

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. Ф. Баклановская

(Москва)

Задачи нестационарной фильтрации жидкости и газа в пористой среде приводятся [1] к нелинейному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2} \quad (\varphi(u) \geq 0, \varphi'(u) \geq 0, u \geq 0) \quad (0.1)$$

В частности, для изотермического движения газа и движений грунтовых вод получается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} \quad \left(a = \frac{k}{2m\mu} \right) \quad (0.2)$$

Здесь $u(x, t)$ — плотность газа или напор грунтовых вод, m — пористость грунта, k — проницаемость пористой среды, μ — вязкость газа.

Представляют интерес такие краевые задачи, в которых на границе пласта заданы плотность или давление газа, или напор грунтовых вод. Это приводит к краевым условиям вида

$$u(0, t) = F(t)$$

Если на границах задан поток газа или грунтовых вод, то получаются граничные условия вида

$$\frac{\partial \varphi(0, t)}{\partial x} = F_1(t), \quad \frac{\partial \varphi(l, t)}{\partial x} = F_2(t)$$

По смыслу задачи $F(t) \geq 0$, $F_1(t) \leq 0$, $F_2(t) \geq 0$. Производная $\partial \varphi(u) / \partial x$ (поток газа) представляет собой непрерывную функцию. Исследованию уравнений (0.1), (0.2) посвящены работы [2-4]. Вопросы численного решения уравнений вида (0.1), когда начальная и граничная функции строго положительны, рассмотрены в работах [5-7]. В предлагаемой заметке приведены результаты расчетов некоторых конкретных задач, выполненных в Вычислительном центре АН СССР на машине БЭСМ-2.

§ 1. Порядок уравнения (0.1) зависит от значений функции $u(x, t)$: при $u > 0$ — это параболическое уравнение второго порядка, при $u = 0$ оно вырождается в уравнение первого порядка. В работе [2] построены автомодельные решения уравнения (0.1), имеющие точки излома с абсциссами, зависящими от времени, в которых $\partial u / \partial x$ имеет конечный или бесконечный скачок. Поэтому функция $u(x, t)$ не имеет в этих точках предписываемой уравнением гладкости и фактически будет обобщенным решением. Именно наличие точки излома создает основные трудности численного решения задачи и обоснования возможности применения тех или иных численных методов. Разностные схемы, составленные без учета этой особенности решения, в некоторых случаях могут дать качественно неверный результат. Существование и единственность решения уравнения (0.1) в случае вырождения исследованы в [3]. В работах [8-10] рассмотрены вопросы обоснования и методов численного нахождения обобщенного решения уравнения (0.1). Изучены задача Коши, первая и вторая краевые задачи при $0 \leq x < \infty$ и $0 \leq x \leq l$. Анализ показывает, что для численного решения (0.1) удобно применять «явную» схему, т. е. заменять (0.1) следующим разностным аналогом

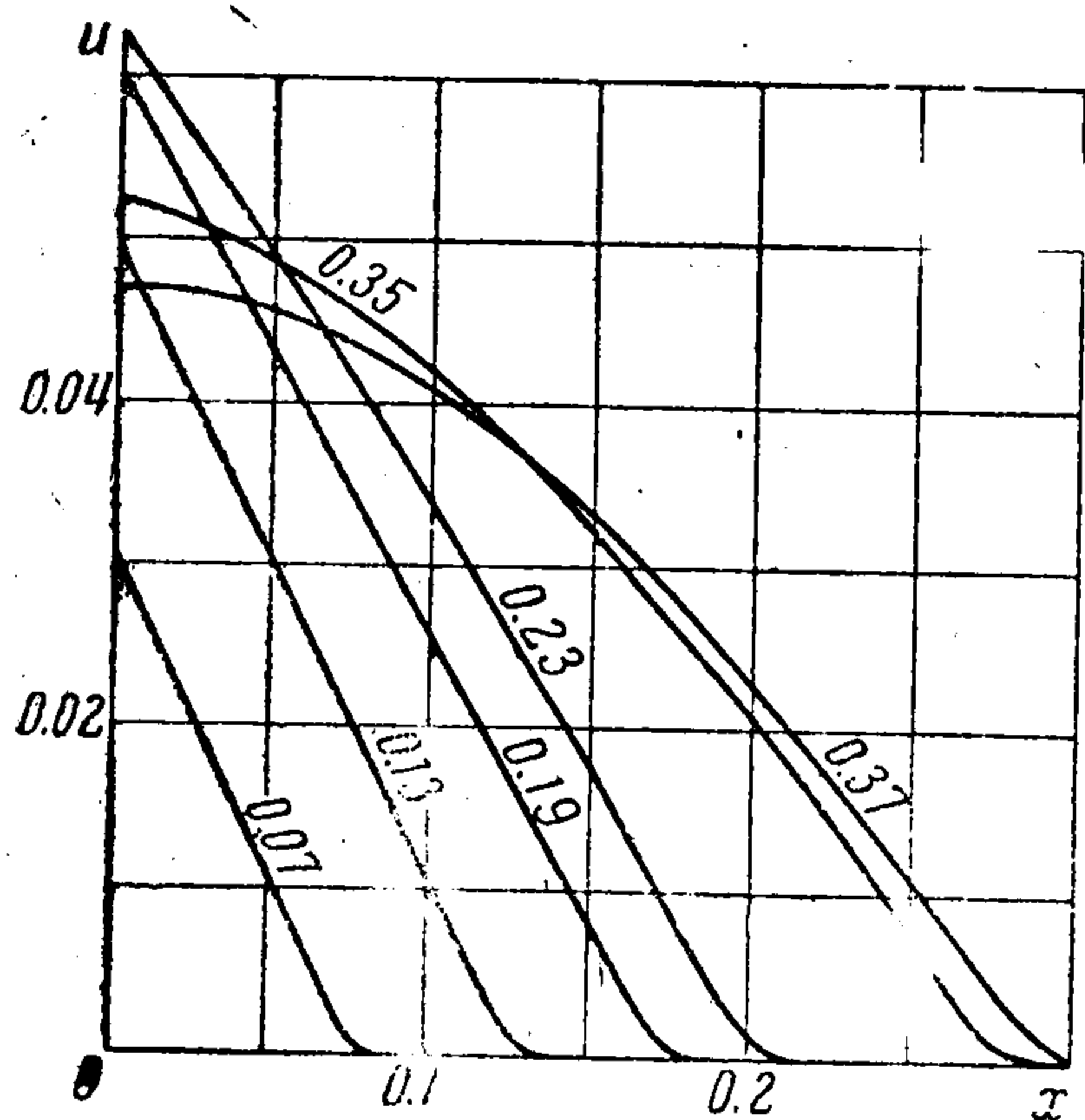
$$u_{ik+1} = u_{ik} + \frac{\tau}{h^2} [\varphi(u_{i+1k}) - 2\varphi(u_{ik}) + \varphi(u_{i-1k})] \quad (1.1)$$

где h, τ — соответственно шаги по пространственной и временной координатам. Полученное из (1.1) приближенное решение обладает основными свойствами точного: оно неотрицательно, ограничено (а именно, не превосходит максимального значения начальной и граничной функций); приближается к точному решению при неограниченном измельчении шага.

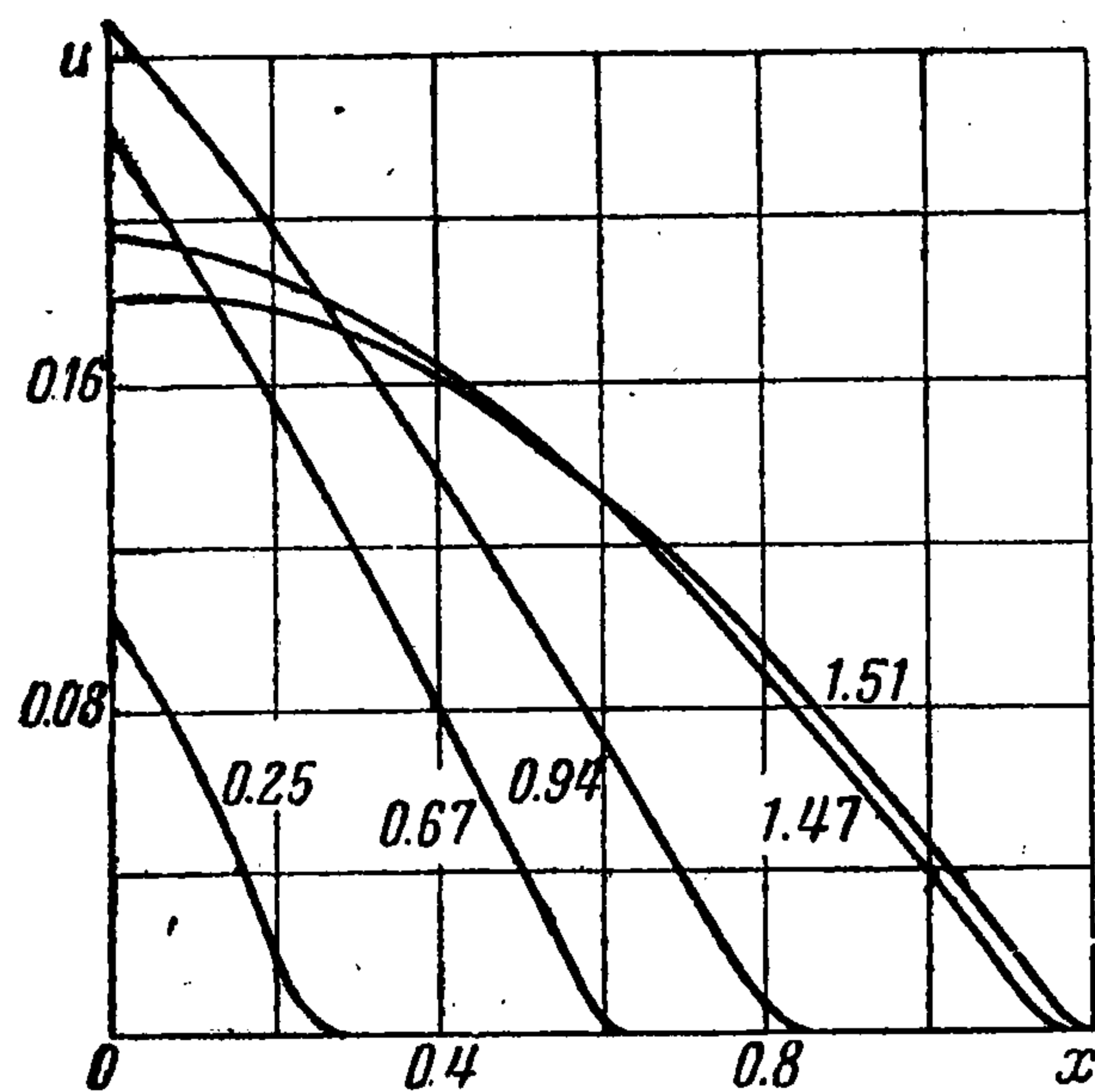
§ 2. Рассматривается задача фильтрации грунтовых вод в полубесконечный пласт: $0 \leq x < \infty$. Распределение напоров удовлетворяет уравнению (0.2). Начальное и граничное условия имеют вид

$$u|_{t=0} \equiv 0, \quad u|_{x=0} = at - bt^2 \quad (a > 0, b > 0) \quad (2.1)$$

Граничное условие соответствует напору на границе, меняющемуся немонотонно: сначала напор возрастает, потом убывает. При этом жидкость сначала поступает в пласт, а затем начинает вытекать из пласта. Представляет интерес определение момента времени t_0 , когда жидкость начинает вытекать из пласта, т. е. когда производная du^2/dx при $x=0$ обращается в нуль. Расчет производился по разностной схеме (1.1). На фиг. 1, 2 приведены графики решения задачи с крайними условиями вида (2.1) при $a=1/2, b=1$ и $a=1/2, b=1/4$ в различные моменты времени t . (Момент t указан сбоку от графика каждой кривой). В таблице приведены



Фиг. 1



Фиг. 2

значения решения задачи (0.2) — (2.1) при $a=1/2, b=1/4$. Из графиков видно, что момент t_0 равен соответственно 0.37 и 1.47 для случаев $a=1/2, b=1$ и $a=1/2, b=1/4$. Момент t_1 , когда u при $x=0$ достигает максимума, равен соответственно 0.25 и 1.00. Ясно, что в обоих случаях $t_0 > t_1$.

§ 3. В задаче об изотермической фильтрации газа в полубесконечный пласт ($0 \leq x < \infty$), когда давление газа на границе таково, что при $t \rightarrow \infty$ решение выходит на автомоделный режим, представляет интерес провести расчеты с целью анализа скорости выхода на автомоделный режим.

Пусть начальная и граничная функции имеют следующий вид:

$$u|_{t=0} \equiv 0, \quad u|_{x=0} = \sigma t^p + \sigma_1(t) \geq 0 \quad (3.1)$$

Здесь $\sigma_1(t)$ такова, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_1(t) / t^p = 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

В работе [2] показано, что при $\sigma_1(t) \equiv 0$ решение задачи (0.2)—(3.1) автомоделно, т. е.

$$u(x, t) = \sigma t^p f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\sigma t^{p+1}}}$$

Существует точка ξ_0 такая, что

$$f(\xi) > 0 \quad \text{при } \xi < \xi_0, \quad f(\xi) \equiv 0 \quad \text{при } \xi \geq \xi_0$$

соответственно

$$u(x, t) > 0 \quad \text{при } x > \xi_0 \sqrt{\sigma t^{p+1}}, \quad u \equiv 0 \quad \text{при } x \geq \xi_0 \sqrt{\sigma t^{p+1}}$$

Таблица значений $u(x, t) \cdot 10^4$

$x \backslash t$	0.077	0.157	0.250	0.447	0.668	0.936	1.19	1.41	1.46	1.48	1.53
0.000	370	724	1094	1736	2225	2490	2410	2073	1958	1904	1803
0.025	248	608	983	1637	2142	2427	2372	2064	1958	1908	1814
0.050	126	490	871	1537	2057	2364	2333	2053	1955	1908	1821
0.075	23	373	759	1437	1971	2299	2292	2039	1948	1905	1824
0.100		254	646	1336	1885	2233	2249	2022	1938	1889	1824
0.125		136	533	1234	1798	2166	2205	2003	1926	1889	1820
0.150		29	419	1132	1710	2098	2160	1981	1911	1877	1813
0.175		1	305	1029	1622	2029	2113	1957	1893	1862	1803
0.200			190	926	1532	1956	2064	1932	1873	1845	1790
0.225			73	822	1442	1888	2014	1904	1851	1825	1775
0.250			6	717	1352	1816	1963	1874	1826	1803	1758
0.275				612	1260	1744	1911	1842	1800	1779	1738
0.300				506	1168	1670	1857	1808	1771	1752	1715
0.325				400	1075	1595	1802	1773	1741	1724	1691
0.350				203	982	1520	1746	1736	1709	1694	1665
0.375				186	888	1443	1668	1697	1675	1662	1637
0.400				77	793	1366	1630	1657	1639	1629	1607
0.425				7	697	1288	1570	1615	1602	1593	1575
0.450					601	1209	1509	1572	1563	1556	1541
0.475					505	1129	1447	1527	1522	1518	1506
0.500					407	1049	1384	1481	1481	1478	1469
0.525					309	967	1320	1434	1437	1436	1431
0.550					210	885	1255	1386	1393	1393	1391
0.575					111	802	1189	1336	1347	1349	1349
0.600					22	719	1122	1285	1299	1303	1307
0.625						634	1054	1232	1251	1256	1263
0.650						549	986	1179	1201	1208	1217
0.675						463	916	1124	1150	1159	1171
0.700						377	845	1068	1098	1108	1123
0.725						289	774	1012	1044	1056	1074
0.750						201	701	954	990	1003	1023
0.775						112	628	895	934	949	972
0.800						28	554	835	878	894	919
0.825						1	479	774	820	838	866
0.850							403	712	761	780	811
0.875							326	649	702	722	755
0.900							249	585	641	663	698
0.925							171	520	579	602	640
0.950							91	454	517	541	581
0.975							20	388	453	479	521
1.000							0	320	389	416	460
1.025								252	323	352	399
1.050								182	257	287	336
1.075								112	190	221	272
1.100								41	122	154	208
1.125								3	52	86	142
1.150									5	22	76
1.175											16
1.200											0

С течением времени точка $x_0 = \xi_0 \sqrt{\sigma t^{p+1}}$ отодвигается вправо по оси абсцисс и сосчитать практически решение при достаточно больших t около $x_0(t)$ становится затруднительным. Так как при $t \rightarrow \infty$ решение задачи (0.2)—(3.1) выходит на авто-модельный режим [9], т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{t^p} = \sigma f(\xi) \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

то имеет смысл перейти к подвижным «автомодельным» координатам, в которых решение при достаточно больших t практически не меняется. Именно, удобно сделать следующую замену переменных:

$$\rho = \frac{u}{(t+1)^p}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\sigma(t+1)^p}}, \quad \eta = \ln(t+1) \quad (3.2)$$

При такой замене

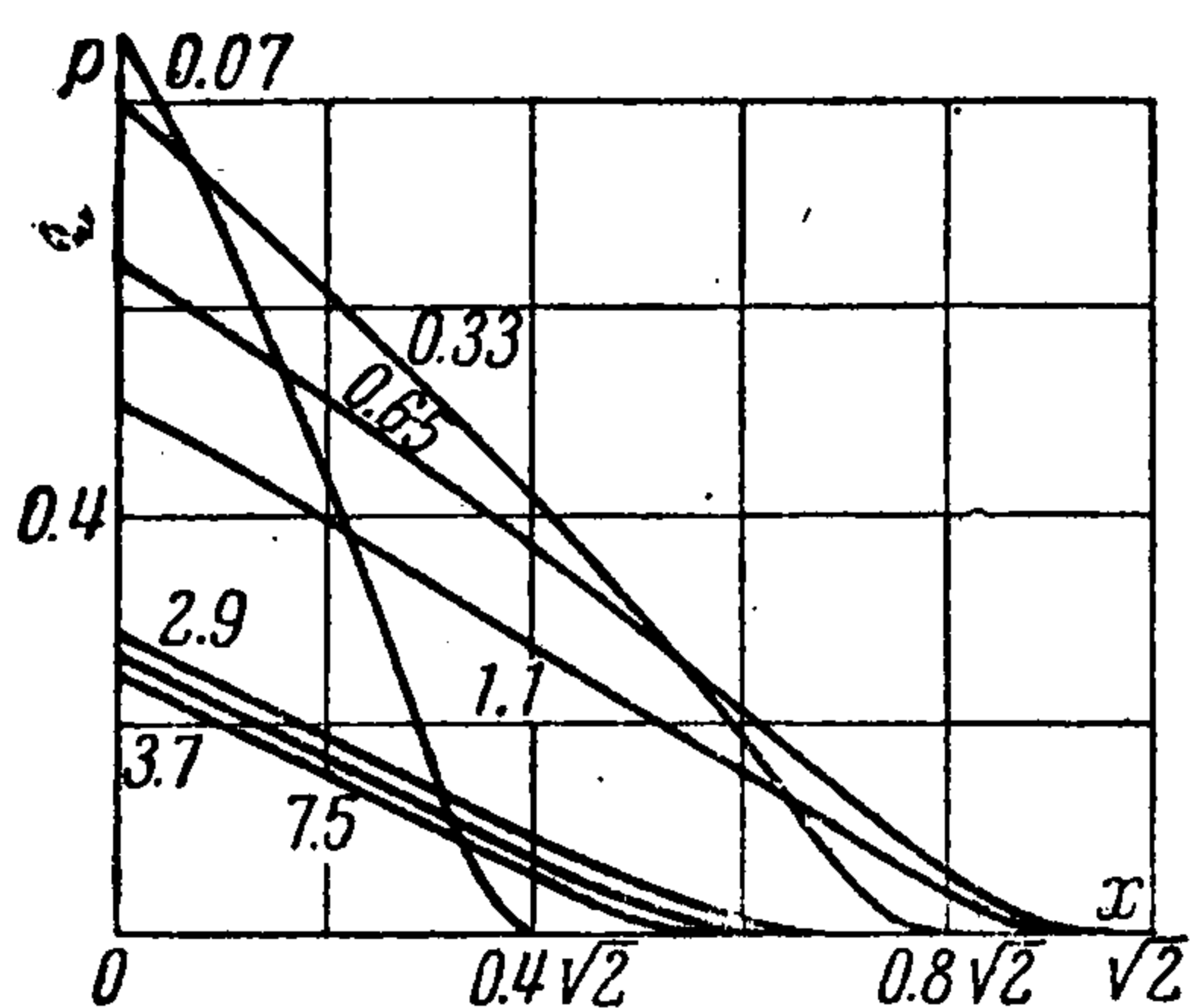
$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \rho(\xi, \eta) = f(\xi) \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

что очень удобно для практических расчетов при больших t . Из формул (3.2) видно, что $t = e^\eta - 1$, т. е. при сравнительно небольших η время t уже велико. (Сдвиг по оси t в формулах (3.2) сделан для удобства практического счета около точки $t = 0$.) При замене переменных (3.2) задача (0.2)–(3.1) преобразуется в краевую задачу

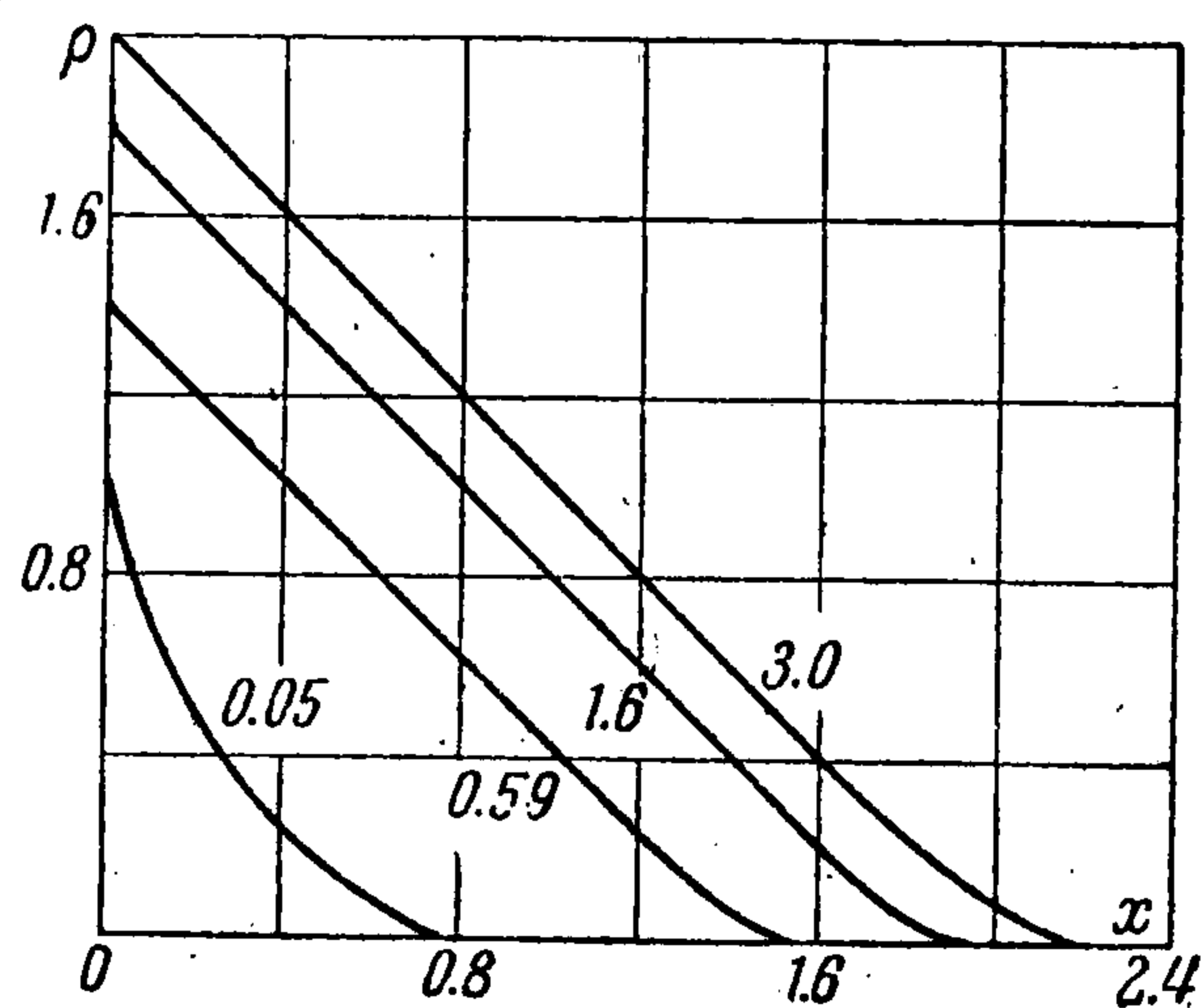
$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \xi^2} + \frac{p+1}{2} \xi \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - p\rho \quad (0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta < \infty, \rho \geq 0) \quad (3.3)$$

$$\rho \equiv 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \rho = \sigma(1 - e^{-\eta})^p + \sigma_1(t(\eta))e^{-\eta p} \quad \text{при } \xi = 0 \quad (3.4)$$

Здесь производная $\partial \rho / \partial \xi$ не является непрерывной, что создает дополнительные трудности для аппроксимации ее конечной разностью. Во-первых, погрешность аппроксимации при замене $\partial \rho / \partial \xi$ конечной разностью в точке, где $\partial \rho / \partial \xi$ терпит разрыв, не стремится к нулю при неограниченном измельчении шага. Требуются дополнительные рассуждения (см., например, [9]) для доказательства сходимости разностного решения к точному. Кроме того, расчеты показали, что производную $\partial \rho / \partial \xi$ нельзя аппроксимировать, например, центральной разностью, так как при этом явная схема становится неустойчивой (начиная с достаточно малых ρ_{ik} , т. е. вблизи точки разрыва ξ_0 , график решения колеблется около оси абсцисс и очень быстро «разбалтывается»). Далее неявная схема устойчива, но полученное приближенное решение колеблется около оси абсцисс, принимая отрицательные значения, что качественно искажает решение.



Фиг. 3



Фиг. 4

В [9] предлагаются два способа аппроксимации $\partial \rho / \partial \xi$.

Первый состоит в том, что $\partial \rho / \partial \xi$ заменяется правой боковой разностью, так что разностное решение ρ_{ik} определяется по формуле

$$\rho_{ik+1} = \rho_{ik} (1 - p\tau) + i\tau (\rho_{i+1k} - \rho_{ik}) \frac{p+1}{2} + \frac{\tau}{h^2} (\rho_{i+1k}^2 - 2\rho_{ik}^2 + \rho_{i-1k}^2)$$

$$\rho_{i0} \equiv 0, \quad \rho_{0k} = \sigma(1 - e^{-k\tau})^p + \sigma_1(t(k\tau))e^{-kp\tau} \quad (3.5)$$

Решение (3.5) устойчиво, оно сходится к точному при $h \rightarrow 0$, если шаг по времени τ удовлетворяет условию $\tau \leq Ah^2$, где A — определенная константа.

Второй способ замены уравнения (3.3) разностным состоит в том, что (3.3) приводится к виду

$$\frac{\partial p}{\partial L} = \frac{\partial^2 p^2}{\partial \xi^2} - p p \quad \left(\frac{\partial p}{\partial L} = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p+1}{2} \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) \quad (3.6)$$

и выражение $\partial p / \partial L$ аппроксимируется кривой разностью.

Уравнение (3.6) можно решать по схеме, аналогичной (1.1), с той лишь разницей, что соответствие между точками решения при $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_1 + \tau$ берется в направлении L , зависящем от ξ

$$\operatorname{tg}(L, \xi) = \frac{-2}{(p+1)\xi^2}$$

Такое «скошенное» сопоставление точек решения при $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_1 + \tau$ соответствует прямому в первоначальной системе координат. При $\xi = 0$ угол (L, ξ) равен $\pi/2$, так что граничное условие передается точно. Разностная схема имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} p_{ik+1} = & [p_{i+\gamma+1,k} \alpha + p_{i+\gamma,k} (1-\alpha)] (1-p\tau) + \\ & + \frac{\tau}{h^2} [\alpha (p_{i+\gamma+2,k}^2 - 2p_{i+\gamma+1,k}^2 + p_{i+\gamma,k}^2) + (1-\alpha)(p_{i+\gamma+1,k}^2 - 2p_{i+\gamma,k}^2 + p_{i+\gamma-1,k}^2)] \\ & \gamma = \left[\frac{p+1}{2} i \tau \right], \quad \alpha = \left\{ \frac{p+1}{2} i \tau \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Полученное по (3.5) и (3.7) разностное решение ограничено, неотрицательно, имеет конечное число участков монотонности при фиксированном k и конечную скорость распространения возмущений.

В работе [9] показано, что порядок погрешности для (3.5) равен $O(\sqrt{h})$. Легко видеть, что порядок погрешности (3.7) меньше, так как здесь отсутствует член $\partial p / \partial \xi$. На фиг. 3, 4 приведены графики расчетов задачи (0.2) — (3.1) при $\sigma_1 = 1$, $\sigma = 1/4, 2$, $p = 1$. Как видно, происходит быстрый переход от одного к другому автомобильному решению.

Поступила 13 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. ГИТТЛ, 1952.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 1.
3. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь. Уравнения типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, т. XXII, № 5.
4. Зельдович Я. Б., Компаниец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб., посв. 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950.
5. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. М., ИИЛ, 1960.
6. Вгусе G. H., Реасеман D. W., Раачфорд H. H., Рисе J. D. Calculation of unsteady — state gas flow through porous media. Trans. Amer. Inst. Mining and Met. Engrs., 1953, 198, 79.
7. Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения. Тр. Всесоюзного совещания по дифференциальным уравнениям. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960.
8. Баклановская В. Ф. Численное решение одномерной задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1961, т. I, № 3.
9. Баклановская В. Ф. Численное решение одной задачи нестационарной фильтрации. Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1961, т. I, № 1.
10. Баклановская В. Ф. Численное решение второй краевой задачи для одномерного уравнения нестационарной фильтрации. Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1961, т. I, № 6.