Изучаемое стационарное движение удовлетворяет условию

$$(\partial\Phi / \partial\theta)_0 = 0 \tag{12}$$

Если постоянные k, r_0 не возмущаются, то согласно теореме Рауса движение (5) будет устойчивым по отношению к θ, $\dot{\theta}$, если для невозмущенного движения функция $\Phi(\theta)$ имеет минимум, т. е.

$$(\partial^2\Phi / \partial\theta^2)_0 > 0 \tag{13}$$

Условию (13) при помощи (12) можно придать вид

$$C^2\omega^2 \sin^2\theta_0 + [(A + B_1)\sin^2\theta_0 + C_1\cos^2\theta_0 + J]\,[V''(\theta_0) - V'(\theta_0)\operatorname{ctg}\theta_0 + \\ + (A + B_1 - C_1)\,\Omega^2\sin^2\theta_0] + 4(A + B_1 - C_1)\,V'(\theta_0)\sin\theta_0\cos\theta_0 > 0 \tag{14}$$

При этом существенно, что $\sin\theta_0 \neq 0$.

В случае $(\partial^2\Phi / \partial\theta^2)_0 < 0$ движение (5) неустойчиво [6]; поэтому условие (14) будет необходимым и достаточным (без учета границы) условием устойчивости регулярной прецессии гироскопа в кардановом подвесе. Условия (7), (9), (14) в случае тяжелого гироскопа в кардановом подвесе при вертикальной оси внешнего кольца ($V(\theta) = a\cos\theta$) переходят в соответствующие условия, полученные в работах [2, 4]. Необходимость условия (14) для гироскопа без подвеса ($A_1 = B_1 = C_1 = J = 0$) была установлена в работе [5].

Автор приносит благодарность В. В. Румянцеву за постановку задачи.

Поступила 10 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О гироскопе в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
3. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
4. Скимель В. Н. Некоторые задачи движения и устойчивости тяжелого гироскопа. Тр. КАИ, 1958, вып. XXXVIII.
5. Bottema O. Die Stabilität der Präzessionsbewegung eines symmetrischen Kreisels. Jng.- Arch., 1960, XXIX Band.
6. Пожарицкий Г. К. О неустановившемся движении консервативных голономных систем. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.

ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА ОКОЛО ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА

М. Г. Алишаев

(Москва)

Рассматривается задача о вынужденной конвекции около теплового источника, помещенного в однородный поток вязкого теплопроводного газа. Исследование проводится по приближенной теории пограничного слоя, т. е. пренебрегается переносом тепла за счет теплопроводности в направлении движения по сравнению с конвективным переносом тепла. Показано, что задачу можно свести к соответствующей задаче для несжимаемой жидкости преобразованием Дородницына, если принять зависимость вязкости от температуры в виде, предложенном Чепменом — Рубезиным, и считать постоянным число Прандтля. Проведено сравнение изотерм.

Известно, что если в однородный поток несжимаемой жидкости поместить источник тепла интенсивности Q, то в приближении теории пограничного слоя распределение температуры описывается уравнением

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{a}{U}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} \tag{1}$$

граничными условиями

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \qquad \vartheta = 0 \quad \text{при } y = \infty \tag{2}$$

и дополнительным условием постоянства интенсивности источника тепла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta\, dy = \frac{Q}{\rho c U T_\infty} \qquad \left(\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty}, \quad a = \frac{k}{c\rho} = \mathrm{const}\right) \tag{3}$$

Решение уравнения (1) с условиями (2) и (3) дается формулой

$$\vartheta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{Q}{c\rho U T_\infty} \sqrt{\frac{U}{ax}} \exp\left(-\frac{Uy^2}{4ax}\right) \tag{4}$$

Семейство изотерм $T = \mathrm{const}$ определяется единственной кривой

$$Y = \sqrt{-X \ln X} \tag{5}$$

где

$$Y = \sqrt{2\pi}\, \frac{c\rho U (T - T_\infty)}{Q}\, y, \qquad X = \pi \frac{4a}{U} \left[\frac{c\rho U (T - T_\infty)}{Q}\right]^2 x \tag{6}$$

В тех же приближениях теории пограничного слоя вынужденная конвекция около теплового источника в сжимаемом потоке вязкого газа описывается системой

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \qquad \rho\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{7}$$

$$c_p \rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad \rho T = \rho_\infty T_\infty$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0; \qquad T = T_\infty, \quad u = U_\infty \quad \text{при } y = \infty \tag{8}$$

и условием постоянства интенсивности источника тепла

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_p \rho u (T - T_\infty)\, dy = Q \tag{9}$$

Введем функцию тока по формулам

$$\rho u = \rho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \rho v = -\rho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

и перейдем к переменным Дородницына

$$y = \int_0^\eta \frac{\rho_\infty}{\rho}\, d\eta, \qquad x = \xi$$

Будем считать число Прандтля постоянным и примем зависимость вязкости от температуры, предложенную Чепменом и Рубезиным. Тогда

$$\mu\rho = C \mu_\infty \rho_\infty, \qquad k\rho = C k_\infty \rho_\infty \qquad (C = \mathrm{const})$$

Используя второе уравнение системы (7), получим для функции тока ψ уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{C \mu_\infty}{\rho_\infty} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} \tag{10}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = U_\infty \quad \text{при } \eta = \infty \tag{11}$$

решением которого, очевидно, будет $\psi = U_\infty \eta$. Следовательно,

$$u = U_\infty, \qquad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho} U_\infty \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{12}$$

Используя третье уравнение системы (7), получим для распределения температуры уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{a_\infty}{U_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \tag{13}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial T}{\partial \eta}=0 \quad \text{при } \eta=0, \qquad T=T_\infty \quad \text{при } \eta=\infty \tag{14}$$

и условием постоянства интенсивности источника тепла

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_p\rho_\infty U_\infty T d\eta = Q \qquad \left(a_\infty = C\,\frac{k_\infty}{c_p\rho_\infty}\right) \tag{15}$$

Сравнивая (13) — (15) с (1) — (3), убеждаемся в полной тождественности этих задач. Решение дается формулой (4), которая в последнем случае имеет вид

$$\frac{T-T_\infty}{T_\infty}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{Q}{c_p\rho_\infty U_\infty T_\infty}\sqrt{\frac{U_\infty}{a_\infty\xi}}\exp\left(-\frac{U_\infty\eta^2}{4a_\infty\xi}\right) \tag{16}$$

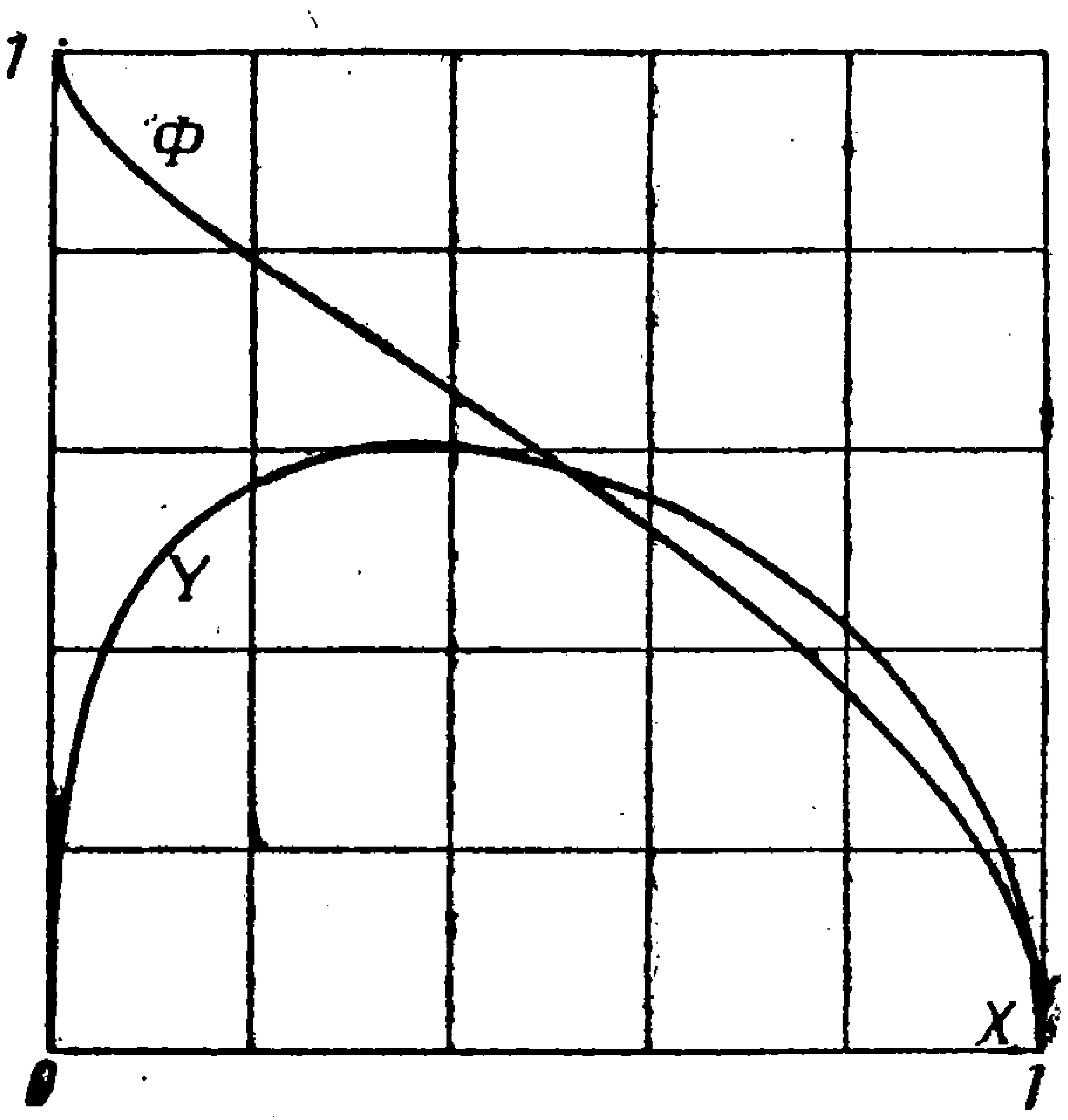
Используя (16), находим связь между переменными Дородницына η, ξ и физическими переменными x, y

$$y=\eta+\frac{Q}{2c_p\rho_\infty U_\infty T_\infty}\,\Phi\left(\frac{\eta}{\sqrt{4a_\infty\xi/U_\infty}}\right), \qquad x=\xi \qquad \left(\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}dz\right) \tag{17}$$

Из формул (17) следует, что $y>\eta$, т. е. эффект сжимаемости, как это и следовало ожидать, состоит в более интенсивном поперечном распространении тепла. Интересно отметить, что для несжимаемой жидкости вдоль изотерм $y\to\pm 0$ при $x\to 0$, т. е. все изотермы пересекаются в начале координат, тогда как для сжимаемой жидкости вдоль изотерм получим

$$y\to\pm y_0=\frac{Q}{2c_p\rho_\infty U_\infty T_\infty} \qquad \text{при } x\to 0$$

т. е. все изотермы пересекаются в точках с координатами $(0, \pm y_0)$. Отметим, что $2y_0$ представляет ширину однородной струи газа плотности ρ_∞ и теплоемкости c_p, движущейся со скоростью U_∞ при температуре T_∞, тепловой расход в единицу времени которой равен интенсивности источника тепла Q.



Указанные особенности при $x=0$ обусловлены принятыми приближениями теории пограничного слоя. Пользуясь формулами (5) и (17), получим для изотерм в сжимаемом случае

$$Y=\sqrt{X\ln X}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{T-T_\infty}{T_\infty}\,\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{2}\ln\frac{1}{X}}\right) \tag{18}$$

где

$$X=\pi\left[\frac{c_p\rho_\infty U_\infty(T-T_\infty)}{Q}\right]^2\frac{4a_\infty x}{U_\infty}, \qquad Y=\sqrt{2\pi}\,\frac{c_p\rho_\infty U_\infty(T-T_\infty)}{Q}\,y$$

На фигуре дан график функции $Y=\sqrt{X\ln X}$, служащей изотермой для источника тепла, помещенного в однородный поток несжимаемой жидкости, и график функции $\Phi(\sqrt{{}^1/_2\ln X})$, характеризующей поправку для сжимаемого случая.

Аналогичное исследование может быть проведено и для осесимметричного течения.

Поступила 26 VI 1961

Кафедра гидромеханики МГУ