О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО КЛИНА В ПОЛУПЛОСКОСТЬ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

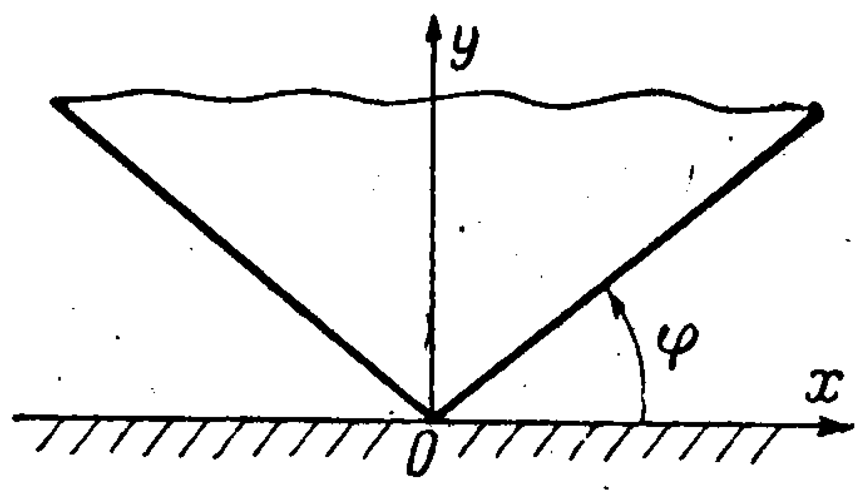
Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян

(Ереван)

Рассматривается задача о вдавливании жесткого клина в полуплоскость, находящуюся в условиях установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и скоростями деформации[1]. Задача решается методом, развитым в работах [1,2].

Имеем плоский клин. Начало координат поместим в точке O и направим координатные оси x и y, как показано на фиг. 1. Тогда уравнение поверхности клина будет

$$f(x) = k\,|x| \qquad (k = \operatorname{tg}\varphi) \tag{1}$$



Фиг. 1

Здесь φ — угол, составленный гранью клина с осью Ox.

Положим, что между интенсивностями напряжений ползучести σ_i и скоростями деформации ε_i существует степенная зависимость вида

$$\sigma_i = K\varepsilon_i^{\mu} \tag{2}$$

где K — константа ползучести, μ — показатель ползучести, определяемые из опытов при испытании на простую ползучесть, причем $0 < \mu < 1$.

Пусть первоначальное касание клина в плоскости xy происходит в одной точке, которая принята за начало координат. Положим далее, что областью кантакта после сжатия будет отрезок $-a \leqslant x \leqslant a$ оси x.

Тогда, как показано в работе [1], интегральное уравнение рассматриваемой задачи примет вид

$$\int_{-a}^{a} \frac{p(s)\,ds}{|s-x|^{1-\mu}} = [\gamma - \alpha\,|x|]^{\mu} \qquad (-a \leqslant x \leqslant a), \qquad \alpha = \frac{k}{A} \tag{3}$$

Здесь $p(s)$ — интенсивность давления на участке контакта, γ — некоторая произвольная постоянная, подлежащая определению в дальнейшем, A — известная постоянная величина, выражение которой определяется формулами [1]

$$A = \frac{(m-2)\sin(l\pi/2)}{K^m (m-1) J^m(\mu)} \qquad \left(l = \frac{\sqrt{2\mu-1}}{\mu}\right)$$

$$J(\mu) = 4l^{\mu}\int_0^{\pi/2} (\cos l\theta)^{\mu} \cos\theta\, d\theta \qquad \left(m = \frac{1}{\mu}\right) \qquad \text{для } \mu > \frac{1}{2} \tag{4}$$

---

[1] Отметим, что здесь выбор теории установившейся ползучести при степенном законе (2) не вызывается сущностью излагаемого метода решения. Можно было бы исходить из теории деформационного упрочнения, уравнение которой

$$\varepsilon_i = A\sigma_i^{\,p/(q+1)} t^{1/(q+1)} \qquad (a,\ p,\ q = \text{const})$$

или из теории пластической наследственности, уравнение которой

$$\varphi^*(\varepsilon_i) = K\varepsilon_i^{\mu}(t) = \sigma_i(t) - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i(\tau)\, \frac{\partial c(t,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau$$

Здесь $c(t,\tau)$ — мера ползучести материала, а $\varphi^*(\varepsilon_i)$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между его напряжениями и деформациями. Поставленная контактная задача здесь решается в условиях установившейся ползучести только для простоты изложения.

$$A = \frac{(m-2)\,\mathrm{sh}\,(\lambda\pi/2)}{K^m\,(m-1)\,J^m(\mu)} \qquad \left(\lambda = \frac{\sqrt{1-2\mu}}{\mu}\right)$$

$$J(\mu) = 4\lambda^{\mu}\int\limits_0^{\pi/2}(\mathrm{ch}\,\lambda\theta)^{\mu}\cos\theta d\theta \qquad \text{для} \quad \mu < \frac{1}{2} \tag{5}$$

Общее решение интегрального уравнения (3) согласно [3] будет

$$p(x) = \frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int\limits_{-a}^{a} g(s,\,a)\,F(s,\,\gamma)\,ds\right] g(x,\,a) - \tag{6}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_x^a g(x,\,u)\,\frac{d}{du}\left[\frac{1}{M'(u)}\,\frac{d}{du}\int\limits_{-u}^{u} g(s,\,u)\,F(s,\,\gamma)\,ds\right] du -$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\int\limits_x^a \frac{g(x,\,u)}{M'(u)}\left[\int\limits_{-a}^{a} g(s,\,u)\,F'(s,\,\gamma)\,ds\right] du$$

Здесь

$$M(u) = \int\limits_0^u g(s,\,u)\,ds \qquad (0 \leqslant u \leqslant a) \tag{7}$$

$$g(s,\,u) = \frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}, \qquad F(s,\,\gamma) = [\gamma - \alpha\,|\,s\,|]^{\mu} \tag{8}$$

В силу того, что $g(s,\,u)$ — четная функция, а $F'(s,\,\gamma)$, как это следует из (8),— нечетная функция, последний член в правой части формулы (6) пропадает и выражение $p(x)$ после некоторых преобразований принимает следующий вид:

$$p(x) = K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu}\Phi_1'(a,\,\gamma)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} - \int\limits_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\,\frac{d}{du}[u^{\mu}\Phi_1'(u,\,\gamma)]\right\} \tag{9}$$

где

$$K(\mu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\pi^2}\,\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin^2\frac{\pi\mu}{2} \tag{10}$$

$$\Phi_1(u,\,\gamma) = \int\limits_0^u \frac{F(s,\,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}, \qquad \Phi_1'(u,\,\gamma) = \frac{d}{du}\int\limits_0^u \frac{F(s,\,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} \tag{11}$$

Путем замены переменной $s = u\sin\varphi$ выражение для $\Phi_1(u,\,\gamma)$ можно представить в виде интеграла с постоянными пределами

$$\Phi_1(u,\,\gamma) = u^{1-\mu}\int\limits_0^{\pi/2} F(u\sin\varphi,\,\gamma)\cos^{1-\mu}\varphi d\varphi \tag{12}$$

Предполагая для функции $F(s,\,\gamma)$ существование непрерывной и ограниченной производной при $s > 0$, после дифференцирования под знаком интеграла (12) получим

$$u\Phi_1'(u,\,\gamma) = (1-\mu)\,\Phi_1(u,\,\gamma) + \int\limits_0^u \frac{sF'(s,\,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} \tag{13}$$

Пользуясь (12), нетрудно непосредственным дифференцированием убедиться, что

$$\frac{d}{du}[u^{\mu}\Phi_1'(u,\,\gamma)] = u^{\mu-1}\frac{d}{du}\int\limits_0^u \frac{sF'(s,\,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} \tag{14}$$

Произведя интегрирование по частям в правой части равенства (14) и дифференцируя затем полученное выражение по u, будем иметь

$$\frac{d}{du}[u\Phi_1'(u,\,\gamma)] = u^{\mu}\int\limits_0^u \frac{F''(s,\,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} + F'(0,\,\gamma) \tag{15}$$

Подставляя это выражение в равенство (9), получим (16)

$$p(x) = K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu}\Phi_1'(a,\gamma)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} - \int_a^x \frac{u^{\mu}\,du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\int_0^u \frac{F''(s,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} - F'(0,\gamma)\int_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\right\}$$

Здесь для производной $F'(0,\gamma)$, очевидно, можно взять ее правый предел

$$F'(0,\gamma) = F'(+0,\gamma) = -\alpha\mu\gamma^{\mu-1} \tag{17}$$

Окончательно имеем

$$p(x) = K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu}\Phi_1'(a,\gamma)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} + \alpha^2\mu(1-\mu)\int_a^x \frac{u^{\mu}\,du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\int_0^u \frac{(\gamma-\alpha s)^{\mu-2}\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} + \right.$$

$$\left. + \alpha\mu\gamma^{\mu-1}\int_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\right\} \tag{18}$$

1°. Рассмотрим случай, когда длина контакта известна. В формуле (18) первый член представляет решение с особенностями в точках $x = \pm a$ и подлежит сохранению только в случае заданной ширины контакта $2a$. При этом постоянная γ определяется из уравнения равновесия

$$P = 2\int_0^a p(x)\,dx \tag{19}$$

Подставляя сюда выражение для $p(x)$ из (18) в уравнение (19), получим

$$P = 2K(\mu)\left\{a\Phi_1'(a,\gamma)\frac{\sin(\pi\mu/2)}{2(1-\mu)K(\mu)\pi} + \alpha\mu\gamma^{\mu-1}\int_0^a dx\int_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^a dx\int_x^a \frac{u^{\mu}du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\int_0^u \frac{F''(s,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\right\} \tag{20}$$

Здесь использовано равенство интеграла

$$J_1 = \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} = \frac{\sin(\pi\mu/2)}{2(1-\mu)K(\mu)\pi}\,u^{1-\mu} \tag{21}$$

Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом выражения (20), найдем

$$\int_0^a dx\int_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}} = \int_0^a du\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}} = \frac{\sin(\pi\mu/2)}{2(1-\mu)(2-\mu)K(\mu)\pi}\,a^{2-\mu} \tag{22}$$

Тогда (20) примет вид

$$P = \frac{1}{(1-\mu)\pi}\sin\frac{\pi\mu}{2}\left[a\Phi_1'(a,\gamma) + \frac{\alpha\mu\gamma^{\mu-1}}{2-\mu}a^{2-\mu}\right] -$$

$$-2K(\mu)\int_0^a dx\int_x^a \frac{u^{\mu}\,du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\int_0^u \frac{F''(s,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} \tag{23}$$

Меняя порядок интегрирования в последнем слагаемом выражения (23) и пользуясь равенством (21), найдем

$$J_2 = \int_0^a dx\int_x^a \frac{u^{\mu}\,du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\int_0^u \frac{F''(s,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} = \frac{\sin(\pi\mu/2)}{2(1-\mu)K(\mu)\pi}\int_0^a u\,du\int_0^u \frac{F''(s,\gamma)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} \tag{24}$$

Далее, применяя формулу Дирихле и замечая при этом, что

$$\int_s^a \frac{u\,du}{\sqrt{(u^2-s)^{\mu}}} = \frac{1}{2-\mu}(a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}} \tag{25}$$

выражению J_2 можно придать вид

$$J_2 = \frac{\sin(\pi\mu/2)}{2(1-\mu)(2-\mu)K(\mu)\pi}\int_0^a (a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}F''(s,\gamma)\,ds. \tag{26}$$

Подставляя значение J_2 из (26) в (23), получим

$$P=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{(1-\mu)\pi}\left\{a\Phi_1'(a,\gamma)+\frac{\alpha\mu\gamma^{\mu-1}}{2-\mu}a^{2-\mu}-\frac{1}{2-\mu}\int\limits_0^a(a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}F''(s,\gamma)\,ds\right\} \quad (27)$$

Если в соотношении (13) последнее слагаемое проинтегрировать по частям, используя при этом выражение (17), то оно примет вид

$$u\Phi_1'(u,\gamma)=(1-\mu)\Phi_1(u,\gamma)-\frac{\alpha\mu\gamma^{\mu-1}}{2-\mu}u^{2-\mu}+\frac{1}{2-\mu}\int\limits_0^u(u^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}F''(s,\gamma)\,ds \quad (28)$$

Пользуясь соотношением (28), уравнение (27) можно привести к виду

$$\Phi_1(a,\gamma)=\frac{P\pi}{\sin(\pi\mu/2)} \quad (29)$$

где

$$\Phi_1(a,\gamma)=\int\limits_0^a\frac{F(s,\gamma)\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^{\mu}}},\qquad F(s,\gamma)=(\gamma-\alpha|s|)^{\mu} \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), получим

$$\int\limits_0^a\frac{(\gamma-\alpha s)^{\mu}\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^{\mu}}}=\frac{P\pi}{\sin(\pi\mu/2)} \quad (31)$$

Таким образом, если ширина контакта $2a$ задана, то постоянная γ, входящая в формулу (18), определяется из уравнения (31). Это уравнение можно решать при помощи численных методов.

2°. Перейдем к рассмотрению второго случая, когда длина контакта неизвестна. Очевидно, что в этом случае значение γ тоже будет неизвестным. Здесь для определения неизвестных a и γ нужно иметь два уравнения. Одно уравнение получается из требования, чтобы в формуле (18) первый член, представляющий решение с особенностями, исчез, т. е.

$$\Phi_1'(a,\gamma)=\frac{d}{da}\int\limits_0^a\frac{(\gamma-\alpha|s|)^{\mu}}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\,ds=0 \quad (32)$$

а другое уравнение можно получить при помощи уравнения равновесия (19). Подставляя выражение $p(x)$ из (18) в (19) и учитывая равенство (32), после некоторых преобразований получим

$$\Phi_1(a,\gamma)=\int\limits_0^a\frac{(\gamma-\alpha|s|)^{\mu}\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^{\mu}}}=\frac{P\pi}{\sin(\pi\mu/2)} \quad (33)$$

Пользуясь соотношением (27), уравнение (32) можно представить в виде

$$\alpha\mu\gamma^{\mu-1}a^{2-\mu}+\alpha^2\mu(1-\mu)\int\limits_0^a\frac{(a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}\,ds}{(\gamma-\lambda|s|)^{2-\mu}}=(1-\mu)(2-\mu)\frac{P\pi}{\sin(\pi\mu/2)} \quad (34)$$

Для рассматриваемого случая из системы уравнений (33) и (34) определятся величины a и γ. Подставляя найденные значения a и γ в (18), получим выражение $p(x)$.

В некоторых случаях более удобно выражение для $p(x)$ представить в виде:

$$p(x)=K(\mu)\left\{\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}}\left[\frac{1-\mu}{a^{1-\mu}}\frac{P\pi}{\sin(\pi\mu/2)}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{a}{2-\mu}\alpha\mu\gamma^{\mu-1}-\frac{a^{\mu-1}}{2-\mu}\alpha^2\mu(1-\mu)\int\limits_0^a(a^2-s^2)^{1-\frac{\mu}{2}}\frac{ds}{(\gamma-\alpha s)^{2-\mu}}\right]+$$

$$\left.+\alpha^2\mu(1-\mu)\int\limits_a^x\frac{u^{\mu}du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\int\limits_0^u\frac{(\gamma-\alpha s)^{\mu-2}}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\,ds+\alpha\mu\gamma^{\mu-1}\int\limits_x^a\frac{du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\right\} \quad (35)$$

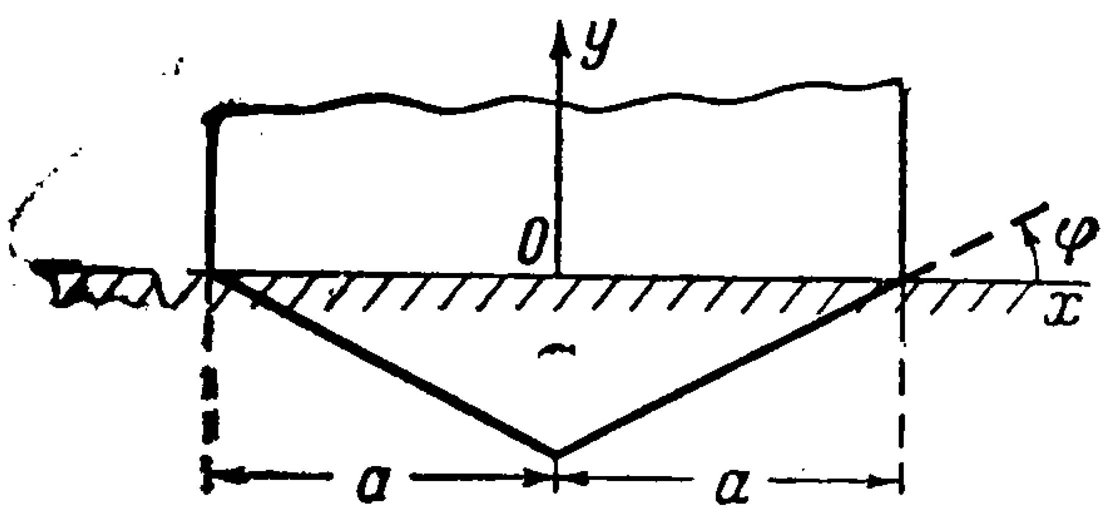
Здесь использованы соотношения (28) и (29).

Для примера рассмотрим контактную задачу о вдавливании жесткого клина в полуплоскость, материал которой обладает свойством установившейся ползучести. Рассмотрим случай, когда ширина контакта известна (фиг. 2).

Имеем следующие исходные данные:

$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \qquad a = 2 \text{ см}, \qquad P = 100 \text{ кг/см}$$

Связь между интенсивностями напряжений и скоростями деформации в соответствии с экспериментальными данными можно представить в виде [4]:



Фиг. 2

для хромникель-вольфрамовой стали ЭU123

$$\sigma_i = 0.1797 \cdot 10^9 \, \varepsilon_i^{0.82} \qquad (\mu = 0.82 > 0.5) \qquad (36)$$

для углеродистой стали

$$\sigma_i = 0.44065 \cdot 10^4 \, \varepsilon_i^{0.33} \qquad (\mu = 0.33 < 0.5) \qquad (37)$$

Для этих материалов приводим значения γ, определяемые решением уравнения (31) численно, а также вычисленные при этих значениях γ по формуле (35) значения $p(x)$ в точках $x = 0$ и $x = a/2$:

для хромникель-вольфрамовой стали ЭU123

$$(36)\ \gamma = -0.789105 \cdot 10^{10}, \qquad p(0) = \infty, \qquad p(a/2) = 0.196806 \cdot 10^{10}$$

для углеродистой стали

$$(37)\ \gamma = 2.876589 . 10^{10}, \qquad p(0) = \infty, \qquad p(a/2) = 0.784078 \cdot 10^{7}$$

Поступила 23 VIII 1961

Ереванский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Изв. физ.-мат. наук АН АрмССР, 1959, № 2.
2. А р у т ю н я н Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. К р е й н М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. ДАН СССР, 1955, т. 100, № 3.
4. П о н о м а р е в С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Машгиз, 1958, т. II.

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. Г. Т е р е г у л о в

(Казань)

Составим функционал

$$J = \iiint\limits_{V_*} \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{u} dV_* + \iint\limits_{S_*} \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{u} dS_* - \iiint\limits_{V_*} \left\{ W_* + F_* + \frac{1}{2} \sigma_*^{ik} \, \partial_i \mathbf{u} \cdot \partial_k \mathbf{u} \right\} dV_* \qquad (1)$$

Здесь S_* — граница части трехмерного пространства V_*, занятого деформированным телом. В объеме V_* введена параметризация x^i $(i = 1, 2, 3)$ с метрическим тензором g_{ik}^*. Вектор массовых сил $\mathbf{Q}^*$ и вектор поверхностных нагрузок $\mathbf{P}_*$ отнесены к единице объема в V_* и к единице площади на поверхности S_* соответственно; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений точек тела; $\sigma_*^{ik} = \sigma_*^{ki}$ — контравариантные составляющие тензора напряжений, отнесенные к единице площади в деформированном теле; $F_* = F_*(\sigma_*^{ik})$ — функция тензора напряжений, $W_* = W_*(\varepsilon_{ik}^*)$ — функция тензора деформаций $\varepsilon_{ik}^* = \varepsilon_{ki}^*$.

Вариационная теорема формулируется следующим образом. Среди всех возможных перемещений $\mathbf{u}$, совместных с геометрическими связями, напряжений σ_*^{ik}, не нарушающих статистических условий внутри и на границе тела, и деформаций ε_{ik}^* в действительности имеют место лишь те, которые функционалу J сообщают стационарное значение.