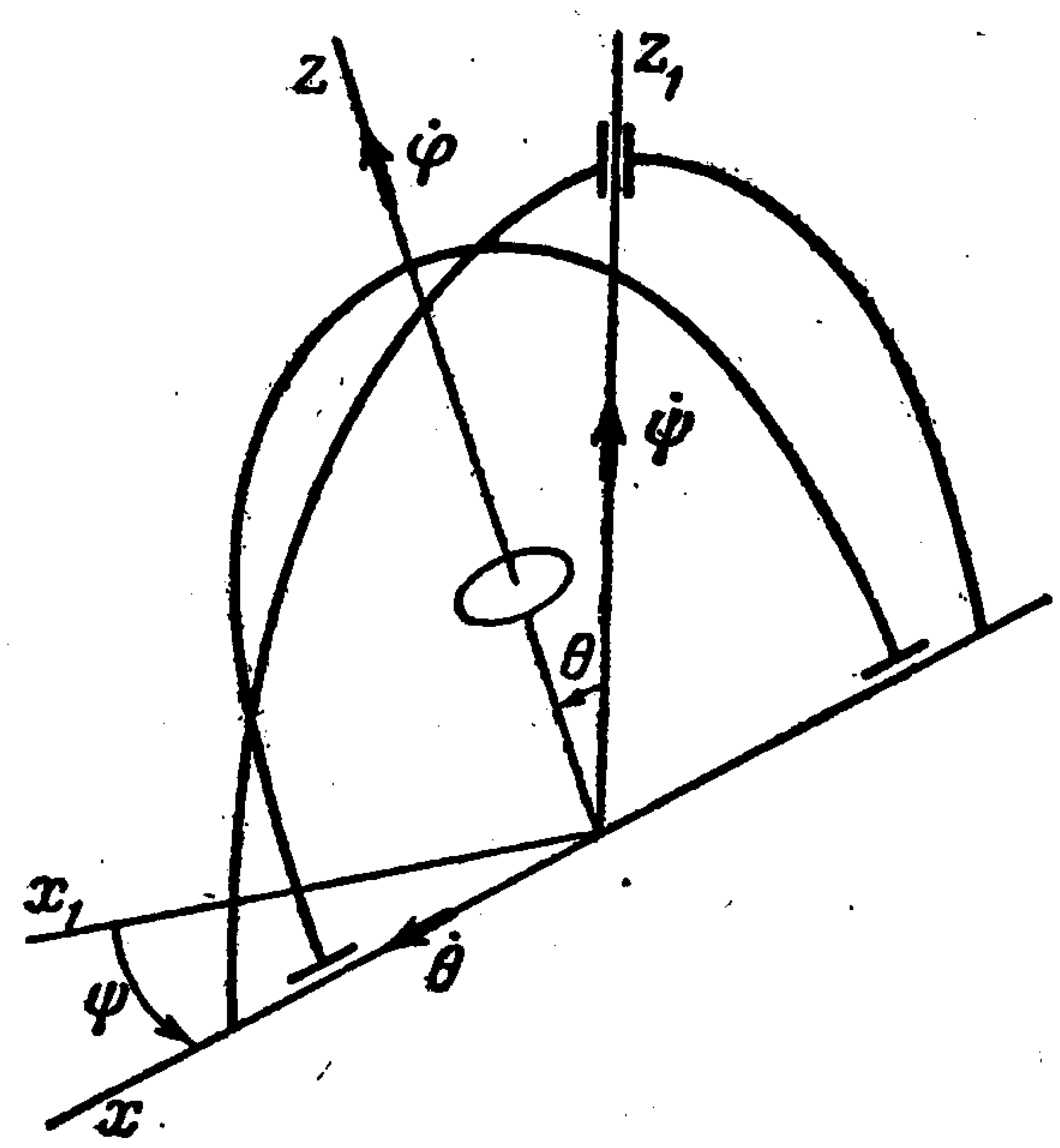
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

В. В. Крементуло

(Москва)

Задача о движении и устойчивости тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе рассматривалась в работах [1-4], в которых при помощи второго метода Ляпунова получены необходимые и достаточные условия устойчивости стационарных движений. В предлагаемой работе излагаются аналогичные результаты для гироскопа в подвесе, находящегося в поле сил, обладающих силовой функцией — $V(\theta)$, где θ — угол поворота внутреннего кольца (кожуха). Применительно к гироскопу без подвеса эта задача была решена в первом приближении в работе [5].



Представим симметричный гироскоп в кардановом подвесе, введя следующие (фигура) обозначения: x_1, y_1, z_1 — неподвижная система координат; x, y, z — подвижная система координат, жестко связанная с кожухом (ось x направлена по оси кожуха, ось z — по оси ротора); ψ — угол поворота внешнего кольца; φ — угол собственного вращения гироскопа; A, A, C — моменты инерции гироскопа относительно осей x, y, z соответственно; A_1, B_1, C_1 — моменты инерции кожуха относительно тех же осей; J — момент инерции внешнего кольца относительно вертикальной оси z_1.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы в форме Лагранжа

$$(A+A_1)\ddot\theta-(A+B_1-C_1)\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta+C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)\dot\psi\sin\theta=-V'(\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{[(A+B_1)\sin^2\theta+C_1\cos^2\theta+J]\dot\psi+C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)\cos\theta\right\}=0 \tag{1}$$

$$C\frac{d}{dt}(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)=0$$

допускают три первых интеграла

$$[(A+B_1)\sin^2\theta+C_1\cos^2\theta+J]\dot\psi^2+(A+A_1)\dot\theta^2+C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)^2+2V(\theta)=h \tag{2}$$

$$[(A+B_1)\sin^2\theta+C_1\cos^2\theta+J]\dot\psi+C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)\cos\theta=k \tag{3}$$

$$r=\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta=r_0 \tag{4}$$

Точка обозначает дифференцирование по времени, штрих — по аргументу θ. Решение задачи можно привести к квадратурам разделением переменных

$$\dot\theta^2=\frac{[\alpha-mV(\theta)](\varepsilon-e\cos^2\theta)-(\beta-br_0\cos\theta)^2}{\varepsilon-e\cos^2\theta}=\frac{f(\theta)}{\varepsilon-e\cos^2\theta}$$

$$\dot\psi=\frac{\beta-br_0\cos\theta}{\varepsilon-e\cos^2\theta},\qquad \dot\varphi=r_0-\dot\psi\cos\theta$$

Здесь

$$\alpha=\frac{h-Cr_0^2}{A+A_1},\quad \varepsilon=\frac{A+B_1+J}{A+A_1},\quad e=\frac{A+B_1-C_1}{A+A_1},\quad \beta=\frac{k}{A+A_1}$$

$$b=\frac{C}{A+A_1},\quad m=\frac{2}{A+A_1}$$

Эти решения для случая тяжелого гироскопа в кардановом подвесе с вертикальной осью внешнего кольца ($V=a\cos\theta$) сводятся к гиперэллиптическим интегралам, полученным в работе [1].

Представляет интерес следующий частный случай:

$$V(\theta) = \frac{n}{\varepsilon - e\cos^2\theta} \qquad (n \text{ — некоторая постоянная})$$

При этом функция $f(\theta)$ сводится к полиному второй степени относительно $u = \cos\theta$, который отличается лишь свободным членом от соответствующего полинома в случае уравновешенного гироскопа ($V(\theta) \equiv 0$). Изучение устойчивости стационарных движений (вертикального вращения и регулярной прецессии) гироскопа может быть проведено [1], как и для уравновешенного гироскопа, при помощи рассмотрения корней полинома $f(u)$. Перейдем к изучению устойчивости стационарных движений гироскопа в случае произвольной аналитической функции $V(\theta)$.

Регулярная прецессия гироскопа

$$\theta = \theta_0, \quad \dot\theta = 0, \qquad \dot\psi = \Omega, \qquad r = \omega \tag{5}$$

согласно (1) имеет место, если постоянные θ_0, Ω, ω удовлетворяют соотношению

$$(A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 - C\omega\Omega \sin\theta_0 - V'(\theta_0) = 0 \tag{6}$$

Для выяснения устойчивости решения (5) по отношению к θ, $\dot\theta$, $\dot\psi$, r составим уравнения возмущенного движения, положив

$$\theta = \theta_0 + \eta, \qquad \dot\theta = \xi_1, \qquad \dot\psi = \Omega + \xi_2, \qquad r = \omega + \xi_3$$

Уравнения возмущенного движения допускают три интеграла, соответствующие интегралам (2), (3), (4), из которых можно составить связку, использованную в работе [2]. Условия знакоопределенности указанной связки по всем переменным η, ξ_1, ξ_2, ξ_3 сводятся к одному неравенству

$$(A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 \cos 2\theta_0 - C\omega\Omega \cos\theta_0 - V''(\theta_0) < 0 \tag{7}$$

которое будет достаточным условием устойчивости движения (5) по отношению к θ, $\dot\theta$, $\dot\psi$, r. В случае $\theta_0 \neq 0$ это условие, используя равенство (6), можно представить в виде

$$(A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 \sin^2\theta_0 - V'(\theta_0)\operatorname{ctg}\theta_0 + V''(\theta_0) > 0 \tag{8}$$

Для вертикального вращения $\theta_0 = 0$ условия (6), (7) принимают вид

$$V'(0) = 0, \qquad (A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 - C\omega\Omega - V''(0) < 0 \tag{9}$$

Неравенство (9) выполняется при одновременном выполнении неравенств

$$C^2\omega^2 + 4(A + B_1 - C_1)\,V''(0) > 0, \qquad \Omega_1 < \Omega < \Omega_2 \tag{10}$$

где Ω_1, Ω_2 — корни квадратного уравнения

$$(A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 - C\omega\Omega - V''(0) = 0$$

Легко показать, что условие (9) будет также необходимым условием устойчивости вертикального вращения гироскопа. Производная по времени от функции

$$W = (A + A_1)\,\eta\xi_1$$

в силу уравнений возмущенного движения

$$\frac{dW}{dt} = (A + A_1)\,\xi_1^2 + [(A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 - C\omega\Omega - V''(0)]\,\eta^2 + \ldots$$

будет определенно положительной при выполнении неравенства

$$(A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 - C\omega\Omega - V''(0) > 0$$

Согласно теореме Ляпунова рассматриваемое движение неустойчиво.

Значит, условие (9) будет необходимым и достаточным (без учета границы) условием устойчивости вертикального вращения гироскопа в кардановом подвесе.

Для регулярной прецессии $\theta_0 \neq 0$ можно также получить необходимое и достаточное условие устойчивости. Для этого воспользуемся теоремой Рауса. Измененная потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Phi(\theta) = V(\theta) + \frac{1}{2}Cr_0^2 + \frac{1}{2}\,\frac{(k - Cr_0\cos\theta)^2}{(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + J} \tag{11}$$

Изучаемое стационарное движение удовлетворяет условию

$$(\partial\Phi / \partial\theta)_0 = 0 \tag{12}$$

Если постоянные k, r_0 не возмущаются, то согласно теореме Рауса движение (5) будет устойчивым по отношению к θ, $\dot{\theta}$, если для невозмущенного движения функция $\Phi(\theta)$ имеет минимум, т. е.

$$(\partial^2\Phi / \partial\theta^2)_0 > 0 \tag{13}$$

Условию (13) при помощи (12) можно придать вид

$$C^2\omega^2 \sin^2\theta_0 + [(A + B_1)\sin^2\theta_0 + C_1\cos^2\theta_0 + J]\,[V''(\theta_0) - V'(\theta_0)\operatorname{ctg}\theta_0 + \\ + (A + B_1 - C_1)\,\Omega^2\sin^2\theta_0] + 4\,(A + B_1 - C_1)\,V'(\theta_0)\sin\theta_0\cos\theta_0 > 0 \tag{14}$$

При этом существенно, что $\sin\theta_0 \neq 0$.

В случае $(\partial^2\Phi / \partial\theta^2)_0 < 0$ движение (5) неустойчиво [6]; поэтому условие (14) будет необходимым и достаточным (без учета границы) условием устойчивости регулярной прецессии гироскопа в кардановом подвесе. Условия (7), (9), (14) в случае тяжелого гироскопа в кардановом подвесе при вертикальной оси внешнего кольца ($V(\theta) = a\cos\theta$) переходят в соответствующие условия, полученные в работах [2, 4]. Необходимость условия (14) для гироскопа без подвеса ($A_1 = B_1 = C_1 = J = 0$) была установлена в работе [5].

Автор приносит благодарность В. В. Румянцеву за постановку задачи.

Поступила 10 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О гироскопе в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
3. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
4. Скимель В. Н. Некоторые задачи движения и устойчивости тяжелого гироскопа. Тр. КАИ, 1958, вып. XXXVIII.
5. Bottema O. Die Stabilität der Präzessionsbewegung eines symmetrischen Kreisels. Jng.- Arch., 1960, XXIX Band.
6. Пожарицкий Г. К. О неустановившемся движении консервативных голономных систем. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.

ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА ОКОЛО ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА

М. Г. Алишаев

(Москва)

Рассматривается задача о вынужденной конвекции около теплового источника, помещенного в однородный поток вязкого теплопроводного газа. Исследование проводится по приближенной теории пограничного слоя, т. е. пренебрегается переносом тепла за счет теплопроводности в направлении движения по сравнению с конвективным переносом тепла. Показано, что задачу можно свести к соответствующей задаче для несжимаемой жидкости преобразованием Дородницына, если принять зависимость вязкости от температуры в виде, предложенном Чепменом — Рубезиным, и считать постоянным число Прандтля. Проведено сравнение изотерм.

Известно, что если в однородный поток несжимаемой жидкости поместить источник тепла интенсивности Q, то в приближении теории пограничного слоя распределение температуры описывается уравнением

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{a}{U}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} \tag{1}$$

граничными условиями

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \qquad \vartheta = 0 \quad \text{при } y = \infty \tag{2}$$