ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2-е, ГИТТЛ, 1955.
3. Mettler E. Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme. Ing.-Archiv, 1959, Bd. XXVIII, S. 213—228.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. ГИФМЛ, 1959.
5. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Изд. 2-ое, ГИТТЛ, 1950.
6. Жуковский Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $d^2y / dx^2 + py = 0$. Матем. сборн., 1892, т. XVI, вып. 3, стр. 582—591.
7. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, 1956.
8. Якубович В. А. О динамической устойчивости упругих систем. ДАН СССР, 1958, т. 121, № 4, стр. 602—605.
9. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, 1937.
10. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Л. С. Гноенский (Москва)

1. При создании управляющих систем встречается следующая задача. Система описывается уравнениями

$$\dot{x}_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)\, x_k = b_i u(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

$$|u(t)| \leqslant m \tag{2}$$

Решение $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет при $t = 0$ начальным условиям $x = x_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$. Задается множество N_k такое, что если $x(x_1, \ldots, x_n) \in N_k$, то

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \ldots, \qquad x_k = a_k$$

Здесь $a_1, \ldots, a_k$ — некоторые постоянные. Предположим, что существует множество V управляющих функций $u(t)$, удовлетворяющих (2), такое, что, если $u(t) \in V$, то решение системы (1) переходит из точки x_0 в множество N_k. Требуется найти такую функцию $u_{\min}(t)$ из V, которая переводит решение из точки x_0 в множество N_k за наименьшее время. Задача эта рассматривалась в работах [1–5] и др., и для нее были получены самые общие результаты.

Ниже для частного, но достаточно важного для приложений случая $k=2$ излагается несколько иной способ нахождения $u_{\min}(t)$. Он основан на одном обобщении метода накопления возмущений.

Предлагаемый метод близок к методу, приведенному в работе [3]. Он, однако, имеет некоторые особенности, которые, по-видимому, иногда могут быть полезными в приложениях.

Как известно, решение системы (1) может быть представлено в виде

$$x_j(t) = x_{j0}(t) + \int_0^t K_j(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau, \qquad (j = 1, \ldots, n), \qquad x_{j0}(0) = x_{j0} \tag{3}$$

Пусть A_i — принадлежащее положительной полуоси множество точек t, на котором

$$m \int_0^t |K_i(t, \tau)|\, d\tau \geqslant |a_i - x_{i0}(t)| \equiv |n_i(t)| \qquad (i = 1, 2)$$

Через A обозначим пересечение множеств A_1 и A_2. Если $A=0$, то переход из точки x_0 в множество N_2 заведомо неосуществим. Предположим, что $A\neq 0$; T — произвольная точка из A, $u_T(\tau)$ принадлежит к множеству M функций $u(\tau)$, удовлетворяющих (2) и соотношению

$$\int_0^T K_1(T,\tau)\,u(\tau)\,d\tau = n_1(T) \tag{4}$$

При этом на $u_T(\tau)$ реализуется

$$\operatorname{Inf}\left| n_2(T) - \int_0^T K_2(T,\tau)\,u(\tau)\,d\tau \right| \qquad (u\in M) \tag{5}$$

Если уравнение относительно T

$$n_2(T) - \int_0^T K_2(T,\tau)\,u_T(\tau)\,d\tau = 0 \tag{6}$$

имеет решение, то переход из точки x_0 в N_2 осуществим, и оптимальный по быстродействию переход осуществляется функцией

$$u_{\min}(\tau) = u_{T_0}(\tau)$$

Здесь T_0 — наименьший корень уравнения (6).

В соотношениях (4) — (6) можно поменять местами индексы 1 и 2, однако величина T_0 от этого не изменится. Заметим, что иногда достаточным является попадание координаты x_2 не в a_2, а в некоторую ε-окрестность a_2. В данном методе определяется величина (5). Как только при некотором $T<T_0$ окажется, что (5) меньше ε, получаем функцию $u_T(\tau)$, реализующую переход из точки x_0 в точку, у которой первая координата равна a_1, а вторая координата принадлежит ε-окрестности a_2.

2. Построим функцию $u_T(\tau)$. Положим

$$K_1(T,\tau)=K_1(\tau), \qquad K_2(T,\tau)=K_2(\tau), \qquad K(\tau)=\frac{K_2(\tau)}{K_1(\tau)}$$

$$A^+ = \operatorname*{Sup}_{\tau} K(\tau), \qquad A^- = \operatorname*{Inf}_{\tau} K(\tau), \qquad \tau\in[0,T]$$

$$I_{ij}(x,y) = m\int_{\sigma(x,y)} K_i(\tau)\,\operatorname{sign} K_j(\tau)\,d\tau$$

где $\sigma(x,y)$ — принадлежащее $[0,T]$ множество, такое, что если $\tau\in\sigma(x,y)$, то $y>K(\tau)\geqslant x$. Предполагается, что ни одна из функций $K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$, $K(\tau)$ не может быть постоянной на множествах ненулевой меры. Эти ограничения не являются стеснительными.

Величины A^-, A^+ могут иметь и бесконечные значения. Так как $T\in A$, то

$$I_{11}(A^-,A^+) = m\int_0^T K_1(\tau)\,\operatorname{sign} K_1(\tau)\,d\tau = n_1(T)+\alpha_{11}(T), \quad \alpha_{11}(T)>0$$

Через $u^+(\tau)$, соответственно $u^-(\tau)$, обозначим функции, на которых реализуются

$$n^+ = \sup_u \int_0^T K_2(\tau)\,u(\tau)\,d\tau, \qquad n^- = \inf_u \int_0^T K_2(\tau)\,u(\tau)\,d\tau, \qquad u\in M$$

Величина $n_2(T)$ принадлежит одному из интервалов

$$(-\infty, n^-), \ [n^-, n^+], \ (n^+, \infty)$$

Очевидно, что если $n_2(T)\in(-\infty,n^-)$, то функция $u_T(\tau)$, на которой реализуются (5), совпадает с $u^-(\tau)$; если $n_2(T)\in(n^+,\infty)$, то $u_T(\tau)$ совпадает с $u^+(\tau)$. Ниже будет показано, что если $n_2(T)\in[n^-,n^+]$, то существует функция $u_a(\tau)$ из M, удовлетворяющая равенству

$$\int_0^T K_2(\tau)\,u_a(\tau)\,d\tau = n_2(T)$$

т. е $u_a(\tau)$ совпадает с $u_T(\tau)$.

Докажем, что

$$u^+(\tau) = m \operatorname{sign} K_1(\tau) \quad \text{при } \tau \in \sigma(y_0, A^+)$$
$$u^+(\tau) = -m \operatorname{sign} K_1(\tau) \quad \text{при } \tau \in \sigma(A^-, y_0)$$

где y_0 — корень уравнения

$$I_{11}(A^-, y) = \frac{\alpha_{11}}{2} \tag{7}$$

$$u^-(\tau) = -m \operatorname{sign} K_1(\tau) \quad \text{при } \tau \in \sigma(y_1, A^+)$$
$$u^-(\tau) = m \operatorname{sign} K_1(\tau) \quad \text{при } \tau \in \sigma(A^-, y_1)$$

где y_1 — корень уравнения

$$I_{11}(y, A^+) = \frac{\alpha_{11}}{2} \tag{8}$$

Заметим, что для любого y из $[A^-, A^+]$ выполняется соотношение

$$\sigma(A^-, y) \cup \sigma(y, A^+) = [0, T]$$

Учитывая отмеченные выше свойства функций $K_1(\tau)$, $K(\tau)$, получаем, что $I_{11}(A^-, y)$, $I_{11}(y, A^+)$ — непрерывные, монотонно изменяющиеся в строгом смысле функции y. Так как

$$I_{11}(A^-, A^-) = 0, \qquad I_{11}(A^+, A^+) = 0, \qquad I_{11}(A^-, A^+) = n_1(T) + \alpha_{11}(T)$$

то каждое из уравнений (7), (8) имеет на (A^-, A^+) единственное решение.

Функции $u^+(\tau)$ и $u^-(\tau)$ принадлежат M.

Действительно:

$$\int_0^T K_1(\tau) u^+(\tau)\, d\tau = -I_{11}(A^-, y_0) + I_{11}(y_0, A^+) = I_{11}(A^-, y_0) +$$
$$+ I_{11}(y_0, A^+) - 2I_{11}(A^-, y_0) = n_1 + \alpha_{11} - \alpha_{11} = n_1$$

$$\int_0^T K_1(\tau) u^-(\tau) d\tau = I_{11}(A^-, y_1) - I_{11}(y_1, A^+) = n_1 \tag{9}$$

Пусть $u(\tau)$ — произвольная функция из M. На множестве $\sigma(A^-, y_0)$ функция $K_1(\tau)(u^+(\tau) - u(\tau))$ неположительна, а на множестве $\sigma(y_0, A^+)$ неотрицательна.

Кроме того,

$$\int_{\sigma(A^-, y_0)} K_1(u^+ - u)\, d\tau = - \int_{\sigma(y_0, A^+)} K_1(u^+ - u)\, d\tau$$

Поэтому, применяя теорему о среднем, получаем

$$\int_0^T K_2 u^+ d\tau - \int_0^T K_2 u d\tau = \int_{\sigma(A^-, y_0)} KK_1(u^+ - u)\, d\tau + \int_{\sigma(y_0, A^+)} KK_1(u^+ - u)\, d\tau =$$
$$= K(\tau^*) \int_{\sigma(A^-, y_0)} K_1(u^+ - u)\, d\tau + K(\tau^{**}) \int_{\sigma(y_0, A^+)} K_1(u^+ - u)\, d\tau =$$
$$= (K(\tau^{**}) - K(\tau^*)) \int_{\sigma(y_0, A^+)} K_1(u^+ - u)\, d\tau \geqslant 0$$

так как $K(\tau^{**}) > K(\tau^*)$.

Аналогично доказывается, что $u^-(\tau)$ имеет приведенный выше вид.

Пусть $n_2(T) \in [n^-, n^+]$. Через $z = \psi(y)$ обозначим функцию, определяемую из соотношения

$$\varphi(y, z) \equiv I_{11}(A^-, z) - I_{11}(z, y) + I_{11}(y, A^+) = n_1 \tag{10}$$

Из (9) следует, что $z = A^-$ при $y = y_0$ и $z = y_1$ при $y = A^+$. Функция $\varphi(y, z)$ определена и непрерывна в области $A^- \leqslant y \leqslant A^+$, $A^- \leqslant z \leqslant y$. Для любого y из $[y_0, A^+]$ функция $\varphi(y, z)$ монотонно возрастает в строгом смысле от значения

$$-I_{11}(A^-, y) + I_{11}(y, A^+) < n_1$$

до значения

$$I_{11}(A^-, y) + I_{11}(y, A^+) = n_1 + \alpha_{11}$$

при изменении z от A^- до y.

Для любого z из $[A^-, A^+]$ функция $\varphi(y, z)$ монотонно убывает в строгом смысле при изменении y от z до A^+.

Поэтому можно показать, что $z = \psi(y)$ определена, непрерывна и монотонно возрастает в строгом смысле от $z = A^-$ до $z = y_1$ при изменении y от y_0 до A^+. Заметим еще, что $\psi(y) < y$ при $y \in [y_0, A^+]$.

Действительно, $\psi(y_0) = A^- < y_0$ и если при возрастании y для какого-либо y^* выполняется равенство $z^* = \psi(y^*) = y^*$, то

$$\varphi(y^*, z^*) = \varphi(y^*, y^*) = n_1 + \alpha_{11}$$

что противоречит определению $z = \psi(y)$. Введем теперь функцию

$$\Phi(y) = \int_0^T K_2(\tau)\, u_y(\tau)\, d\tau$$

где

$$u_y(\tau) = m \operatorname{sign} K_1(\tau) \quad \text{при } \tau \in \sigma(A^-, \psi(y)) \cup \sigma(y, A^+)$$

$$u_y(\tau) = -m \operatorname{sign} K_1(\tau) \quad \text{при } \tau \in \sigma(\psi(y), y)$$

из (10) следует, что $u_y(\tau)$ при любом $y \in [y_0, A^+]$ принадлежит множеству M.

Функция $\Phi(y)$ определена и непрерывна на интервале $[y_0, A^+]$ и изменяется от значения n^- до значения n^+ при увеличении y от y_0 до A^+, следовательно, уравнение

$$\Phi(y) = n_2(T) \tag{11}$$

имеет на $[y_0, A^+]$ хотя бы один корень $y = a$, поэтому

$$\int_0^T K_2(\tau)\; u_a(\tau)\, d\tau = n_2(T)$$

т. е. $u\ (\tau)$ совпадает с $u_T(\tau)$.

Поступила 7 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, т. 14, 6, 1953.
2. Bellman R., Hickeberg I., Cross O. On the «bang. bang» control problem. Quarterly Applied mathematic. vol 14, No. 1, 1956.
3. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, т. XVIII, № 11, 1957.
4. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. Теория оптимальных процессов. 1. Принцип максимума, Известия Академии наук СССР. Серия математическая, 1960, т. 24, № 1.
5. Розоноэр Л. И. Принцип максимума в теории оптимальных систем. Автоматика и телемеханика, 1959, т. XX, № 11.