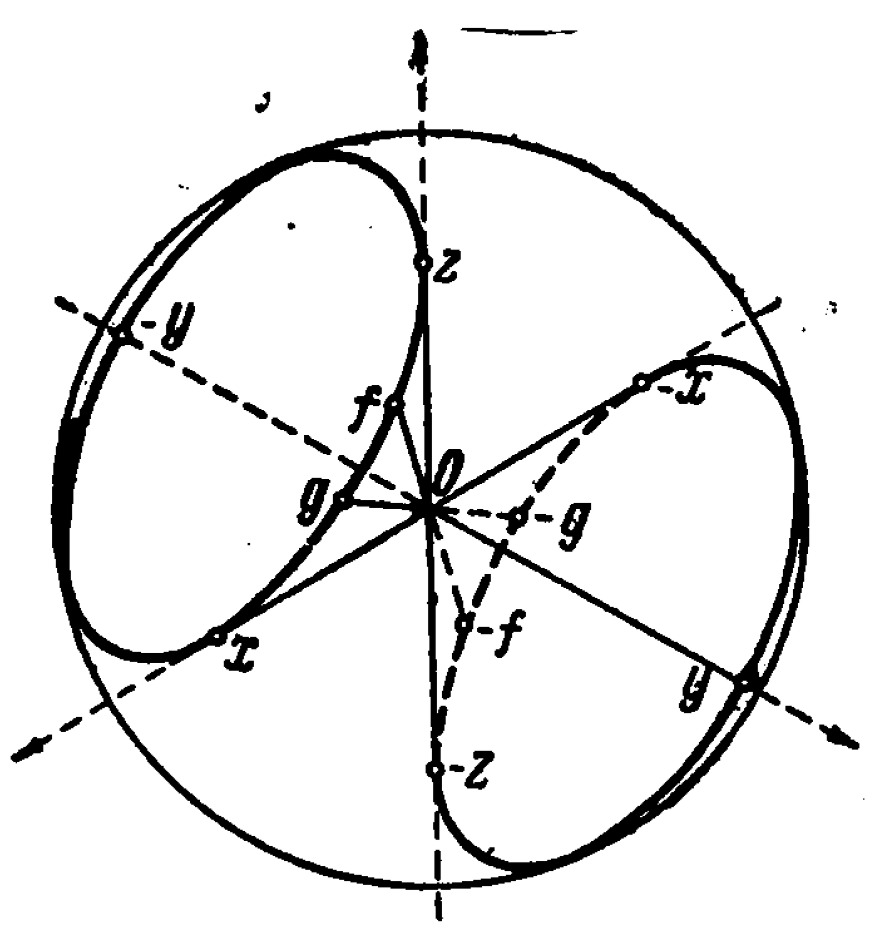
Полуобразующая конуса (1.15), данная через α, β, γ, при помощи которой можно определить угловую скорость ω из (1.14), может быть перманентной осью. Будем называть ее допускаемой полуобразующей.

Предположим, что

$$A > B > C, \qquad x_0 > 0, \qquad y_0 > 0, \qquad z_0 > 0 \tag{1.16}$$

$$\alpha \neq 0, \qquad \beta \neq 0, \qquad \gamma \neq 0 \tag{1.17}$$

Для полуобразующих, проходящих через точки дуг $(x, -y)$, (z, g) первой ветви и через точки дуг $(y, -z)$ и $(-g, -x)$ другой ветви сферической кривой, имеем $n > 0$; следовательно, они являются допускаемыми, каким бы ни было m, определенное из (1.12). Полуобразующие, проходящие через точки дуг $(-y, z)$, (g, x), $(-z, -g)$ и $(-x, y)$, при $m = 0$ не могут быть перманентными осями, так как $n < 0$, а при $m \neq 0$ они допускаемые, если



$$m^2 + n > 0$$

Рассмотрим случай, когда перманентной осью является любая из главных осей инерции гиростата, например ось x. В таком случае

$$\alpha = 1, \qquad \beta = \gamma = 0 \tag{1.18}$$

Из (1.13) следует, что

$$\frac{b}{y_0} = \frac{c}{z_0} \tag{1.19}$$

а из (1.9) находим угловую скорость перманентного вращения

$$\omega = \frac{Pz_0}{c} = \frac{Py_0}{b} \tag{1.20}$$

Следует отметить, что вообще

$$\frac{x_0}{a} \neq \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} \tag{1.21}$$

Если гиростатический момент коллинеарен вектору OG, т. е.

$$\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} \tag{1.22}$$

то перманентные вращения вокруг каждой из главных осей инерции имеют одну и ту же угловую скорость

$$\omega = \frac{Px_0}{a} = \frac{Py_0}{b} = \frac{Pz_0}{c} \tag{1.23}$$

2. Устойчивость перманентных вращений. Пусть α, β, γ при условиях (1.17) определяют какую-нибудь из допускаемых полуобразующих конуса (1.15), которая может быть перманентной осью вращений гиростата, т. е. она расположена вертикально. Постоянную угловую скорость с проекциями

$$p_0 = \alpha\omega, \qquad q_0 = \beta\omega, \qquad r_0 = \gamma\omega \tag{2.1}$$

находим из (1.14).

Устойчивость перманентных вращений гиростата исследуем по отношению к переменным $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Полагая в уравнениях (1.2) и (1.3)

$$\begin{gathered} p = p_0 + \xi_1, \qquad q = q_0 + \xi_2, \qquad r = r_0 + \xi_3 \\ \gamma_1 = \alpha + \eta_1, \qquad \gamma_2 = \beta + \eta_2, \qquad \gamma_3 = \gamma + \eta_3 \end{gathered} \tag{2.2}$$

и учитывая (1.9) и (2.1), получаем уравнения возмущенного движения гиростата, которые допускают следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} V_1 &= A(\xi_1^2 + 2p_0\xi_1) + B(\xi_2^2 + 2q_0\xi_2) + C(\xi_3^2 + 2r_0\xi_3) + \\ &\quad + 2P(x_0\eta_1 + y_0\eta_2 + z_0\eta_3) = \text{const} \\ V_2 &= A(p_0\eta_1 + \alpha\xi_1 + \xi_1\eta_1) + B(q_0\eta_2 + \beta\xi_2 + \xi_2\eta_2) + \\ &\quad + C(r_0\eta_3 + \gamma\xi_3 + \xi_3\eta_3) + a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3 = \text{const} \\ V_3 &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Построим функцию Ляпунова в виде

$$\begin{aligned} V = V_1 - 2\omega V_2 + \lambda V_3 &= A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 - 2A\omega\xi_1\eta_1 - \\ &- 2B\omega\xi_2\eta_2 - 2C\omega\xi_3\eta_3 + \lambda\eta_1^2 + \lambda\eta_2^2 + \lambda\eta_3^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где постоянная λ в силу уравнений (1.9) равна

$$\lambda = A\omega^2 + \frac{a\omega - Px_0}{\alpha} = B\omega^2 + \frac{b\omega - Py_0}{\beta} = C\omega^2 + \frac{c\omega - Pz_0}{\gamma} \tag{2.5}$$

Необходимыми и достаточными условиями положительной знакоопределенности функции V согласно критерию Сильвестра будут неравенства

$$\begin{gathered} A > 0, \qquad AB > 0, \qquad ABC > 0, \qquad \lambda - A\omega^2 > 0 \\ (\lambda - A\omega^2)(\lambda - B\omega^2) > 0, \qquad (\lambda - A\omega^2)(\lambda - B\omega^2)(\lambda - C\omega^2) > 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Первые три всегда выполнены, а три последние выполнены, если

$$\lambda - A\omega^2 > 0, \qquad \lambda - B\omega^2 > 0, \qquad \lambda - C\omega^2 > 0 \tag{2.7}$$

Подставив λ из (2.5) в (2.7), найдем

$$\frac{a\omega - Px_0}{\alpha} > 0, \qquad \frac{b\omega - Py_0}{\beta} > 0, \qquad \frac{c\omega - Pz_0}{\gamma} > 0 \tag{2.8}$$

Так как V при условиях (2.8) является знакоопределенным интегралом возмущенного движения гиростата, то по теореме Ляпунова (2.8) будут достаточными условиями устойчивости перманентных вращений гиростата.

Если гиростатический момент коллинеарен вектору ω, т. е.

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \mu\omega \tag{2.9}$$

согласно (1.10) имеем $m = 0$. В таком случае допускаемыми перманентными осями будут только полуобразующие конуса (1.15), определяемые дугами $(x, -y)$, (z, g), $(y, -z)$ и $(-g, -x)$. При учете условий (2.9) достаточные условия устойчивости (2.8) в рассмотренном случае можно написать в виде

$$\mu - \frac{Px_0}{\alpha\omega^2} > 0, \qquad \mu - \frac{Py_0}{\beta\omega^2} > 0, \qquad \mu - \frac{Pz_0}{\gamma\omega^2} > 0 \tag{2.10}$$

Если $\mu > 0$, из (2.10) следует, что перманентные вращения гиростата устойчивы для каждой оси соответствующей полуобразующей конуса, проходящей через точки дуги $(-g, -x)$. Для перманентных осей, определяемых другими допускаемыми в случае дугами, достаточные условия (2.10) выполнены, если μ достаточно большое. Например, для дуги $(x, -y)$ достаточным условием устойчивости является

$$\mu > \frac{Px_0}{\alpha\omega^2} \tag{2.11}$$

Если $\mu < 0$, достаточные условия могут быть выполнены лишь для точек дуги $(-g, -x)$, как только

$$|\mu| < \left|\frac{Px_0}{\alpha\omega^2}\right|, \qquad |\mu| < \left|\frac{Py_0}{\beta\omega^2}\right|, \qquad |\mu| < \left|\frac{Pz_0}{\gamma\omega^2}\right| \tag{2.12}$$

Если перманентная ось проходит через центр тяжести, т. е.

$$\frac{x_0}{\alpha} = \frac{y_0}{\beta} = \frac{z_0}{\gamma} \tag{2.13}$$

то из (1.11) получаем $n = 0$ и для перманентных вращений вокруг этой оси получаем из (1.14) $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = -2m$.

Для перманентных осей, совпадающих с полуобразующей через g, имеем $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и достаточные условия устойчивости будут

$$a\omega - Px_0 > 0, \qquad b\omega - Py_0 > 0, \qquad c\omega - Pz_0 > 0 \tag{2.14}$$

которые при $\omega = 0$ не могут быть выполнены.

Для перманентных осей, определяемых через $-g$, имеем $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$ и получаем из (2.8) достаточные условия устойчивости

$$a\omega - Px_0 < 0, \qquad b\omega - Py_0 < 0, \qquad c\omega - Pz_0 < 0 \tag{2.15}$$

Из (2.15) легко видеть, что равновесие гиростата устойчиво в этом случае.

3. Устойчивость перманентных вращений гиростата вокруг главных осей инерции. Пусть перманентной осью является главная ось инерции x. В таком случае имеем частное решение

$$p_0 = \omega = \frac{Py_0}{b} = \frac{Pz_0}{c}, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0 \tag{3.1}$$

Полагая в уравнениях движения (1.2) и (1.3)

$$p = \omega + \xi_1, \quad q = \xi_2, \quad r = \xi_3, \quad \gamma_1 = 1 + \eta_1, \quad \gamma_2 = \eta_2, \gamma_3 = \eta_3 \tag{3.2}$$

и учитывая (1.9) и (3.1), получаем уравнения возмущенного движения, которые допускают следующие первые интегралы:

$$V_1 = A(\xi_1^2 + 2\omega\xi_1) + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 + 2P(x_0\eta_1 + y_0\eta_2 + z_0\eta_3) = \mathrm{const}$$

$$V_2 = A(\omega\eta_1 + \xi_1 + \xi_1\eta_1) + B\xi_2\eta_2 + C\xi_3\eta_3 + a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3 = \mathrm{const}$$

$$V_3 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2\eta_1 = 0 \tag{3.3}$$

Функцию Ляпунова построим в виде [5]

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + \lambda V_3 = A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 - 2A\omega\xi_1\eta_1 - \\ - 2B\omega\xi_2\eta_2 - 2C\omega\xi_3\eta_3 + \lambda\eta_1^2 + \lambda\eta_2^2 + \lambda\eta_3^2 \tag{3.4}$$

где постоянная λ равна

$$\lambda = A\omega^2 + a\omega - Px_0 \tag{3.5}$$

Необходимыми и достаточными условиями положительной знакоопределенности функции V являются неравенства (2.7), которые являются также достаточными условиями устойчивости перманентных вращений вокруг оси x. Пусть

$$A > B, \qquad A > C \tag{3.6}$$

Учитывая (3.5) и (3.6), имеем достаточные условия

$$a\omega - Px_0 > 0 \tag{3.7}$$

Если

$$B > A > C \quad \text{или} \quad B > C > A \tag{3.8}$$

достаточные условия устойчивости имеют вид

$$a\omega - Px_0 > (B - A)\,\omega^2 \tag{3.9}$$

В предыдущих параграфах получены достаточные условия устойчивости перманентных вращений тяжелого гиростата с одной неподвижной точкой вокруг главных осей инерции, в случае, когда проекции гиростатического момента и радиус - вектора центра тяжести гиростата на две оси пропорциональны между собой. Эти условия непригодны в случае, когда гиростатический момент проходит через центр тяжести гиростата.

Ниже указываются достаточные условия устойчивости перманентных вращений гиростата в этом случае[1].

4. Если гиростатический момент проходит через центр тяжести гиростата, как известно [6], перманентные вращения вокруг главных осей инерции имеют одну и ту же угловую скорость.

Рассмотрим перманентные вращения гиростата вокруг оси x, т. е. следующее частное решение уравнения движения гиростата (1.1) и (1.2)

$$p_0 = \omega = \frac{Px_0}{a} = \frac{Py_0}{b} = \frac{Pz_0}{c}, \qquad q_0 = 0, \quad r_0 = 0$$

$$\gamma_{01} = 1, \qquad \gamma_{02} = 0, \qquad \gamma_{03} = 0 \tag{4.1}$$

Полагая в уравнениях (1.1) и (1.2)

$$p = \omega + \xi_1, \quad q = \xi_2, \quad r = \xi_3, \quad \gamma_1 = 1 + \eta_1, \quad \gamma_2 = \eta_2, \quad \gamma_3 = \eta_3$$

---

[1] § 4 подверстан при корректуре 18 X 1961.

и учитывая (4.1), получаем уравнения возмущенного движения гиростата, которые допускают следующие первые интегралы:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= A(\xi_1^2 + 2\omega\xi_1) + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 + 2P(x_0\eta_1 + y_0\eta_2 + z_0\eta_3) = \text{const} \\
V_2 &= A(\omega\eta_1 + \xi_1 + \xi_1\eta_1) + B\xi_2\eta_2 + C\xi_3\eta_3 + a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3 = \text{const} \qquad (4.2) \\
V_3 &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2\eta_1 = 0
\end{aligned}
$$

Функцию Ляпунова построим в виде [3]

$$
\begin{gathered}
V = V_1 - 2\omega V_2 + A\omega^2 V_3 + \tfrac{1}{4}V_3^2 = A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 - 2A\omega\xi_1\eta_1 - \\
- 2B\omega\xi_2\eta_2 - 2C\omega\xi_3\eta_3 + (A\omega^2+1)\eta_1^2 + A\omega^2\eta_2^2 + A\omega^2\eta_3^2 + \tfrac{1}{4}f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \quad (4.3)
\end{gathered}
$$

где

$$
f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 4\eta_1)
$$

Функция V будет определенно положительной функцией переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3, если таковой будет квадратичная часть функции V. Согласно критерию Сильвестра необходимыми и достаточными условиями положительной знакоопределенности последней будут неравенства

$$
A - B > 0, \qquad (A - B)(A - C) > 0 \qquad (4.4)
$$

Если ось x является осью максимального момента инерции, функция V будет знакоопределенным интегралом уравнений возмущенного движения тяжелого гиростата и, по теореме Ляпунова об устойчивости перманентные вращения вокруг оси x будут устойчивыми.

Поступила 1 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гиростатов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
2. Леви-Чивита и Амальди. Курс теоретической механики. Т. II, ч. 2, ИИЛ, 1951.
3. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. XX, вып. 1.
4. Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1894, Bd. 113.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
6. Дрофа В. Н. О перманентных осях движения тяжелого гиростата около неподвижной точки. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5