Здесь использованы соотношения (28) и (29).

Для примера рассмотрим контактную задачу о вдавливании жесткого клина в полуплоскость, материал которой обладает свойством установившейся ползучести. Рассмотрим случай, когда ширина контакта известна (фиг. 2).

Имеем следующие исходные данные:

$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \qquad a = 2\ \text{см}, \qquad P = 100\ \text{кг/см}$$

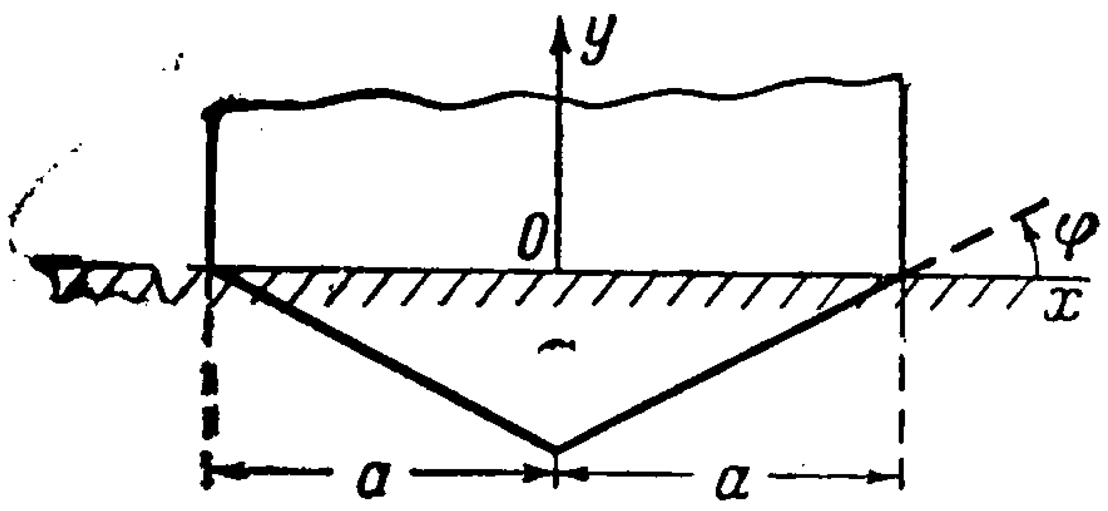
Связь между интенсивностями напряжений и скоростями деформации в соответствии с экспериментальными данными можно представить в виде [4]:

для хромникель-вольфрамовой стали ЭU123

$$\sigma_i = 0.1797 \cdot 10^9\, \dot{\varepsilon}_i^{0.82} \qquad (\mu = 0.82 > 0.5) \qquad (36)$$

для углеродистой стали

$$\sigma_i = 0.44065 \cdot 10^4\, \dot{\varepsilon}_i^{0.33} \qquad (\mu = 0.33 < 0.5) \qquad (37)$$



Фиг. 2

Для этих материалов приводим значения γ, определяемые решением уравнения (31) численно, а также вычисленные при этих значениях γ по формуле (35) значения $p(x)$ в точках $x = 0$ и $x = a/2$:

для хромникель-вольфрамовой стали ЭU123

$$(36)\ \gamma = -0.789105 \cdot 10^{10}, \qquad p(0) = \infty, \qquad p(a/2) = 0.196806 \cdot 10^{10}$$

для углеродистой стали

$$(37)\ \gamma = 2.876589 . 10^{10}, \qquad p(0) = \infty, \qquad p(a/2) = 0.784078 \cdot 10^{7}$$

Поступила 23 VIII 1961

Ереванский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Изв. физ.-мат. наук АН АрмССР, 1959, № 2.
2. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. ДАН СССР, 1955, т. 100, № 3.
4. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Машгиз, 1958, т. II.

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. Г. Терегулов

(Казань)

Составим функционал

$$J = \iiint\limits_{V_*} \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{u} dV_* + \iint\limits_{S_*} \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{u} dS_* - \iiint\limits_{V_*} \left\{ W_* + F_* + \frac{1}{2} \sigma_*^{ik}\, \partial_i \mathbf{u} \cdot \partial_k \mathbf{u} \right\} dV_* \qquad (1)$$

Здесь S_* — граница части трехмерного пространства V_*, занятого деформированным телом. В объеме V_* введена параметризация x^i $(i = 1, 2, 3)$ с метрическим тензором g_{ik}^*. Вектор массовых сил $\mathbf{Q}^*$ и вектор поверхностных нагрузок $\mathbf{P}_*$ отнесены к единице объема в V_* и к единице площади на поверхности S_* соответственно; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений точек тела; $\sigma_*^{ik} = \sigma_*^{ki}$ — контравариантные составляющие тензора напряжений, отнесенные к единице площади в деформированном теле; $F_* = F_*(\sigma_*^{ik})$ — функция тензора напряжений, $W_* = W_*(\varepsilon_{ik}^*)$ — функция тензора деформаций $\varepsilon_{ik}^* = \varepsilon_{ki}^*$.

Вариационная теорема формулируется следующим образом. Среди всех возможных перемещений $\mathbf{u}$, совместных с геометрическими связями, напряжений σ_*^{ik}, не нарушающих статистических условий внутри и на границе тела, и деформаций ε_{ik}^* в действительности имеют место лишь те, которые функционалу J сообщают стационарное значение.

Таким образом, при выполнении всех соотношений нелинейной теории упругости должно быть $\delta J = 0$, а из $\delta J = 0$ наоборот должны следовать все соотношения нелинейной теории упругости.

Функционал J можно представить в виде

$$J = \iiint\limits_V \mathbf{Q}\cdot\mathbf{u}dV + \iint\limits_S \mathbf{P}\cdot\mathbf{u}dS - \iiint\limits_V \left\{W + F + \frac{1}{2}\sigma^{ik}\,\partial_i\mathbf{u}\cdot\partial_k\mathbf{u}\right\} dV \tag{2}$$

где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_*\sqrt{\frac{g_*}{g}},\qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}_*\sqrt{\frac{a_{(s)}{}^*}{a_{(s)}}},\qquad W = W_*\sqrt{\frac{g_*}{g}},\qquad F = F_*\sqrt{\frac{g_*}{g}},$$

$$\sigma^{ik} = \sigma_*{}^{ik}\sqrt{\frac{g_*}{g}},\qquad g_* = \det(g_{ik}{}^*),\qquad g = \det(g_{ik}),\qquad a_{(s)} = \det(a_{\alpha\beta}^{(s)}),\ldots \tag{3}$$

Здесь S — граница части пространства V, занятого телом до деформации; $a_{\alpha\beta}^{(s)}$ — метрический тензор на поверхности S, g_{ik} — метрический тензор в пространстве V с параметризацией x^i, в которую переходит параметризация пространства V_*.

Первая вариация функционала J дает

$$\delta J = \iiint\limits_V \mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{u}\,dV + \iint\limits_S \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}\,dS - \iiint\limits_V \sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik}{}^*\,dV + \iiint\limits_V \left\{\sigma^{ik} - \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ik}{}^*}\right\}\delta\varepsilon_{ik}{}^*\,dV +$$
$$+ \iiint\limits_V \mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{Q}\,dV + \iint\limits_S \mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{P}\,dS - \iiint\limits_V \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma^{ik}} + \frac{1}{2}\,\partial_i\mathbf{u}\cdot\partial_k\mathbf{u}\right)\delta\sigma^{ik} + \sigma^{ik}\partial_i\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{r}_k{}^*\right\} dV \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{r}_i{}^*$, $\mathbf{r}_i$ — координатные векторы в пространствах V_* и V соответственно ($\mathbf{r}_i{}^* = \mathbf{r}_i + \partial_i\mathbf{u}$, $\delta\mathbf{r}_i{}^* = \delta\partial_i\mathbf{u}$).

Так как вариации напряженного состояния не нарушают статических условий внутри и на границе тела, то

$$\frac{\partial\delta\left(\sigma^{ik}\,\mathbf{r}_k{}^*\sqrt{g}\right)}{\sqrt{g}\,\partial x^i} + \delta\mathbf{Q} = 0,\qquad \delta\left(\sigma^{ik}\mathbf{r}_k{}^* n_i\right) + \delta\mathbf{P} = 0 \tag{5}$$

Заменяя в соответствии с этими условиями $\delta\mathbf{Q}$ и $\delta\mathbf{P}$ в (4), получим

$$\delta J = \iiint\limits_V \mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{u}\,dV + \iint\limits_S \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}\,dS - \iiint\limits_V \sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik}{}^*\,dV + \iiint\limits_V \left\{\sigma^{ik} - \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ik}{}^*}\right\}\delta\varepsilon_{ik}{}^*dV -$$
$$- \iiint\limits_V \mathbf{u}\cdot\nabla_i\delta\left(\sigma^{ik}\,\mathbf{r}_k{}^*\right) dV - \iint\limits_S \mathbf{u}\delta\left(\sigma^{ik}\mathbf{r}_k{}^* n_i\right)dS -$$
$$- \iiint\limits_V \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma^{ik}} + \frac{1}{2}\,\partial_i\mathbf{u}\cdot\partial_k\mathbf{u}\right)\delta\sigma^{ik} + \sigma^{ik}\,\partial_i\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{r}_k{}^*\right\} dV \tag{6}$$

Здесь n_i — ковариантные составляющие внутренней нормали к S, а $\nabla_i(\ldots)$ — знак ковариантной производной по метрике g_{ik}.

Для дальнейших преобразований воспользуемся формулой перехода от объемного интегрирования к интегрированию по поверхности:

$$\iiint\limits_V \mathbf{u}\cdot\nabla_i\delta\left(\sigma^{ik}\mathbf{r}_k{}^*\right) dV = \iiint\limits_V \nabla_i\left[\mathbf{u}\cdot\delta\left(\sigma^{ik}\,\mathbf{r}_k{}^*\right)\right] dV - \iiint\limits_V \delta\left(\sigma^{ik}\mathbf{r}_k{}^*\right)\cdot\nabla_i\mathbf{u}\,dV =$$
$$= -\iint\limits_S \mathbf{u}\cdot\delta\left(\sigma^{ik}\mathbf{r}_k{}^*\right) n_i dS - \iiint\limits_V \nabla_i\mathbf{u}\cdot\left(\mathbf{r}_k{}^*\delta\sigma^{ik} + \sigma^{ik}\delta\mathbf{r}_k{}^*\right) dV \tag{7}$$

Учет этого преобразования дает возможность δJ представить в следующем виде:

$$\delta J = \iiint\limits_V \mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{u}\,dV + \iint\limits_S \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}\,dS - \iiint\limits_V \sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik}{}^*dV + \iiint\limits_V \left\{\sigma^{ik} - \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ik}{}^*}\right\}\delta\varepsilon_{ik}^*\,dV -$$
$$- \iiint\limits_V \left\{\frac{\partial F}{\partial\sigma^{ik}} + \frac{1}{2}\,\partial_i\mathbf{u}\cdot\partial_k\mathbf{u} - \partial_i\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}_k{}^*\right\}\delta\sigma^{ik}dV \tag{8}$$

Так как

$$\partial_i \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}_k{}^* = \partial_i \mathbf{u}\cdot(\mathbf{r}_k + \partial_k \mathbf{u}) = \nabla_i u_k + \nabla_i u_n \nabla_k u^n = \nabla_i{}^* u_k{}^* \tag{9}$$

то

$$\delta J = \iiint\limits_V \mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{u}\, dV + \iint\limits_S \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}\, dS - \iiint\limits_V \sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik}{}^* dV + \iiint\limits_V \left\{\sigma^{ik} - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}{}^*}\right\}\delta\varepsilon_{ik}{}^* dV -$$

$$- \iiint\limits_V \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ik}} - \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_k + \nabla_k u_i + \nabla_i u_n \nabla_k u^n\right)\right\}\delta\sigma^{ik} dV \tag{10}$$

или

$$\delta J = \iiint\limits_V \mathbf{Q}\cdot\delta u\, dV + \iint\limits_S \mathbf{P}\delta\mathbf{u}\, dS - \iiint\limits_V \sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik}{}^* dV + \iiint\limits_V \left\{\sigma^{ik} - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}{}^*}\right\}\delta\varepsilon_{ik}{}^* dV -$$

$$- \iiint\limits_V \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ik}} - \frac{1}{2}(\nabla_i{}^* u_k{}^* + \nabla_k{}^* u_i{}^* - \nabla_i{}^* u_n{}^* \nabla_k{}^* u_*{}^n)\right\}\delta\sigma^{ik} dV - \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{u} = u_i \mathbf{r}^i = u_i{}^* \mathbf{r}_*{}^i$, а $\nabla_i{}^*(\ldots)$ — ковариантная производная по метрике g_{ik}^*. Пусть W — потенциал тензора напряжений, а F — потенциал тензора деформаций:

$$\sigma^{ik} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}{}^*}, \qquad \varepsilon_{ik}{}^* = \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ik}} \tag{12}$$

Если условия совместности деформаций выполнены, то последние интегралы в (10) или (11) обращаются в нуль. Выполнение соотношений упругости влечет за собой обращение в нуль последнего из оставшихся интегралов в (10) или (11).

Совокупность оставшихся интегралов дает не что иное, как вариационное соотношение Лагранжа, которое обращается в нуль при удовлетворении уравнениям равновесия и краевым условиям.

Таким образом, для истинного состояния $\delta J = 0$. Наоборот, из $\delta J = 0$ следуют все соотношения нелинейной теории упругости. Действительно, так как $\delta\sigma^{ik}$ не зависит от $\delta\varepsilon_{ik}{}^*$ и $\delta\mathbf{u}$, то из последнего интеграла в (10) или (11) при $\delta J = 0$ следует

$$2\varepsilon_{ik}{}^* = \nabla_i{}^* u_k{}^* + \nabla_k{}^* u_i{}^* - \nabla_i{}^* u_n{}^* \nabla_k{}^* u^{*n} \tag{13}$$

или

$$2\varepsilon_{ik} = \nabla_i u_k + \nabla_k u_i + \nabla_i u_n \nabla_k u_n^* \tag{14}$$

Из этих соотношений следует [1] $\sigma^{ik}\,\delta\varepsilon_{ik}{}^* = \sigma^{ik}\mathbf{r}_i{}^* \dfrac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial x^k}$. Тогда

$$\delta J = \iiint\limits_V \{\nabla_i(\sigma^{ik}\mathbf{r}_k{}^*) + \mathbf{Q}\}\,\delta\mathbf{u}\, dV + \iint\limits_S \{\sigma^{ik}\mathbf{r}_k{}^* n_i + \mathbf{P}\}\,\delta\mathbf{u}\, dS +$$

$$+ \iiint\limits_U \left\{\sigma^{ik} - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}{}^*}\right\}\delta\varepsilon_{ik}{}^* dV = 0 \tag{15}$$

Из этого вариационного уравнения имеем уравнения равновесия

$$\triangle_i(\sigma^{ik}\mathbf{r}_k{}^*) + \mathbf{Q} = 0$$

естественно краевые статистические условия

$$\sigma^{ik}\mathbf{r}^{*k} n_i + \mathbf{P} = 0$$

или соответствующие им предварительные геометрические условия $\delta\mathbf{u} = 0$ и соотношения упругости

$$\sigma^{ik} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}{}^*}$$

Поступила 18 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Галимов К. З. К теории конечных деформаций. Уч. зап. Каз. ун-та, 1949, т. 109, кн. I.