СВОБОДНЫЕ ЦЕЛИКОМ УПРУГИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

В. М. Старжинский (Москва)

§ 1. Постановка задачи. Определение понятия колебательные цепи. Рассмотрим механическую систему, стесненную голономными и независящими явно от времени связями. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ суть лагранжевы координаты системы, а $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ — соответствующие обобщенные скорости. Допустим, что обобщенная сила, соответствующая координате q_ν, может быть представлена в виде

$$Q_\nu(q_1, \ldots, q_n) - R_\nu(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

Здесь Q_ν и R_ν — непрерывные и дифференцируемые функции своих аргументов в области их определения. Для выделенных сил сопротивления будем предполагать, что их работа на любом возможном перемещении (совпадающем в рассматриваемом случае с одним из действительных) отрицательна

$$-\sum_{\nu=1}^{n} R_\nu(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)\,\dot{q}_\nu < 0 \tag{1.1}$$

Отсюда и из непрерывности следует, что

$$R_\nu(0, \ldots, 0) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

В простейшем нелинейном случае, когда $R_\nu = f(\dot{q}_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, условие (1.1) означает, что $\alpha f(\alpha) > 0$ $(\alpha \neq 0)$, а требование непрерывности означает, в частности, что $f(0) = 0$. В линейном случае условия (1.1) означают, что диссипация полная.

Живая сила T системы в силу независимости связей явно от времени будет квадратичной формой обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими лишь от лагранжевых координат

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\,\dot{q}_i\dot{q}_j \qquad (a_{ji} = a_{ij})$$

Уравнения движения в форме Лагранжа второго рода запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = Q_\nu - R_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Попытаемся по отношению к переменным $q_1, \ldots, q_r$; $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_r$ $(r \leqslant n)$ изучить устойчивость в смысле Ляпунова [1,2] невозмущенного движения

$$q_\nu = q_{\nu 0}(t), \qquad \dot{q}_\nu = \dot{q}_{\nu 0}(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Для возмущенного движения значения координат и скоростей обозначим

$$q_\nu = q_{\nu 0}(t) + \varkappa_\nu, \qquad \dot{q}_\nu = \dot{q}_{\nu 0}(t) + \dot{\varkappa}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

Дифференциальные уравнения первого приближения возмущенного движения (уравнения в вариациях) могут быть представлены в виде

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{\nu i})_0\frac{d^2\varkappa_i}{dt^2} + \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i}(t)\frac{d\varkappa_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} c_{\nu i}(t)\varkappa_i = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

где

$$b_{\nu i}(t) = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i}\right)_0 + \left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\nu}\right)_0\right]\dot{q}_{j0}(t) + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial \dot{q}_i}\right)_0 \tag{1.5}$$

$$c_{\nu i}(t) = \sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i}\right)_0\ddot{q}_{j0}(t) + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial^2 a_{\nu k}}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{jk}}{\partial q_\nu\partial q_i}\right)_0\right]\dot{q}_{j0}(t)\,\dot{q}_{k0}(t) - \left(\frac{\partial Q_\nu}{\partial q_i}\right)_0\right.$$

$$(\nu,\ i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

а индекс нуль при $a_{\nu i}$ и частных производных означает подстановку в их значения

$$q_{10}(t), \ldots, q_{n0}(t); \qquad \dot{q}_{10}(t), \ldots, \dot{q}_{n0}(t)$$

Условимся называть исходную механическую систему «колебательной цепью» относительно невозмущенного движения (1.3), если возможно выбрать такие лагранжевы координаты, при которых коэффициенты $(a_{\nu i})_0$, $b_{\nu i}(t)$ и $c_{\nu i}(t)$ таковы, что для некоторого натурального $m < n$

$$(a_{\nu i})_0 = 0 \tag{1.7}$$

$$\begin{pmatrix}\nu = 1, \ldots, m;\ i = m+1, \ldots, n\\ \nu = m+1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m\end{pmatrix}$$

$$b_{\nu i}(t) = (\partial R_\nu / \partial \dot q_i)_0 \tag{1.8}$$

$$(\nu = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, n)$$

$$(\partial R_\nu / \partial \dot q_i)_0 = 0 \tag{1.9}$$

$$\begin{pmatrix}\nu = 1, \ldots, m;\ i = m+1, \ldots, n\\ \nu = m+1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m\end{pmatrix}$$

$$c_{\nu i}(t) = 0 \tag{1.10}$$

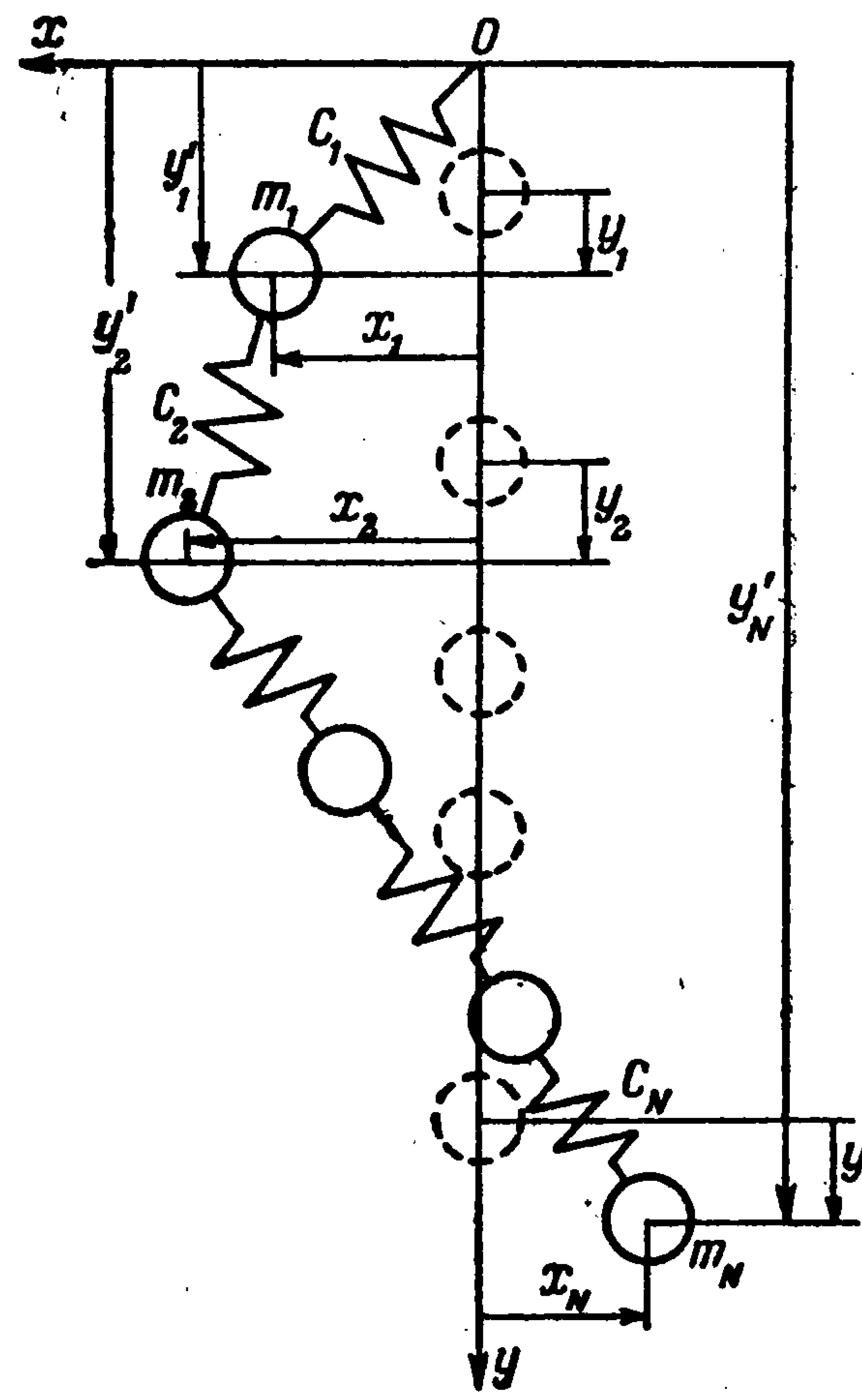
$$\begin{pmatrix}\nu = 1, \ldots, m;\ i = m+1, \ldots, n\\ \nu = m+1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m\end{pmatrix}$$

для всех t, не меньших некоторого t_0. Условия (1.7) — (1.10) означают, что матрицы-функции коэффициентов системы (1.4) имеют вид

$$\begin{pmatrix} \| (a_{\nu i})_0 \|_1^m & 0 \\ 0 & \| (a_{\nu i})_0 \|_{m+1}^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left\| \left(\dfrac{\partial R_\nu}{\partial \dot q_i} \right)_0 \right\|_1^m & 0 \\ 0 & \left\| \left(\dfrac{\partial R_\nu}{\partial \dot q_i} \right)_0 \right\|_{m+1}^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \| c_{\nu i}(t) \|_1^m & 0 \\ 0 & \| c_{\nu i}(t) \|_{m+1}^n \end{pmatrix}$$



Фиг. 1

Уравнения в вариациях (1.4) при выполнении условий (1.7) — (1.10) разбиваются на две группы из m и $n - m$ уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} (a_{\nu i})_0 \frac{d^2 \varkappa_i}{dt^2} + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial \dot q_i} \right)_0 \frac{d\varkappa_i}{dt} + \sum_{i=1}^{m} c_{\nu i}(t) \varkappa_i = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{1.11}$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} (a_{\nu i})_0 \frac{d^2 \varkappa_i}{dt^2} + \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial \dot q_i} \right)_0 \frac{d\varkappa_i}{dt} + \sum_{i=m+1}^{n} c_{\nu i}(t) \varkappa_i = 0 \quad (\nu = m+1, \ldots, n) \tag{1.12}$$

§ 2. Определение положений равновесия свободной целиком упругой колебательной цепи. Простейшим примером «колебательной цепи» будет свободная целиком упругая колебательная цепь относительно вертикальных колебаний (т. е. когда за невозмущенное движение принимается вертикальное колебание названной системы) (см., например, [3]). На фиг. 1 представлена система N материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_N$, последовательно соединенных N пружинами (массой которых пренебрегаем) с жесткостями $c_1, \ldots, c_N$ и длинами в ненапряженном состоянии $l_1, \ldots, l_N$. Начало первой пружины закреплено в точке O, начала каждой из последующих прикреплены к невесомым шарнирам, оси которых перпендикулярны к вертикальной плоскости Oxy, что обусловливает плоский характер движения. Таким образом, на систему наложено лишь N тривиальных связей: $z_1 = 0, \ldots, z_N = 0$ и за $2N$ лагранжевых координат примем $x_1, \ldots, x_N$; $y_1', \ldots, y_N'$ — декартовы координаты материальных точек $m_1, \ldots, m_N$. Живая сила T в этом простейшем случае

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k (\dot x_k^2 + \dot y_k'^2)$$

т. е. $a_{ij} = m_i \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 1, \ldots, N$). Вычислим потенциальную энергию $V(x_1, \ldots, x_N;\ y_1', \ldots, y_N')$ линейных сил упругости пружин и сил тяжести

$$V = -g\sum_{k=1}^{N} m_k y_k' + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} c_k\left[(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k' - y_{k-1}')^2\right] - \\ - \sum_{k=1}^{N} c_k l_k \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k' - y_{k-1}')^2} \tag{2.1}$$

считая $x_0 = y_0' = 0$ и рассматривая всюду лишь арифметические значения корня. Начнем с определения положений равновесия системы, для чего рассмотрим систему

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = -c_k x_{k-1} + (c_k + c_{k+1})\,x_k - c_{k+1}x_{k+1} - c_k l_k\left[(x_k - x_{k-1})^2 + \right. \\ \left. + (y_k' - y_{k-1}')^2\right]^{-1/2}(x_k - x_{k-1}) + c_{k+1}l_{k+1}\left[(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1}' - y_k')^2\right]^{-1/2} \times \\ \times (x_{k+1} - x_k) = 0 \quad (k = 1, \ldots, N) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_k'} = -m_k g - c_k y_{k-1}' + (c_k + c_{k+1})\,y_k' - c_{k+1}y_{k+1}' - c_k l_k\left[(x_k - x_{k-1})^2 + \right. \\ \left. + (y_k' - y_{k-1}')^2\right]^{-1/2}(y_k' - y_{k-1}') + c_{k+1}l_{k+1}\left[(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1}' - y_k')^2\right]^{-1/2} \times \\ \times (y_{k+1}' - y_k') = 0 \quad (k = 1, \ldots, N)$$

считая $c_{N+1} = l_{N+1} = 0$. Эта система допускает решение (нижнее положение равновесия)

$$x_k = 0, \qquad y_k' = (l_1 + \lambda_1) + \ldots + (l_k + \lambda_k) \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{2.3}$$

где λ_j означает статическое удлинение j-й пружины

$$\lambda_j = (m_j + m_{j+1} + \ldots + m_N)\,g/c_j \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

Найденное положение равновесия будет изолированным. Действительно, якобиан системы уравнений (2.2) при значениях переменных (2.3) $D = D_1 D_2$, где D_1 и D_2 — определители якобиевых матриц N-го порядка

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{c_1\lambda_1}{l_1+\lambda_1} + \dfrac{c_2\lambda_2}{l_2+\lambda_2} & -\dfrac{c_2\lambda_2}{l_2+\lambda_2} & 0 & \ldots & 0 \\ -\dfrac{c_2\lambda_2}{l_2+\lambda_2} & \dfrac{c_2\lambda_2}{l_2+\lambda_2} + \dfrac{c_3\lambda_3}{l_3+\lambda_3} & -\dfrac{c_3\lambda_3}{l_3+\lambda_3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{c_N\lambda_N}{l_N+\lambda_N} \end{vmatrix}$$

а D_2 получается из D_1 при $l_k = 0$, $\lambda_k = 1$ $(k = 1, \ldots, N)$. Воспользовавшись формулой для определителя якобиевой матрицы, найдем

$$D = \prod_{k=1}^{N} \frac{c_k^2\lambda_k}{l_k + \lambda_k} > 0$$

что и требовалось установить.

Введем переменные y_k, представляющие отклонения по вертикали k-ой материальной точки от нижнего положения равновесия

$$y_k = y_k' - (l_1 + \lambda_1) - \ldots - (l_k + \lambda_k) \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{2.4}$$

В нижнем положении равновесия $x_1 = \ldots = x_N = y_1 = \ldots = y_N = 0$. Для определения положений равновесия, отличных от нижнего, запишем систему уравнений (2.2) в виде

$$-c_k(x_k - x_{k-1})\left\{l_k\left[(x_k - x_{k-1})^2 + (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})^2\right]^{-1/2} - 1\right\} + \\ + c_{k+1}(x_{k+1} - x_k)\left\{l_{k+1}\left[(x_{k+1} - x_k)^2 + (l_{k+1} + \lambda_{k+1} + y_{k+1} - y_k)^2\right]^{-1/2} - 1\right\} = 0 \tag{2.5}$$

$$-c_k(l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})\left\{l_k\left[(x_k - x_{k-1})^2 + (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})^2\right]^{-1/2} - 1\right\} + \\ + c_{k+1}(l_{k+1} + \lambda_{k+1} + y_{k+1} - y_k)\left\{l_{k+1}\left[(x_{k+1} - x_k)^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + (l_{k+1} + \lambda_{k+1} + y_{k+1} - y_k)^2\right]^{-1/2} - 1\right\} = m_k g \quad (k = 1, \ldots, N)$$

Выпишем уравнения, отвечающие k равному N

$$c_N(x_N - x_{N-1})\{1 - l_N[(x_N - x_{N-1})^2 + (l_N + \lambda_N + y_N - y_{N-1})^2]^{-1/2}\} = 0$$

$$c_N(l_N + \lambda_N + y_N - y_{N-1})\{1 - l_N[(x_N - x_{N-1})^2 + (l_N + \lambda_N + y_N - y_{N-1})^2]^{-1/2}\} = m_N g$$

Фигурная скобка отлична от нуля, так как в противном случае второе уравнение не может быть удовлетворено. Тогда из первого уравнения найдем $x_N = x_{N-1}$, а второе уравнение примет вид

$$c_N(l_N + \lambda_N + y_N - y_{N-1})\left\{1 - \frac{l_N}{|l_N + \lambda_N + y_N - y_{N-1}|}\right\} = m_N g$$

Последнее уравнение всегда имеет решение $y_N = y_{N-1}$, а при условии $\lambda_N < l_N$ и решение $y_N = y_{N-1} - 2l_N$. Будем рассматривать наиболее распространенный случай, когда статическое удлинение каждой из пружин меньше длины ее в ненапряженном состоянии

$$\lambda_k < l_k \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{2.6}$$

Поступая с уравнениями (2.5), отвечающими $k = N-1,\ N-2, \ldots, 1$, аналогичным образом, найдем 2^N положений равновесия свободной колебательной цепи: $x_1 = \ldots = x_N = 0$

$$y_1 = \begin{cases} 0, \\ -2l_1, \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} y_1, \\ y_1 - 2l_2, \end{cases} \ldots, y_N = \begin{cases} y_{N-1} \\ y_{N-1} - 2l_N \end{cases} \tag{2.7}$$

При этом должно быть оговорено, что плоскости движения каждой из N материальных точек различны и параллельны вертикальной плоскости.

§ 3. Асимптотическая устойчивость в большом нижнего положения равновесия при наличии сил сопротивления. Уравнения движения (1.2) свободной целиком упругой колебательной цепи записываются весьма просто

$$\begin{aligned} m_k\ddot{x}_k &= -\frac{\partial V}{\partial x_k} - R_k(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N;\ \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N) \\ m_k\ddot{y}_k &= -\frac{\partial V}{\partial y_k} - R_{N+k}(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N;\ \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N) \end{aligned} \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{3.1}$$

Обозначим через $\inf V$ наименьшее значение потенциальной энергии свободной целиком упругой колебательной цепи среди $(2^N - 1)$ положений равновесия, отличных от нижнего. В фазовом пространстве $x_1, \ldots, x_N;\ y_1, \ldots, y_N;\ \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N$ определим замкнутую область G_0 неравенством

$$T + V \leqslant \inf V$$

Теорема. При наличии сил сопротивления, удовлетворяющих условию (1.1), нижнее положение равновесия свободной целиком упругой колебательной цепи асимптотически устойчиво для начальных отклонений $x_1^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)};\ y_1^{(0)}, \ldots, y_N^{(0)};\ \dot{x}_1^{(0)}, \ldots, \dot{x}_N^{(0)};\ \dot{y}_1^{(0)}, \ldots, \dot{y}_N^{(0)}$, принадлежащих области G. Последнее означает, что $T^{(0)} + V^{(0)}$ удовлетворяет неравенству

$$T^{(0)} + V^{(0)} < \inf V \tag{3.2}$$

где в выражениях $T^{(0)}$ и $V^{(0)}$ подставлено $x = x_1^{(0)}, \ldots, \dot{y}_N = \dot{y}_N^{(0)}$.

Доказательство. Примем за функцию v теоремы 14.1 работы [4] полную энергию системы

$$v = T + V - V(0, \ldots, 0) \tag{3.3}$$

Вычислим $V(0, \ldots, 0)$ — величину потенциальной энергии в нижнем положении равновесия

$$V(0, \ldots, 0) = -g\sum_{k=1}^{N} m_k[(l_1 + \lambda_1) + \ldots + (l_k + \lambda_k)] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} c_k(l_k^2 - \lambda_k^2)$$

Покажем, что $V - V(0, \ldots, 0)$ будет определенно положительной в смысле Ляпунова функцией $x_1, \ldots, x_N$; $y_1, \ldots, y_N$. Преобразуем $V - V(0, \ldots, 0)$ к виду

$$V - V(0, \ldots, 0) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} c_k [(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + 2l_k (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1}) - \\ - 2l_k \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})^2}]$$

и установим справедливость неравенств

$$(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + 2l_k (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1}) \geqslant \\ \geqslant 2l_k \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})^2} \tag{3.4}$$

$(k = 1, \ldots, N;\ x_0 = y_0 = 0)$. Правая часть неравенств может быть представлена в виде

$$(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1} + l_k)^2 + l_k (l_k + 2\lambda_k)$$

и, очевидно, положительна. Возведем неравенства (3.4) в квадрат и после преобразования получим

$$[(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + 2l_k (y_k - y_{k-1})]^2 + \\ + 4l_k\lambda_k [(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2] \geqslant 0 \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

Полученные неравенства достоверны, в них одновременное наличие знака равенства возможно лишь при $x_1 = \ldots = x_N = y_1 = \ldots = y_N = 0$. Следовательно, полная энергия (3.3) системы будет определенно положительной в смысле Ляпунова функцией всех лагранжевых координат и скоростей. Производная ее, взятая в силу уравнений (3.1), равна

$$\frac{d}{dt} [T + V - V(0, \ldots, 0)] = - \sum_{k=1}^{N} (R_k \dot{x}_k + R_{N+k} \dot{y}_k) \leqslant 0$$

При этом в силу определения рассматриваемых сил сопротивления равенство нулю в последнем неравенстве возможно лишь в положении равновесия. Движение, начавшееся в области G, не может из нее выйти, в области же G положение равновесия будет единственным. Таким образом, выполнены условия теоремы 14.1 работы [4]. Теорема доказана.

Примечание. Можно установить формулы для радиуса сферы или ребра куба, вписанных в замкнутую $4N$-мерную область G_0.

§ 4. Уравнения в вариациях для вертикальных колебаний системы. Выпишем подробно уравнения (3.1)

$$m_k \ddot{x}_k = - c_k (x_k - x_{k-1}) + c_{k+1} (x_{k+1} - x_k) + c_k l_k (x_k - x_{k-1}) [(x_k - x_{k-1})^2 + \\ + (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})^2]^{-1/2} - c_{k+1} l_{k+1} (x_{k+1} - x_k) [(x_{k+1} - x_k)^2 + \\ + (l_{k+1} + \lambda_{k+1} + y_{k+1} - y_k)^2]^{-1/2} - R_k (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N;\ \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N)$$

$$m_k \ddot{y}_k = - c_k l_k + c_{k+1} l_{k+1} - c_k (y_k - y_{k-1}) + c_{k+1} (y_{k+1} - y_k) + \\ + c_k l_k (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1}) [(x_k - x_{k-1})^2 + (l_k + \lambda_k + y_k - y_{k-1})^2]^{-1/2} - \\ - c_{k+1} l_{k+1} (l_{k+1} + \lambda_{k+1} + y_{k+1} - y_k) [(x_{k+1} - x_k)^2 + (l_{k+1} + \lambda_{k+1} + y_{k+1} - y_k)^2]^{-1/2} - \\ - R_{N+k} (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N;\ \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N) \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{4.1}$$

Допустим, что проекции на ось x сил сопротивления удовлетворяют условиям

$$R_k (0, \ldots, 0;\ \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_N) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

Система (4.1) допускает решение (невозмущенное движение (1.3))

$$x_k = x_{k0}(t) \equiv 0, \qquad y_k = y_{k0}(t) \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{4.2}$$

при этом $y_{k0}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\ddot{y}_{k0} + \frac{1}{m_k} R_{N+k} (0, \ldots, 0;\ \dot{y}_{10}, \ldots, \dot{y}_{N0}) - p_k y_{k-1,0} + \\ + (p_k + \mu_{k+1} p_{k+1}) y_{k0} - \mu_{k+1} p_{k+1} y_{k+1,0} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{4.3}$$

Здесь

$$p_k = \frac{c_k}{m_k} \quad (k = 1, \ldots, N;\ p_{N+1} = 0), \qquad \mu_k = \frac{m_k}{m_{k-1}} \quad (k = 2, \ldots, N;\ \mu_{N+1} = 0)$$

Проверим выполнение условий (1.7) — (1.10) ($n = 2N$, $m = N$). Условия (1.7) и (1.8) выполнены, так как

$$a_{\nu i} = \begin{cases} m_\nu \delta_{\nu i} & (\nu = 1, \ldots, N;\ i = 1, \ldots, 2N) \\ m_{\nu-N}\delta_{\nu i} & (\nu = N+1, \ldots, 2N;\ i = 1, \ldots, 2N) \end{cases}$$

Условие (1.9) требует, чтобы

$$\left(\frac{\partial R_k}{\partial \dot{y}_l}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial R_{N+k}}{\partial \dot{x}_l}\right)_0 = 0 \qquad (k, l = 1, \ldots, N) \tag{4.4}$$

где индекс нуль означает, что после дифференцирования подставлены значения аргументов из (4.2). Условия (4.4) будут выполнены, в частности, если R_k не зависят от $\dot{y}_l$, а R_{N+k} — от $\dot{x}_l$ ($k, l = 1, \ldots, N$). Будем предполагать условия (4.4) выполненными.

Условие (1.10) требует, чтобы

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial y_k}\right)_0 = 0 \qquad (j, k = 1, \ldots, N)$$

что выполнено, так как индекс нуль означает, в частности, что после дифференцирования положено $x_1 = \ldots = x_N = 0$. Следовательно, имеют место уравнения в вариациях (1.11) и (1.12) для возмущенного движения ($x_k = 0 + \xi_k$, $y_k = y_{k0}(t) + \eta_k$; $k = 1, \ldots, N$)

$$\frac{d^2\xi_k}{dt^2} + \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial R_k}{\partial \dot{x}_i}\right)_0 \frac{d\xi_i}{dt} + \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}\right)_0 \xi_i = 0$$

$$\frac{d^2\eta_k}{dt^2} + \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial R_{N+k}}{\partial \dot{y}_i}\right)_0 \frac{d\eta_i}{dt} + \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_k}\right)_0 \eta_i = 0$$

или в развернутой записи

$$\frac{d^2\xi_k}{dt^2} + \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial R_k}{\partial \dot{x}_i}\right)_0 \frac{d\xi_i}{dt} - p_k\left\{1 - \left[1 + \gamma_k + \frac{(y_{k0}(t) - y_{k-1,0}(t))}{l_k}\right]^{-1}\right\}(\xi_{k-1} -$$

$$- \xi_k) + \mu_{k+1} p_{k+1}\left\{1 - \left[1 + \gamma_{k+1} + \frac{(y_{k+1,0}(t) - y_{k0}(t))}{l_{k+1}}\right]^{-1}\right\}(\xi_k - \xi_{k+1}) = 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{d^2\eta_k}{dt^2} + \frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial R_{N+k}}{\partial \dot{y}_i}\right)_0 \frac{d\eta_i}{dt} - p_k\eta_{k-1} + (p_k + \mu_{k+1}p_{k+1})\eta_k - \mu_{k+1}p_{k+1}\eta_{k+1} = 0$$

$$(k = 1, \ldots, N) \tag{4.6}$$

$$\gamma_k = \lambda_k / l_k \qquad (k = 1, \ldots, N;\ \gamma_{N+1} = 0)$$

Заметим, что эти уравнения выписаны несмотря на то, что вопрос об устойчивости в большом нижнего положения равновесия при выполнении условия (1.1) решен теоремой § 3. Имеются в виду, во-первых, случаи невыполнения условия (1.1) (например, при частичной диссипации), во-вторых, использование уравнений (4.5) — (4.6) для суждения об устойчивости невозмущенного движения (4.2) и, в третьих, отсутствие сил сопротивления. К этому консервативному случаю и переходим.

§ 5. Консервативный случай. При отсутствии сил сопротивления свободная целиком упругая колебательная цепь будет консервативной системой. Отклонения $y_{k0}(t)$ ее масс от нижнего положения равновесия при вертикальных колебаниях невозмущенное движение) удовлетворяют системе (4.3) при $R_{N+k} \equiv 0$ ($k = 1, \ldots, N$), (описывающей малые колебания штурмовых систем [5]. Уравнение частот ω этой системы оказывается вековым уравнением некоторой якобиевой матрицы

$$\begin{vmatrix} \omega^2-(p_1+\mu_2p_2) & \mu_2p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_2p_2 & \omega^2-(p_2+\mu_3p_3) & \mu_3p_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega^2-p_N \end{vmatrix}=0$$

Уравнения (4.5) из системы уравнений первого приближения возмущенного движения при $R_j\equiv 0$ $(j=1,\dots,2N)$ будут иметь либо периодические коэффициенты, если частоты $\omega_1,\dots,\omega_N$ соизмеримы, либо почти периодические — в противном случае. Исследование устойчивости невозмущенного движения в обоих случаях является довольно сложной задачей.

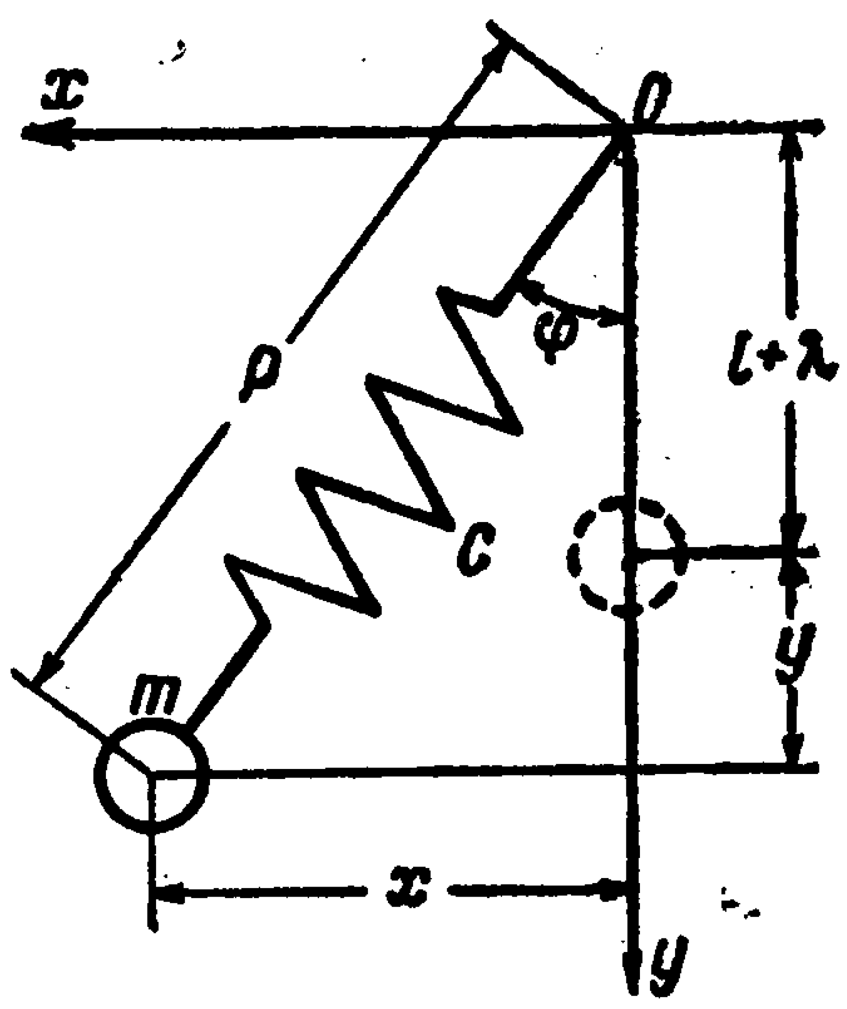
Исследование облегчается тем обстоятельством, что в консервативном случае все решения системы (4.6) ограничены. Это следует из положительности собственных значений выписанной выше якобиевой матрицы. Ограниченность решений может быть установлена и непосредственно, для чего запишем систему (4.6) при $R_{N+K}\equiv 0$ $(k=1,\dots,N)$ в виде

$$\frac{d\eta_k}{dt}=\dot\eta_k,\quad \frac{d\dot\eta_k}{dt}=p_k\eta_{k-1}-(p_k+\mu_{k+1}p_{k+1})\eta_k+\mu_{k+1}p_{k+1}\eta_{k+1}\qquad (k=1,\dots,N)$$

Рассмотрим определенно положительную квадратичную форму переменных $\eta_1,\dots,\eta_N;\ \dot\eta_1,\dots,\dot\eta_N$ с постоянными коэффициентами

$$U=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\mu_1\dots\mu_k\left[p_k(\eta_k-\eta_{k-1})^2+\dot\eta_k^2\right]\qquad (\mu_1=1,\ \eta_0=0)$$

Производная ее, взятая в силу выписанных уравнений, равна нулю, что и устанавливает ограниченность решений.



Фиг. 2

Пример. Однозвенная свободная целиком упругая колебательная цепь представляет собой математический маятник массы m на пружине длиной l в ненапряженном состоянии и жесткостью c (фиг. 2). Система уравнений (4.3) сводится к одному

$$m\ddot y_0+cy_0=0$$

и будем иметь для невозмущенного движения

$$x\equiv 0,\qquad y=y_0(t)=Y\cos\omega t\qquad \left(\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}\right)$$

Уравнения в вариациях (4.5) и (4.6) запишутся в виде (5.1)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\omega^2\left[1-\frac{1}{1+\gamma+Y\cos\omega t}\right]\xi=0,\qquad \frac{d^2\eta}{dt^2}+\omega^2\eta=0$$

Заметим, что выполнение условия (1.8) не является внутренним свойством самой механической системы и выбранного невозмущенного движения, а определяется также и выбором лагранжевых координат. Если в рассматриваемом примере перейти к полярным координатам, то будем иметь

$$T=\frac{1}{2}m(\rho^2\dot\varphi^2+\dot\rho^2),\qquad V=\frac{1}{2}c(\rho-l)^2-mg\rho\cos\varphi$$

и уравнения Лагранжа при отсутствии сил сопротивления запишутся в виде

$$2\rho\dot\rho\dot\varphi+\rho^2\ddot\varphi=-g\rho\sin\varphi,\qquad \ddot\rho-\rho\dot\varphi^2=-\frac{c}{m}(\rho-l)+g\cos\varphi$$

Принятое за невозмущенное движение вертикальное колебание массы m выразится теперь в прежних обозначениях как

$$\varphi=\varphi_0\equiv 0,\qquad \rho=\rho_0(t)=l+\lambda+Y\cos\omega t$$

Формула (1.5) даст для коэффициента $b_{11}^{\tau}(t)$

$$b_{11}(t) = 2m\rho_0\dot{\rho}_0 \not\equiv 0$$

что и означает нарушение условия (1.8). Уравнения в вариациях для возмущенного движения ($\varphi = 0 + \Phi$, $\rho = \rho_0(t) + \mathrm{P}$) примут в полярных координатах вид

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} - 2\frac{a\sin\tau}{1+\gamma+a\cos\tau}\frac{d\Phi}{d\tau} + \frac{\gamma}{1+\gamma+a\cos\tau}\Phi = 0$$

$$\frac{d^2\mathrm{P}}{d\tau^2} + \mathrm{P} = 0 \qquad \left(\gamma = \frac{\lambda}{l},\ a = \frac{Y}{l},\ \tau = \omega t\right)$$

Как видим, появление члена с первой производной в уравнениях в вариациях возможно и в консервативной системе.

Возвратимся к декартовым координатам и, вводя безразмерное время $\tau = \omega t$, запишем дифференциальные уравнения возмущенного движения в виде

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\gamma + a\cos\tau}{1+\gamma+a\cos\tau}\xi + \mathrm{H}(\tau, \xi, \eta) = 0, \qquad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \eta + \chi(\tau, \xi, \eta) = 0$$

Здесь, как и выше, γ и a обозначают безразмерные параметры, выражающие отношение статического удлинения и амплитуды вертикальных колебаний к недеформированной длине пружины

$$\gamma = \frac{\lambda}{l}, \qquad a = \frac{Y}{l}$$

Устойчивость либо неустойчивость тривиального решения уравнений в вариациях (5.1) определяется таковой для первого из уравнений (5.1). Однако в рассматриваемом консервативном случае устойчивость тривиального решения системы (5.1) не определяет вообще устойчивости невозмущенного движения по отношению к переменным x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$; так как имеет место один из критических случаев. Неустойчивость же тривиального решения системы (5.1) влечет за собой (за исключением быть может граничных случаев) неустойчивость невозмущенного движения ([2] п. 70) по отношению к переменным x, y; $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Это обусловлено тем, что первое из уравнений в вариациях имеет своим коэффициентом периодическую функцию и при неустойчивости его тривиального решения наинизшее характеристичное число в смысле Ляпунова отрицательно.

Переходя к исследованию неустойчивости тривиального решения уравнения

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\gamma + a\cos\tau}{1+\gamma+a\cos\tau}\xi = 0 \tag{5.2}$$

начнем, однако, с критерия Жуковского [6] гарантирующего устойчивость при выполнении неравенств

$$\frac{k^2}{4} \leqslant p(t) \leqslant \frac{(k+1)^2}{4} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

При условии $a < 1 + \gamma$, выражающем естественное ограничение, что амплитуда продольных колебаний меньше статически напряженной длины пружины, имеем

$$\inf p(\tau) = \frac{\gamma - a}{1+\gamma-a}, \qquad \sup p(\tau) = \frac{\gamma + a}{1+\gamma+a}$$

Критерий Жуковского требует выполнения неравенств

$$a \leqslant \gamma, \qquad a \leqslant \frac{1}{3} - \gamma \qquad (\text{при } k = 0)$$

либо неравенства

$$a \leqslant -\frac{1}{3} + \gamma \qquad (\text{при } k = 1)$$

При $k > 1$ критерий отказывает. Результирующая область устойчивости тривиального решения уравнения (5.2), доставляемая применением критерия Жуковского, заштрихована на фиг. 3. Проделанное построение окажется полезным для сопоставления с областью неустойчивости.

Для отыскания области неустойчивости по методу малого параметра [7,8] примем a за малый параметр и запишем уравнение (5.2) в виде

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+[p_0(\gamma)+ap_1(\tau,\gamma)+a^2p_2(\tau,\gamma)+\ldots]\,\xi=0$$

при этом

$$p_0(\gamma)=\frac{\gamma}{1+\gamma},\qquad p_1(\tau,\gamma)=2p_1^{(1)}(\gamma)\cos\tau\qquad\left(p_1^{(1)}(\gamma)=\frac{1}{2(1+\gamma)^2}\right)$$

В скалярном случае области неустойчивости в плоскости параметров $a\gamma$ могут примыкать на оси $a=0$ к тем точкам γ_m, которые являются корнями уравнения

$$2\sqrt{p_0(\gamma_m)}=m\quad\text{или}\quad\gamma_m=\frac{m^2}{4-m^2}\qquad(m=1,2,\ldots)$$

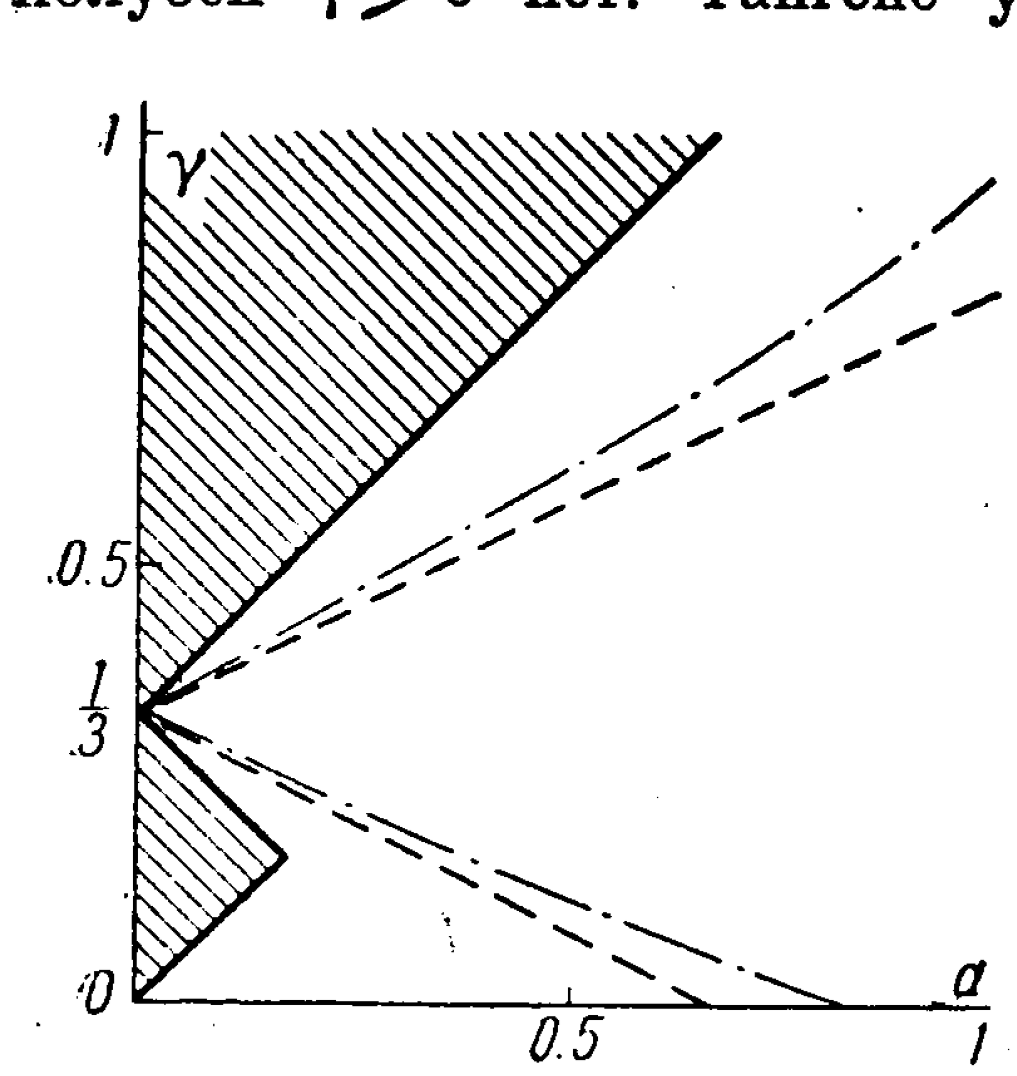
При $\gamma>0$ широкая область неустойчивости (т. е. с отличным от нуля углом между касательными) примыкает лишь к точке $\gamma_1={}^1/_3$ и других таких точек на полуоси $\gamma>0$ нет. Тангенс угла наклона касательной в нашем примере определится по формуле, получаемой из формулы (6) [8]

$$\chi^{\pm}=\pm\left[\frac{p_1^{(1)}(\gamma)}{dp_0/d\gamma}\right]_{\gamma=\gamma_1}=\pm\frac{1}{2}$$

Отсюда определяется в первом приближении область неустойчивости вертикальных колебаний маятника на пружине

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+\ldots<\gamma<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a+\ldots$$

Лучи, ограничивающие эту область, обозначены на фиг. 3 пунктиром.



Фиг. 3

Из общей теории следует, что так как

$$\left.\frac{dp_0}{d\gamma}\right|_{\gamma=\gamma_1}\neq 0$$

то уравнения границ будут аналитическими функциями параметра a, поэтому отброшенные члены по порядку не ниже a^2. Следующие коэффициенты разложений можно вычислить, воспользовавшись тем, что на границах этой области неустойчивости существует антипериодическое (поскольку m нечетно) решение. Приведем лишь окончательный результат: во втором приближении область неустойчивости определяется из неравенств

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+\frac{15}{128}a^2+\ldots<\gamma<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a+\frac{15}{128}a^2+\ldots$$

Ограничивающие эту область кривые даны на фиг. 3 штрих-пунктирной линией.

Из опытов известно [3], что возмущение вертикальных колебаний при наличии сил сопротивления имеет место для маятника на пружине с $\lambda\approx{}^1/_3 l$, т. е. при $\gamma\approx{}^1/_3$. Исследование происходящего при этом перехода продольных колебаний в поперечные намечено Меттлером [3]. Им используется метод медленно меняющейся амплитуды и фазы, предложенный Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым [9] и развитый Ю. А. Митропольским [10].

Вывод. Области «консервативной неустойчивости» будут порождать в диссипативном случае области неустойчивости вертикальных колебаний. Несмотря на асимптотическое затухание колебаний, которое при не столь большой диссипации будет идти медленно, практически большие изменения колебаний за счет авторезонанса в цепи могут оказаться весьма существенными для оценки работы системы.

Приношу благодарность аспиранту ЛГУ Б. Г. Питтелю, выполнившему вычисления в примере.

Поступила 17.V. 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2-е, ГИТТЛ, 1955.
3. Mettler E. Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme. Ing.-Archiv, 1959, Bd. XXVIII, S. 213—228.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. ГИФМЛ, 1959.
5. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Изд. 2-ое, ГИТТЛ, 1950.
6. Жуковский Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $d^2y / dx^2 + py = 0$. Матем. сборн., 1892, т. XVI, вып. 3, стр. 582—591.
7. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, 1956.
8. Якубович В. А. О динамической устойчивости упругих систем. ДАН СССР, 1958, т. 121, № 4, стр. 602—605.
9. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, 1937.
10. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Л. С. Гноенский (Москва)

1. При создании управляющих систем встречается следующая задача. Система описывается уравнениями

$$\dot{x}_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)\, x_k = b_j u(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

$$|u(t)| \leqslant m \tag{2}$$

Решение $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет при $t = 0$ начальным условиям $x = x_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$. Задается множество N_k такое, что если $x(x_1, \ldots, x_n) \in N_k$, то

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \ldots, \qquad x_k = a_k$$

Здесь $a_1, \ldots, a_k$ — некоторые постоянные. Предположим, что существует множество V управляющих функций $u(t)$, удовлетворяющих (2), такое, что, если $u(t) \in V$, то решение системы (1) переходит из точки x_0 в множество N_k. Требуется найти такую функцию $u_{\min}(t)$ из V, которая переводит решение из точки x_0 в множество N_k за наименьшее время. Задача эта рассматривалась в работах [1–5] и др., и для нее были получены самые общие результаты.

Ниже для частного, но достаточно важного для приложений случая $k=2$ излагается несколько иной способ нахождения $u_{\min}(t)$. Он основан на одном обобщении метода накопления возмущений.

Предлагаемый метод близок к методу, приведенному в работе [3]. Он, однако, имеет некоторые особенности, которые, по-видимому, иногда могут быть полезными в приложениях.

Как известно, решение системы (1) может быть представлено в виде

$$x_j(t) = x_{j0}(t) + \int_0^t K_j(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau, \qquad (j = 1, \ldots, n), \qquad x_{j0}(0) = x_{j0} \tag{3}$$

Пусть A_i — принадлежащее положительной полуоси множество точек t, на котором

$$m \int_0^t |K_i(t, \tau)|\, d\tau \geqslant |a_i - x_{i0}(t)| \equiv |n_i(t)| \qquad (i = 1, 2)$$