Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

Г. Я. Попов

(Одесса)

В работах [1—6] и других, посвященных этой задаче, рассматривался случай вдавливания упругого тела (в частности, штампа) в упругое основание, представляющее собой либо полупространство с постоянным или переменным по закону $E = E_\nu z^\nu$ модулем упругости (решения точные), либо упругий однородный слой (решения приближенные).

В настоящей работе методом, не являющимся непосредственным обобщением методов, изложенных в перечисленных работах, приближенно решается контактная задача с круговой областью контакта в случае упругого основания общего типа, частным случаем которого являются и указанные выше.

Касательные взаимодействия по площадке контакта не учитываются.

§ 1. Вначале рассмотрим осесимметричный случай задачи.

Пусть упругое тело (в частности, штамп) с постоянными E_0, μ_0 вдавливается в упругое основание общего типа, для которого справедливо [7]

$$w(r) = \frac{\theta_1}{2\pi} \int_0^\infty G(ht) J_0(rt)\, dt \tag{1.1}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя; $w(r)$ — осадка поверхностной точки основания, расположенной на расстоянии $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ от точки приложения единичной силы; θ_1 и h — некоторые положительные параметры, характеризующие геометрические упругие свойства основания.

Будем считать, что непрерывная функция $G(v)$, аналитический вид которой определяется типом основания, обладает свойством

$$G(\infty) = 1 \tag{1.2}$$

В случае однородного упругого полупространства $G(x) \equiv 1$, а в случае слоя, опирающегося на абсолютно гладкое и жесткое основание

$$G(x) = 2\operatorname{sh}^2 x\,(\operatorname{sh} 2x + 2x)^{-1}, \qquad \theta_m = 2E_m^{-1}(1 - \mu_m^2) \qquad (m = 0, 1) \tag{1.3}$$

В последнем случае роль параметра h играет толщина слоя.

Вид функции $G(x)$ для полупространства с переменным по закону $E = E_0 \exp(\gamma z)$ модулем упругости можно найти в работе [8]. В этом случае роль параметра h играет величина, обратная γ.

Чтобы свести рассматриваемую задачу к интегральному уравнению для контактного напряжения $p(r)$, воспользуемся формулой, полученной в работе [7] и позволяющей вычислить осадки $w_1(r, \rho)$ поверхностных точек основания от воздействия вертикальной нагрузки, сосредоточенной по линии окружности радиуса ρ

$$w_m(r, \rho) = \theta_m \rho \int_0^\infty [G(ht)]^m J_0(rt) J_0(\rho t)\, dt \qquad (m = 0, 1) \tag{1.4}$$

Формулой (1.4), соответствующей при $m = 0$ случаю полупространства, воспользуемся ниже для определения упругих перемещений в теле, вдавливаемом в основание.

Следуя И. Я. Штаерману (см., например, [1], стр. 175), нетрудно получить интегральное уравнение (ср. [7])

$$\int_0^a [w_0(r, \rho) + w_1(r, \rho)]\, p(\rho)\, d\rho = z_0 - z_0(r) - z_1(r) \qquad (r \leqslant a) \tag{1.5}$$

Здесь a — радиус площадки контакта, z_0 — вертикальное перемещение центра тяжести вдавливаемого тела, $z = z_0(r)$ и $z = -z_1(r)$ — уравнения поверхностей, ограничивающих соответственно вдавливаемое тело и основание (в случае, если поверхность основания — плоскость, то $z_0(r) \equiv 0$).

В результате перехода к безразмерным величинам

$$x = r/h, \qquad \xi = \rho/h, \qquad \alpha = a/h$$

вместо (1.5) будем иметь

$$\int_0^\alpha K(x, \xi)\, \xi \varphi(\xi)\, d\xi = f(x) \qquad (x \leqslant \alpha) \tag{1.6}$$

Здесь

$$K(x, \xi) = \sum_{m=0}^{1} \varkappa_m k_m(x, \xi), \qquad \varkappa_m = \frac{\theta_m}{(\theta_0 + \theta_1)} \qquad (m = 0, 1) \tag{1.7}$$

$$k_m(x, \xi) = \int_0^\infty [G(s)]^m J_0(xs) J_0(\xi s)\, ds) \qquad (m = 0, 1) \tag{1.8}$$

$$f(x) = \frac{z_0 - z_0(xh) - z_1(xh)}{\theta_0 + \theta_1} \tag{1.9}$$

Контактное напряжение будет выражаться решением уравнения (1.6) по формуле

$$p(r) = h^{-1} \varphi(r/h) \tag{1.10}$$

Предложенный ниже метод решения уравнения (1.6) основан на приближенном представлении его ядра. Указанное представление получим следующим образом. Учитывая, что[1] $G(s) \to 1$ при $s \to \infty$, функцию $k_1(x, \xi)$ можно представить с большой точностью в виде

$$k_1(x, \xi) \approx \int_0^A G(s) J_0(xs) J_0(\xi s)\, ds + \int_A^\infty J_0(xs) J_0(\xi s)\, ds \tag{1.11}$$

выбрав число A достаточно большим. Нетрудно из (1.11) получить [9]:

$$k_1(x, \xi) \approx k_0(x, \xi) - \int_0^A [1 - G(s)]\, J_0(xs) J_0(\xi s)\, ds \tag{1.12}$$

[1] Например, функция $G(x)$, определяемая формулой (1.3), при $x \to \infty$ монотонно снизу приближается к единице. Уже при $t = 3.2$ она отличается от последней менее чем на 2%.

Последний член можно легко разложить в степенной ряд, если воспользоваться разложением 6.452(2) из [10]. Указанное разложение запишем здесь в следующем виде:

$$J_n(xs)\,J_n(\xi s) = (x\xi)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k_s{}^{2(k+n)}}{4^{k+n}\,k!\,(k+n)!}\,M_k^{(n)}(x, \xi) \tag{1.13}$$

где

$$M_k^{(n)}(x, \xi) = x^{2k}(n!)^{-1}F(-k, -n-k;\, n+1;\, \xi^2/x^2) = \\ = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k+n}{j}\frac{j!}{(j+n)!}\,x^{2(k-j)}\,\xi^{2j} \tag{1.14}$$

Положим здесь $n=0$ и подставим результат под знак интеграла в (1.12); после выполнения почленного интегрирования получим разложение второго члена правой части (1.12) в степенной ряд. Удержав в этом ряду N членов, подставим (1.12) в (1.7), в результате получим нужное приближенное представление

$$K(x, \xi) \approx k_0(x, \xi) - \varkappa_1 \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k C_k M_k^{(0)}(x, \xi)}{4^k (k!)^2} = K^*(x, \xi) \tag{1.15}$$

Здесь[1]

$$C_k = \int_0^A [1 - G(s)]\, s^{2k}\, ds \qquad (k = 0, 1, 2. . .)$$

Для интегрального уравнения (1,6) с ядром $K^*(x, \xi)$ можно построить точное решение. Это решение обозначим также буквой φ, на том основании, что оно будет являться приближенным решением того же уравнения с ядром $K(x, \xi)$.

Построение функции φ эквивалентно отысканию функции χ, связанной с последней зависимостью

$$\chi(t) = \alpha\varphi(\alpha t), \qquad t = x/\alpha \tag{1.16}$$

и удовлетворяющей уравнению

$$\alpha \int_0^1 K^*(\alpha t, \alpha\tau)\,\tau\chi(\tau)\,d\tau = f(\alpha t) \qquad (t \leqslant 1) \tag{1.17}$$

Решение последнего уравнения будем разыскивать в виде

$$\chi(t) = (1 - t^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} Y_m P_m^*(t) \tag{1.18}$$

Здесь и всюду ниже, для сокращения записей, принято

$$P_m^*(t) = P_{2m}(\sqrt{1 - t^2}) \qquad (P_n(z) \text{ — полином Лежандра}) \tag{1.19}$$

---

[1] Например, в случае основания в виде упругого слоя, когда справедливо (1.3) и $A = 3.2$ (см. предыдущую сноску) первые девять чисел C_k равны:

	$C_0 = 1.153$	$C_3 = 27.32$	$C_6 = 10710$
(a)	$C_1 = 1.381$	$C_4 = 181.4$	$C_7 = 89400$
	$C_2 = 5.023$	$C_5 = 1347$	$C_8 = 769000$

Вычисления проводились по квадратурной формуле Гаусса.

§ 2. Ниже будет доказано, что функция (1.18) может являться решением уравнения (1.17) при определенном выборе Y_m. Доказательство основано на одном замечательном свойстве полиномов Лежандра, заключающегося в том, что

$$\alpha \int_0^1 k_0(\alpha t, \alpha\tau)\, \tau (1-\tau^2)^{-1/2} P_m^*(\tau)\, d\tau = \lambda_m P_m^*(t) \tag{2.1}$$

Это свойство при ином, чем здесь, представлении для функции $k_0(x, \zeta)$ было замечено и проверено для небольших значений m в работе [11]. Однако исчерпывающего (для любого наперед заданного m) доказательства в цитированной работе не содержится, ввиду чего отсутствует общая формула для вычисления чисел λ_m. Здесь устраняется этот пробел.

Путем замены $t = \sqrt{1-y^2}$ и использования (1.8) и (1.19) соотношение (2.1) преобразуем к виду

$$\int_0^\infty J_0(\alpha s\sqrt{1-y^2})\, ds \int_0^1 J_0(\alpha\tau s)\, P^*(\tau) \frac{\tau d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \lambda_m P_{2m}(y)$$

Сделав во внутреннем интеграле замену $\tau = \sqrt{1-\eta^2}$, будем иметь

$$\int_0^\infty J_0(\alpha s\sqrt{1-y^2})\, ds\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 J_0(\alpha s\sqrt{1-\eta^2})\, P_{2m}(\eta)\, d\eta = \lambda_m P_{2m}(y) \tag{2.2}$$

Воспользовавшись формулой 6.541 (3) работы [10], обнаружим, что

$$J_0(z\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\sigma_k (2k-1)!!}{2^k \cdot k!} J_{\sigma_k}(z)\, P_{2k}(x) \qquad \left(\sigma_k = 2k + \frac{1}{2}\right) \tag{2.3}$$

Вычислив внутренний интеграл в (2.2) путем использования разложения (2.3) и ортогональности полиномов Лежандра и сделав затем замену $\alpha s = x$, в результате повторного использования разложения (2.3) вместо (2.2) будем иметь

$$\frac{\pi(2m-1)!!}{2^m \cdot m!} \sum_{k=0}^\infty \frac{\sigma_k (2k-1)!!}{2^k \cdot k!} P_{2k}(y) \int_0^\infty J_{\sigma_m}(x)\, J_{\sigma_k}(x) \frac{dx}{x} = \lambda_m P_{2m}(y) \tag{2.4}$$

Используя формулу 4.415 (2) из [10] и принимая во внимание аналитические свойства гамма-функции, можно обнаружить

$$\int_0^\infty J_{\sigma_m}(x)\, J_{\sigma_k}(x) \frac{dx}{x} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ (4m+1)^{-1} & (k = m) \end{cases} \qquad \left(\sigma_n = 2n + \frac{1}{2};\ n = m, k\right) \tag{2.5}$$

Наконец, путем подстановки (2.5) в левую часть (2.4), убеждаемся в справедливости соотношения (2.1), а также следующей формулы:

$$\lambda_m = 0.5\pi 4^{-m} (m!)^{-2} [(2m-1)!!]^2 \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{2.6}$$

§ 3. Докажем теперь, что функция (1.18) является решением уравнения (1.17) и укажем способ определения коэффициентов Y_m.

Для этого, приняв во внимание (1.8), подставим (1.18) в (1.17) и воспользуемся соотношением (2.1). Затем, используя ортогональность полиномов Лежандра, проинтегрируем обе части уравнения (1.17) по t в промежутке (0.1) с весом $(1-t^2)^{-1/2} t P_l^*(t)$; в результате вместо (1.17) будем иметь

$$\lambda_l (4l+1)^{-1} Y_l - \alpha\varkappa_1 \sum_{m=0}^{N-l} Y_m \sum_{\max(m,\,l)}^{N} \frac{(-1)^k C_k \alpha^{2k}}{4^k (k!)^2} B_{mk}^{(l)} = f_l \tag{3.1}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, N)$$

$$Y_l = (4l+1)\lambda_l^{-1} f_l \qquad (l > N) \tag{3.2}$$

где

$$f_l = \int_0^1 \frac{f(\alpha t)\, P_l^*(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, t\, dt, \qquad B_{mk}^{(l)} = \sum_{j=m}^{k-l} \binom{k}{j}^2 b_{k-j}^{(l)} b_j^{(m)}$$

$$b_n^{(k)} = \int_0^1 \frac{P_k^*(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \tau^{2n+1}\, d\tau = \begin{cases} 0 & (k > n) \\ \dfrac{(-1)^k (2k)!\,(n-k)!}{2^{k-n}[2(n+k)+1]!!} \dbinom{n}{k}^2 & (n \geqslant k) \end{cases} \tag{3.3}$$

Решение системы (3.1) легко проводится в общем виде благодаря тому, что коэффициенты ее образуют почти треугольную матрицу. При этом структура определяемых из этой системы величин будет иметь вид

$$Y_0 = F_0 \psi^{+1}(\alpha), \qquad Y_l = Y_0 X_l + F_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, N) \tag{3.4}$$

Например, $\psi(\alpha)$, F_l и X_l при $N=1$ имеют соответственно вид

$$\psi(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha\varkappa_1 \left(C_0 - \frac{C_1}{3}\alpha^2 + \frac{2\varkappa_1}{45\pi} C_1^2 \alpha^5 \right) \tag{3.5}$$

$$F_0 = f_0 + \frac{4}{3\pi}\varkappa_1 C_1 f_1 \alpha^3, \qquad X_1 = \frac{4\varkappa_1 C_1}{3\pi}\alpha^3, \qquad F_1 = \frac{40}{\pi} f_1$$

Решение системы (3.1) для случаев $N > 1$ в целях экономии места здесь не приводится.

Найдя коэффициенты $Y_m (m = 0, 1 \ldots)$ и подставив их в (1.18), получим согласно (1.10) и (1.16) формулу для контактного напряжения:

$$p(r) = a^{-1} \chi(r/a) \tag{3.6}$$

Таким образом, решение в общем случае получено в виде бесконечного ряда. Однако, если функция (1.9) представляет собой полином, то указательный ряд обрывается. К примеру найдем решение $\chi_\alpha(t)$ уравнения (1.17) при $f(x) \equiv 1$. В этом случае $f_0 = F_0 = 1$, $f_l = F_l = 0$, $l = 1, 2, \ldots,$ и, следовательно, учитывая (1.18), (3.2), (3.4), получим

$$\chi_\alpha(t) = \psi^{-1}(\alpha)(1-t^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{N} X_m P_m^*(t), \qquad X_0 = 1 \tag{3.7}$$

Выведем формулу для вычисления силы P, прижимающей упругое тело к основанию. Для этого подставим (3.6) под знак интеграла в формуле

$$P = 2\pi \int_0^a r p(r)\, dr \tag{3.8}$$

В результате выполнения интегрирования с учетом (1.18) и ортогональности полиномов Лежандра будем иметь

$$P = 2\pi a Y_0 \qquad (3.9)$$

Из уравнения (3.9) можно определить z_0, если известны размеры площадки контакта. Последнее не будет иметь места при неполном контакте [1,2]. В этом случае контактное напряжение должно быть конечным при $r = a$, что согласно (3.7) и (1.18) будет выполнено, если

$$\sum_{m=0}^{\infty} Y_m P_{2m}(0) = 0 \qquad (3.10)$$

Система уравнений (3.9) и (3.10) служит для определения z_0 и a.

§ 4. Полученное выше решение представляет собой бесконечный ряд; представляет интерес построить решение интегрального уравнения (1.6) с ядром (1.15) в замкнутом виде.

Для этого можно воспользоваться известным результатом [12], а именно, чтобы получить решение интегрального уравнения с произвольной правой частью, можно найти решение $q_\alpha(x)$ этого уравнения, но с правой частью $f(x) \equiv 1$, а затем воспользоваться формулами

$$\varphi(x) = \gamma(\alpha)\, q_\alpha(x) - \int_x^\alpha q_u(x)\, \gamma'(u)\, du \qquad (4.1)$$

где

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{M'(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} \int_0^\alpha \frac{s f(s)}{q_\alpha^{-1}(s)}\, ds, \qquad M(\alpha) = \int_0^\alpha x q_\alpha(x)\, dx \qquad (4.2)$$

Здесь и ниже штрих означает производную.

Нетрудно убедиться, что в разбираемом случае

$$q_\alpha(x) = \alpha^{-1} \chi_\alpha(x/\alpha) \qquad (4.3)$$

и, следовательно, цепочка формул (1.10), (4.1), (4.4) и (3.7) дает решение задачи в замкнутом виде. Если исходить теперь из решения в замкнутом виде, то формула (3.8) примет вид

$$(\theta_0 + \theta_1) P = 2\pi h M(\alpha)\, [z_0 - J(\alpha)] \qquad (4.4)$$

где

$$J(\alpha) = \int_0^1 (1 - t^2)^{-1/2} [z_1(at) + z_2(at)] \sum_{m=0}^{N} X_m P_m^*(t)\, dt \quad (a = \alpha h) \qquad (4.5)$$

Подстановка (4.3) во вторую формулу (4.2) с учетом (1.18) приводит к формуле

$$M(\alpha) = \alpha \psi^{-1}(\alpha) \qquad (4.6)$$

Условием конечности контактного напряжения вместо (3.10) теперь будет $\gamma(\alpha) = 0$, которое, если подставить (4.3) в первую формулу (4.2) и учесть (1.18) и (1.9), можно привести к виду

$$z_0 = \frac{1}{M'(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} M(\alpha)\, J(\alpha) \qquad (4.7)$$

Уравнение для определения размеров площадки контакта получим, подставив (4.7) в (4.4).

Проиллюстрируем применение полученных формул на двух частных случаях.

Пусть в упругое основание вдавливается штамп с плоским основанием, тогда: $\theta_0 = 0$, $z_0(r) \equiv z_1(r) \equiv 0$ и подстановка $f(x) = z_0\theta_1^{-1}$ в первую формулу (4.2) даст $\gamma(\alpha) = z_0\theta_1^{-1}$. Следовательно, учитывая (4.1) и (1.10), будем иметь

$$p(r) = z_0\theta_1^{-1}a^{-1}\chi_\alpha(r / a) \tag{4.8}$$

Если же ограничиться первым приближением (3.5), то

$$2\pi p(r) = P(a^2 - r^2)^{-1/2}\left[1 + \pi^{-1}C_1ah^{-3}\left(\frac{4}{3}a^2 - 2r^2\right)\right] \tag{4.9}$$

Осадка штампа z_0 будет определяться по формуле

$$2\pi a z_0 = P\theta_1\psi(\alpha), \quad \alpha = a / h \tag{4.10}$$

получаемой из (4.4) с учетом того, что $J(\alpha) = 0$.

В качестве второго примера, ограничившись первым приближением, рассмотрим вдавливание упругого тела в случае, когда (ср. [1])

$$z_0(r) + z_1(r) = Cr^2 \tag{4.11}$$

В этом случае формулу для контактного напряжения

$$\pi p(r) = 1.5\, Pa^{-3}\sqrt{a^2 - r^2} \tag{4.12}$$

получим, воспользовавшись соотношениями (3.6), (3.10), (3.9) и приняв во внимание, что $N = 1$.

Из уравнения, получаемого в результате подстановки (4.7) в (4.4) с учетом (4.11), (4.5) и (3.5), найдем

$$a^3 = 1.5\pi P(\theta_0 + \theta_1)(8\pi C + P\theta_1C_1h^{-5})^{-1} \tag{4.13}$$

Аналогично из уравнения (4.4) получим

$$Z_0 = (2\pi a)^{-1}P(\theta_0 + \theta_1)\psi(\alpha) + \frac{2}{3}Ca^2\left(1 - \frac{4}{15}\varkappa_1C_1\alpha^3\right) \tag{4.14}$$

Здесь $\psi(\alpha)$ определяется первой формулой (3.5).

Чтобы выяснить, какое количество N членов в ряду (1.13), следует удержать (т. е. каким приближением можно ограничиться) для получения достаточно точного решения в том или ином случае, вычислены значения функции $\chi_\alpha(t)$, через которую, как явствует из вышеизложенного, выражается общее решение рассматриваемой задачи.

Таблица 1

	$\chi_\alpha(t)$						$\psi(\alpha)$		α
N	$t=0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1	данная работа	работа [4]	
1	1.02	1.02	1.00	0.984	0.954	0.917	1.05		
2	1.01	1.01	1.00	0.983	0.959	0.931	1.04	1.04	0.5
3	1.01	1.01	1.00	0.983	0.959	0.929	1.04		
1	1.39	1.38	1.33	1.24	1.13	0.978	0.895		
2	1.36	1.34	1.30	1.24	1.18	1.11	0.846	—	0.75
3	1.37	1.35	1.31	1.25	1.17	1.07	0.857		
1	1.86	1.82	1.69	1,49	1.20	0.831	0.851		
2	1.77	1.74	1.65	1.56	1.48	1.51	0.654	0.715	1.0
3	1.81	1.78	1.71	1.58	1.37	1.12	0.730		

Эти вычисления, выполненные для трех приближений ($N = 1, 2, 3$) применительно к случаю (1.3) с использованием значений (а) в сноске на стр. 154 и при $\theta_0 = 0$, приводятся в табл. 1, в которой даны значения не самой функции $\chi_\alpha(t)$, обращающейся в ∞ при $t = 1$, а значения функции $\varkappa_\alpha(t) = \sqrt{1 - t^2}\,\chi_\alpha(t)$.

В этой же таблице для трех приближений применительно к тому же случаю приводятся значения функции $\psi(\alpha)$, определяющей согласно (4.10) с точностью до множителя осадку штампа. Для сравнения там же приводятся значения указанной функции, полученные на основе числовых результатов, приведенных в работе [4].

Исходя из приведенных в табл. 1 результатов вычислений, можно сделать вывод, что в случае основания в виде упругого слоя и $\alpha \leqslant 0.5$ при решении контактной задачи можно ограничиться первым приближением.

§ 5. Рассмотрим случай, когда осевая симметрия не имеет места и когда вместо (1.2) справедливо более общее соотношение

$$G(x) = x^{\nu}[1 + o(1)] \qquad \text{при } x \to \infty \left(-1 < \nu < \tfrac{1}{2}\right) \tag{5.1}$$

Будем считать, что в упругое основание типа (1.1) вдавливается штамп, поверхность основания которого определяется уравнением $z = g(r, \varphi)$, и что функция g представима в виде

$$g(r, \varphi) = g_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(r)\cos n\varphi + g_n^{-}(r)\sin n\varphi] \tag{5.2}$$

Ввиду этого для определения контактного напряжения $p(r, \varphi)$ в случае (5.2) достаточно найти напряжение для случая [1]

$$g(r, \varphi) = g_n(r)\cos n\varphi \tag{5.3}$$

При этом контактное напряжение будет иметь аналогичный вид

$$p(r, \varphi) = p_n(r)\cos n\varphi \tag{5.4}$$

Чтобы составить интегральное уравнение для искомой функции P_n, потребуется формула, позволяющая находить осадки $w^{(n)}(r, \rho)$ поверхностных точек основания от нагрузки, сосредоточенной по линии окружности радиуса ρ и распределенной вдоль нее по закону косинуса. Следуя приему работы [7], можно показать, что

$$w^{(n)}(r, \rho) = \theta_1 \rho \int_0^{\infty} G(th) J_n(rt) J_n(\rho t)\, dt \cos n\varphi \tag{5.5}$$

Учитывая (5.3) — (5.5), теперь нетрудно обнаружить, что

$$\int_0^{\alpha} K_n(x, \xi)\, \xi p_n^*(\xi)\, d\xi = g_n^*(\xi) \qquad (\xi \leqslant \alpha) \tag{5.6}$$

Здесь

$$p_n^*(\xi) = hp_n(h\xi), \qquad g_n^*(\xi) = \theta_1^{-1} g_n(h\xi) \tag{5.7}$$

$$K_n(x, \xi) = \int_0^{\infty} G(s) J_n(xs) J(\xi s)\, ds \tag{5.8}$$

Ниже излагается приближенный метод решения уравнения (5.6), основанный на следующей аппроксимации его ядра:

$$K_n(x, \xi) \approx k^{(n)}(x, \xi) - (x\xi)^n H_n(x, \xi) = K^*(x, \xi) \tag{5.9}$$

[1] Для случая $g(r, \varphi) = g_n^{-}(r)\sin n\varphi$ исследование проводится аналогично и получаемые при этом формулы отличаются только множителем (вместо $\cos n\varphi$ будет $\sin n\varphi$). Попутно отметим, что использованная здесь идея сведения пространственной контактной задачи к задаче с циклической симметрией заимствована из диссертации В. И. Моссаковского (Москва, Институт механики АН СССР, 1953).

где

$$k^{(n)}(x,\xi)=\int_0^\infty s^\nu J_n(xs)\,J_n(\xi s)\,ds \tag{5.10}$$

$$H_n(x,\xi)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k C_{k+n}^{(\nu)}}{4^{k+n}k!\,(k+n)!}M_k^{(n)}(x,\xi) \qquad (N=1,2,\ldots) \tag{5.11}$$

$$C_m^{(\nu)}=\int_0^A [s^\nu-G(s)]\,s^{2m}\,ds, \qquad C_m^{(0)}=C_m \qquad (m=0,1,2,\ldots) \tag{5.12}$$

Аппроксимация (5.9) получена из тех же соображений, что и (1.15). Числа N и A имеют прежний смысл, а функция $M_k^{(n)}(x,\xi)$ определяется формулой (1.14).

Чтобы получить решение для уравнения (5.6) с ядром $K_n{}^*(x,\xi)$, предварительно решим интегральное уравнение (2.5) с ядром (5.10). Для этого, принимая во внимание использованный выше результат работы [12], достаточно решить уравнение

$$\int_0^\alpha k^{(n)}(x,\xi)\,\xi q_\alpha(\xi)\,d\xi=1 \qquad (\xi\leqslant\alpha) \tag{5.13}$$

а затем воспользоваться формулами (4.1) и (4.2).

Решение уравнения (5.13) можно построить следующим образом. Ядро уравнения (5.13), определяемое формулой (5.10), представим в виде

$$k^{(n)}(x,\xi)=\xi^{-1-\nu}k_\nu(x/\xi), \qquad k_\nu(y)=\int_0^\infty J_n(s)\,J_n(sy)\,s^\nu ds \tag{5.14}$$

тогда в результате замены

$$x=\alpha e^{-t}, \qquad \xi=\alpha e^{-\tau}, \qquad \alpha^{1-\nu}e^{-t}q_\alpha(\alpha e^{-t})=\chi_\zeta(t)$$

и умножения обеих частей уравнения (5.13) на $\alpha^\nu e^{-\nu t}$, последнее можно преобразовать к следующему интегральному уравнению типа Винера — Хопфа первого рода:

$$\int_0^\infty l(t-\tau)\,\chi_\zeta(\tau)\,d\tau=e^{i\zeta x}, \qquad \operatorname{Im}\zeta>0 \qquad (l(y)=e^{-\nu y}k_\nu(e^{-y})) \tag{5.15}$$

Построив функцию $\chi_\zeta(t)$ приемом, подробно описанным на примере уравнения, аналогичного с (5.15), в работе [7] найдем

$$q_\alpha(x)=2^{1-\nu}\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\Gamma^{-1}(\mu)\,x^n\left[\alpha^{-n}(\alpha^2-x^2)^{\mu-1}+\right.$$
$$\left.+\,n\int_x^\alpha \eta^{-1-n}(\eta^2-x^2)^{\mu-1}d\eta\right] \qquad \left(\mu=\frac{1+\nu}{2}\right) \tag{5.16}$$

Подставив (5.16) в формулы (4.1) и (4.2), в результате выполнения соответствующих выкладок получим решение уравнения (1.6) с ядром (5.10) в следующей форме:

$$\varphi(x)=\frac{2^{1-\nu}x^n}{\Gamma^2(\mu)}\left[\frac{\Phi(\alpha)}{(\alpha^2-x^2)^{1-\mu}}-\int_x^\alpha\frac{\Phi'(u)\,du}{(u^2-x^2)^{1-\mu}}\right] \qquad \left(\mu=\frac{1+\nu}{2}\right) \tag{5.17}$$

Здесь

$$\Phi(\alpha) = \alpha^{-2n-\nu} \frac{d}{d\alpha} \alpha^{n+2\mu} \int_0^1 \frac{s^{n+1} f(s\alpha)}{(1-s^2)^{1-\mu}} ds \tag{5.18}$$

Формулы (5.17) и (5.18) можно записать символически в виде

$$\varphi = Lf \tag{5.19}$$

Здесь L — оператор, переводящий заданную функцию f в решение указанного интегрального уравнения.

§ 6. Для решения основного интегрального уравнения (5.6) воспользуемся идеей Карлемана, которая в разбираемом случае заключается в следующем. Подставляем в (5.6) вместо ядра его выражение (5.9) в виде суммы двух функций, причем вторую из них затем переносим в правую часть. В результате приходим к уравнению, для которого получено решение в виде формулы (5.19), однако с правой частью, имеющей вид

$$f(x) = g_n^*(x) + \int_0^\alpha (x\xi)^n H_n(x, \xi)\, p_n^*(\xi)\, d\xi \tag{6.1}$$

Если многочлен (5.11) разложить в ряд Маклорена по ξ, то будем иметь

$$H_n(x, \xi) = \sum_{m=0}^{N} h_m^{(n)}(x)\, \xi^{2m} \tag{6.2}$$

Здесь

$$h_m^{(n)}(x) = \sum_{k=m}^{N} \frac{(-1)^k 4^{-k-n} C_{k+n}^{(\nu)} x^{2(k-m)}}{(n+m)!\,(n+k-m)!\,(k-m)!\,m!}$$

Введем далее обозначение

$$Y_m^{(n)} = \int_0^\alpha \xi^{2m+n+1} p_n^*(\xi)\, d\xi \qquad (m = 0, 1, \ldots, N) \tag{6.3}$$

Учитывая (6.2) и (6.3), вместо (6.1) можно записать

$$f(x) = x^n \sum_{m=0}^{N} h_m^{(n)}(x)\, Y_m^{(n)} + g_n^*(x) \tag{6.4}$$

Применив к функции (6.4) оператор L, будем иметь [1]

$$p_n^*(x) = Lf \tag{6.5}$$

Числа $Y_m^{(n)}$, фигурирующие согласно (6.4) в правой части (6.5), можно найти, например, следующим образом. Умножив обе части соотношения (6.5) на x^{2l+n+1} и приняв во внимание (6.3) и формулы (5.17), (5.18), определяющие оператор L, проинтегрируем по x в интервале

[1] Если иметь в виду обозначение (6.3), то нетрудно убедиться, что соотношение (6.5) представляет собой уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. В том случае, когда тем или иным приемом найдены числа $Y_m^{(n)}$, указанное соотношение представляет собой формулу для определения функций p_n^* $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, через которые выражается искомое контактное напряжение.

$(0, \alpha)$. В результате для определения $Y_l^{(n)}$ получим следующую систему уравнений:

$$Y_l^{(n)} = \frac{2^{-\nu}(n+l)!}{\Gamma^2(\mu)(\mu)_{n+l}}\left[\frac{\alpha^{2(l+n+\mu)}}{4^n(l+n+\mu)}\sum_{m=0}^{N} A_{ml}^{(n)} Y_m^{(n)} + g_l^{(n)}\right].$$

$$(l = 0, 1, \ldots, N) \tag{6.6}$$

Здесь

$$A_{ml}^{(n)} = \frac{l+n+\mu}{(n+m)!\,m!}\sum_{k=m}^{N}\frac{(-1)^k 4^{-k} C_{k+n}^{(\nu)}\alpha^{2(k-m)}}{(l+n+k-m+\mu)(k-m)!\,(\mu)_{n+k+m}} \tag{6.7}$$

$$g_l^{(n)} = 2\int_0^{\alpha}\Phi_n^*(u)\,u^{2(l+n)+\nu}\,du, \qquad (z)_n = z(z+1)(z+2),\ldots,(z+n-1)$$

$$(z)_0 = 1$$

Через Φ_n^* обозначена функция, получаемая по формуле (5.18) в результате подстановки g_n^* вместо f.

Рассмотрим более детально случай, когда в упругое основание вдавливается штамп с плоским основанием под действием эксцентрично приложенной силы P (величина эксцентриситета e).

В этом случае разложение (5.2) будет состоять из двух членов, причем $g_0(r) = z_0$, $g_1(r) = \beta r$, где z_0 имеет прежний смысл, а β — угол наклона штампа после деформации (ср. [13,6]). Соответственно, контактное напряжение будет иметь вид

$$p(r, \varphi) = p_0(r) + p_1(r)\cos\varphi \tag{6.8}$$

Согласно (5.7) в разбираемом случае

$$g_n^*(x) = \gamma_n x^n \ (n = 0,1), \qquad \gamma_0 = z_0\theta_1^{-1}, \qquad \gamma_1 = \beta h\theta_1^{-1} \tag{6.9}$$

Учитывая это и вводя новые неизвестные

$$X_l^{(n)} = 4^{-n}(\mu)_n\gamma_n^{-1}Y_l^{(n)} \qquad (n = 0, 1) \tag{6.10}$$

вместо (6.4) будем иметь

$$f(x) = \gamma_n x^n\left[1 + 4^n(\mu)_n^{-1}\sum_{m=0}^{N} h_m^{(n)}(x)\,X_m^{(n)}\right] \tag{6.11}$$

Подставив полученное выражение в (5.18), получим

$$\Phi(\alpha) = \gamma_n(\mu)_n^{-1}\Lambda_n(\alpha), \quad \Lambda_n(\alpha) = 1 + \sum_{m=0}^{N} X_m^{(n)}E_m^{(n)} \qquad (n = 0, 1) \tag{6.12}$$

Здесь

$$E_m^{(n)} = \frac{(-1)^m 4^{-m}}{(n+m)!\,m!}\sum_{j=0}^{N-m}\frac{(-1)^j C_{n+m+j}^{(\nu)}}{4^j j!\,(\mu)_{n+j}}\alpha^{2j} \tag{6.13}$$

Введем в рассмотрение полином

$$p_m^{(\mu)}(x) = \frac{1}{2}\frac{m!}{(\mu)_{m+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\mu)_{m-k}}{(m+k)!}x^{2k} \tag{6.14}$$

Тогда можем записать

$$\int_x^a \frac{u^{2j-1}\,du}{(u^2-x^2)^{1-\mu}} = \alpha^{2(j-1)}(\alpha^2-x^2)^{\mu}\,p_{j-1}^{(\mu)}(x/\alpha) \qquad \left(\mu=\frac{1+\nu}{2}\right) \tag{6.15}$$

Применив к функции (6.11) оператор L и учитывая при этом формулу (5.17), найдем

$$p_n^*(x) = \frac{2^{1-\nu}\gamma_n x^n}{\Gamma^2(\mu)(\mu)_n}(\alpha^2-x^2)^{\mu-1}\left\{1+\sum_{m=0}^{N} X_m^{(n)}\left[E_m^{(n)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(-1)^m 2^{1-2m}}{(n+m)!\,m!}\sum_{j=1}^{N-m}\frac{(-1)^j C_{n+m+j}^{(\nu)}\cdot\alpha^{2(j-1)}}{4^j(j-1)!\,(\mu)_{n+j}}\,\frac{p_{j-1}^{(\mu)}(x/\alpha)}{(\alpha^2-x^2)^{-1}}\right]\right\} \qquad (n=0,1) \tag{6.16}$$

Систему уравнений

$$X_l^{(n)} = \frac{2^{-2n-\nu}(l+n)!}{\Gamma^2(\mu)(\mu)_{n+l+1}}\left[1+\sum_{m=0}^{N} X_m^{(n)}A_{ml}^{(n)}\right]\alpha^{2(l+n+\mu)} \qquad (l=0,1,\ldots,N) \tag{6.17}$$

для определения чисел $X_l^{(n)}$ получим из (6.6), приняв во внимание (6.10) и (6.9).

Если задан эксцентриситет e и величина прижимающей силы P, то z_0 и β определяются из условий равновесия штампа (ср. [13])

$$Pe^n = \int_0^a\int_0^{2\pi} p(r,\varphi)\cos^n\varphi\, r^{n+1}\,d\varphi dr = 2^{1-n}\pi h^{1+n}\int_0^{\alpha} p_n^*(x)\,x^{1+n}\,dx \qquad (n=0,\ 1) \tag{6.18}$$

Чтобы убедиться в справедливости второго равенства, следует учесть (6.8), (5.7). Приняв во внимание (6.3), (6.10) и (6.9), из соотношений (6.18) найдем

$$z_0 = \frac{P\theta_1}{2\pi h}\,\frac{1}{X_0^{(0)}}, \qquad \beta = \frac{P\theta_1\varepsilon\cdot\mu}{4\pi h^2 X_0^{(1)}} \qquad \left(\varepsilon=\frac{e}{h}\right) \tag{6.19}$$

Представляет интерес вывести формулу для максимального значения эксцентриситета $e_{\max}$, не вызывающего отрыва штампа от основания. В данном случае, следуя В. М. Абрамову [13], можно получить

$$\varepsilon_{\max} = h^{-1}e_{\max} = 2\Lambda_0(\alpha)X_0^{(1)}\left[\Lambda_1(\alpha)\ X_0^{(0)}\right]^{-1} \tag{6.20}$$

Можно отметить, что, как показывают проделанные вычисления, решать систему уравнений (6.17) проще методом последовательных приближений. Сходимость особенно хороша при $n=1$ (достаточно трех-четырех приближений для получения ответа с точностью до четырех знаков). Сходимость при $n=0$ будет более медленной.

Однако решать систему (6.17) при $n=0$ и $\nu=0$ нет необходимости, так как числа $X_m^{(n)}$ достаточно просто связаны с решением более простой системы (3.1) при $f_l=1$, $l=0$, $f_l=0$, $l>0$, т. е. с числами X_m, фигурирующими в выражении (3.7) для функции $\chi_\alpha(t)$, связанной с $p_0^*(x)$ зависимостью

$$p_0^*(x) = \gamma_0\alpha^{-1}\chi_\alpha(x/\alpha) \tag{6.21}$$

Подставив (6.21) в (6.3) и приняв во внимание (3.7), (3.3) и (6.10), получим

$$X_m^{(0)} = \alpha^{1+2m}\psi^{-1}(\alpha)\sum_{k=0}^{N} X_k b_m^{(k)} \tag{6.22}$$

Числа $b_m^{(k)}$ определяются формулой (3.3).

Таблица 2

α	0.5			0.75			1.0		
N	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$10\cdot X_0^{(1)}$	0.137	0.137	0.137	0.483	0.490	0.489	1.16	1.29	1.24
$\varepsilon_{\max}$	0.161	0.162	0.162	0.223	0.237	0.233	0.254	0.330	0.288

Приведем некоторые результаты вычислений по полученным здесь формулам, сведенные в табл. 2. В этой таблице в трех приближениях $N = 1, 2, 3$ даются значения величины $X_0^{(1)}$, обратная величина которой согласно (6.19) с точностью до множителя определяет угол наклона штампа. Даны также значения величины $\varepsilon_{\max}$, определяемой формулой (6.20). Вычисления проведены для случая основания в виде упругого слоя ($\nu=0$) с использованием значений C_m, согласно (*а*) в сноске на стр. 154. Как видно из табл. 2, здесь, как и в случае задачи с осевой симметрией, при $\alpha \leqslant 0.5$ можно вполне ограничиться первым приближением.

В заключение отметим, что изложенный здесь метод можно перенести на задачу о контакте тонкой круглой пластинки с основанием общего типа.

Поступила 22 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1949.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехтеоретиздат, 1953.
3. Коренев Б. Г. Некоторые задачи о теории упругости и теплопроводности. М., Физматгиз, 1960.
4. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
5. Александров В. М., Ворович И. И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
6. Егоров К. Е. Контактная задача для упругого слоя при действии внецентренной вертикальной силы на круглый штамп. ДАН СССР, 1960, т. 133, № 4.
7. Попов Г. Я. Об одном способе решения осесимметричной контактной задачи теории упругости. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
8. Попов Г. Я. К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве. Изв. вузов, Стр-во и архитектура, 1959, № 11.
9. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1961, № 3.
10. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1951.
11. Клубин П. И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании. Инж. сб., 1952, т. XII.
12. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. ДАН СССР, 1955, т. 100, № 3.
13. Абрамов В. М. Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство. ДАН СССР, 1939, т. 23, № 3.