

## ПОВОРОТ ПЛОСКОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ СПУТНИКА

В. Ф. Илларионов, Л. М. Шкадов

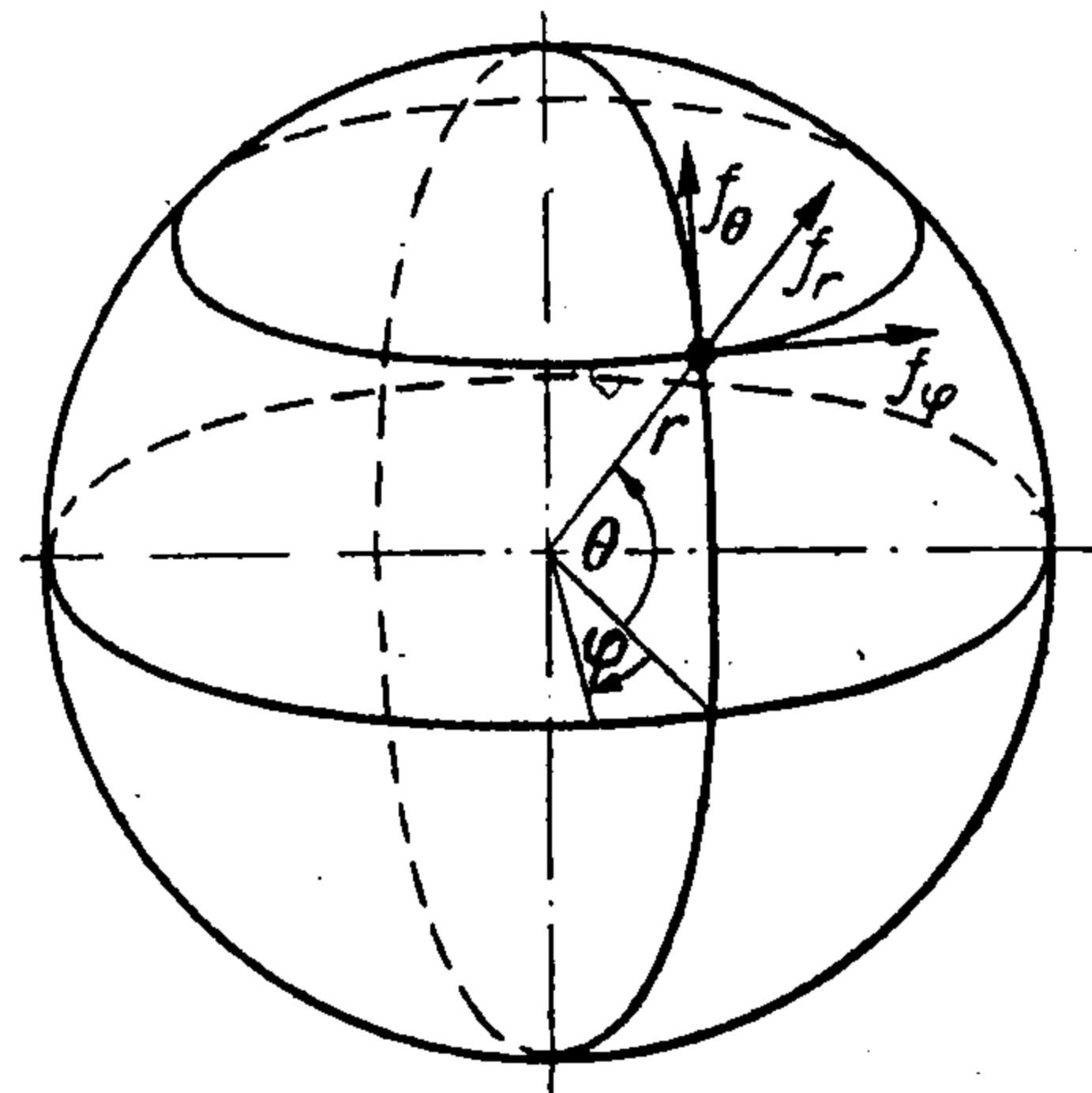
(Москва)

1. Рассмотрим движение орбитального аппарата, находящегося на круговой орбите при действии боковой силы  $F$ , т. е. силы, вектор которой в любой момент времени лежит в плоскости горизонта и направлен нормально к вектору скорости. Для принятого направления действия силы легко можно показать, что модуль скорости [и высота [орбиты останутся постоянными в процессе движения и равными начальным значениям

$$r = r_0 = \text{const}, \quad V_0 = \sqrt{g_0 r_0} = \text{const}$$

В общем случае система уравнений движения тела как материальной точки в центральном поле тяготения имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2 &= -\frac{\mu}{r^2} + \frac{f_r}{m} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \theta + r\ddot{\varphi} \cos \theta - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta &= \frac{f_\varphi}{m} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + r\ddot{\theta} &= \frac{f_\theta}{m} \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь  $\mu$  — гравитационная постоянная;  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  — сферические координаты точки, причем  $\theta$  — широта (фиг. 1), отсчитываемая от плоскости экватора;  $f_r$ ,  $f_\varphi$ ,  $f_\theta$  — координатные составляющие внешней силы;  $m$  — масса аппарата.

Без ограничения общности будем считать, что невозмущенная круговая орбита расположена в экваториальной плоскости.

Начальными условиями системы (1.1) являются

$$r = r_0, \quad \dot{r} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega_0, \quad \theta = 0, \quad \dot{\theta} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.2)$$

$$(\omega_0 = \sqrt{g_0/r_0})$$

Здесь  $\omega_0$  — угловая скорость аппарата на круговой орбите радиуса  $r_0$ . По определению боковой силы для ее координатных составляющих имеем выражения (фиг. 2)

$$f_r = 0, \quad f_\varphi = -F\omega_0^{-1}\dot{\theta}, \quad f_\theta = F\omega_0^{-1}\dot{\varphi} \cos \theta \quad (1.3)$$

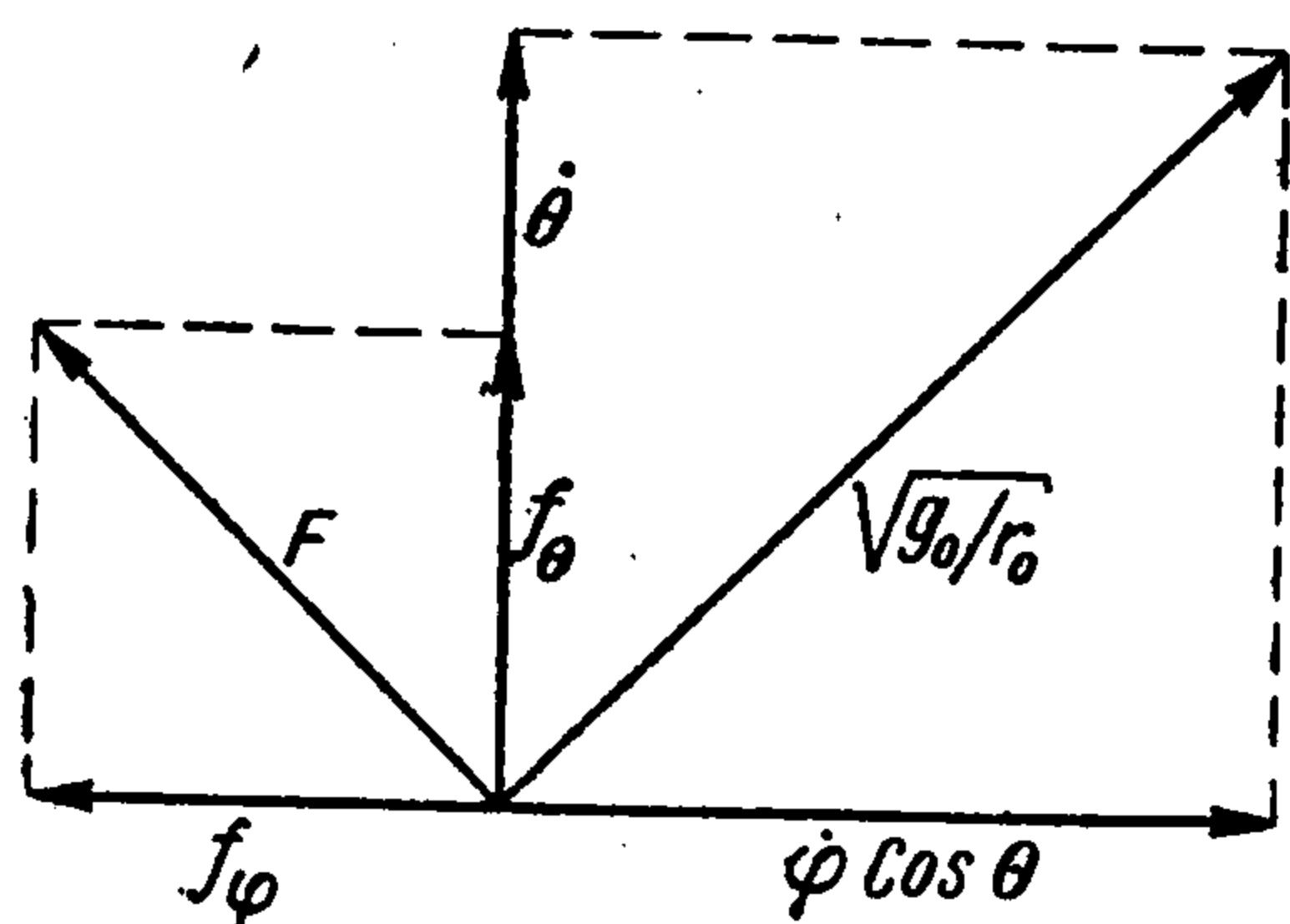
С учетом (1.3) система (1.1) допускает выделение уравнения относительно  $\theta$ , определяющего отклонение аппарата от начальной орбиты:

$$\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \operatorname{tg} \theta + \omega_0^2 \operatorname{tg} \theta = \omega_0 n_z \sqrt{\omega_0^2 - \dot{\theta}^2}, \quad n_z = F/mg_0 \quad (1.4)$$

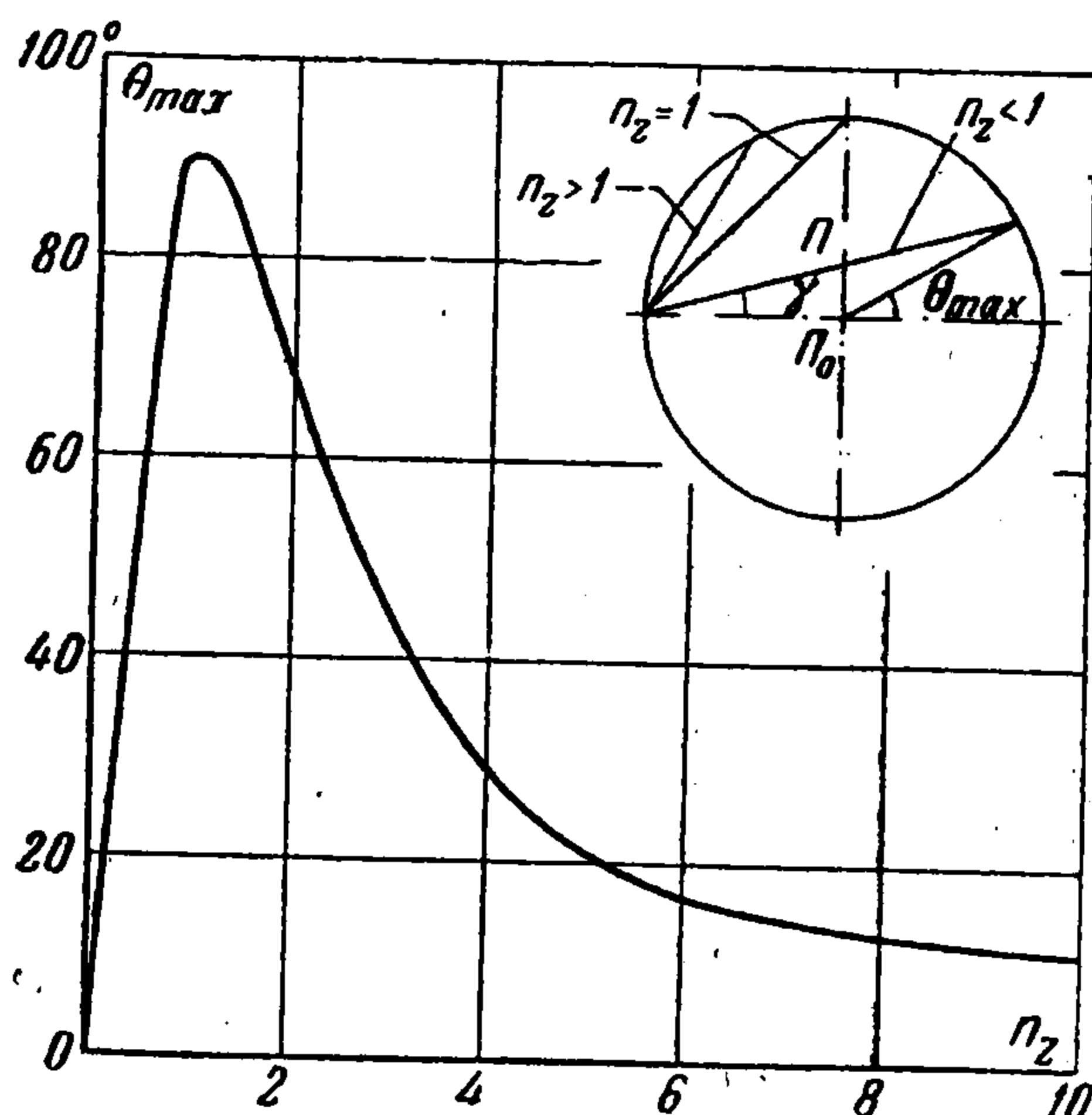
где  $n_z$  — боковая перегрузка.

Будем считать, что боковая перегрузка  $n_z$  постоянна в процессе движения. Введем в рассмотрение функцию  $u(\theta) = \sqrt{\omega_0^2 - \dot{\theta}^2}$ . Тогда уравнение (1.4) можно привести к линейному, решение которого имеет вид

$$u = \omega_0 \frac{1 - n_z \sin \theta}{\cos \theta} \quad (1.5)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

После обратного перехода к переменной  $\theta = \theta(t)$  с учетом начальных условий (1.2) решение уравнения (1.4) будет:

$$\sin \theta = \frac{n_z}{1 + n_z^2} (1 - \cos \sqrt{1 + n_z^2} \omega_0 t) \quad (1.6)$$

При  $n_z \ll 1$ , следует формула, полученная Л. А. Симоновым

$$\sin \theta = n_z (1 - \cos \omega_0 t) \quad (1.7)$$

Из (1.6) следует, что угол  $\theta$  является периодической функцией времени (фиг. 3), период которой  $\tau$  и амплитуда  $\theta_{\max}$  соответственно равны

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 + n_z^2}}, \quad \theta_{\max} = \arcsin \frac{2n_z}{1 + n_z^2}$$

Используя выражения (1.5) и (1.6), можно получить решение для угла  $\varphi$ .

Таким образом, общее решение системы (1.1), определяющее движение аппарата под действием постоянной боковой перегрузки и находящегося в первоначальный момент времени на круговой экваториальной орбите, будет

$$r = r_0$$

$$\theta = \arcsin \frac{n_z}{1 + n_z^2} (1 - \cos \sqrt{1 + n_z^2} \omega_0 t) \quad (1.8)$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{1 + n_z^2} \sin \sqrt{1 + n_z^2} \omega_0 t}{n_z^2 + \cos \sqrt{1 + n_z^2} \omega_0 t}$$

2. Исследование полученного решения показывает, что кручение  $T$  траектории (1.8), определяющее ее отличие от плоской кривой, равно нулю. Действительно,

$$T = \frac{\rho^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

Здесь  $\rho$  — радиус кривизны кривой,  $x, y, z$  — координаты аппарата в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi = r \left( 1 - \frac{\sin \theta}{n_z} \right) \\ y &= r \cos \theta \sin \varphi = \frac{r}{n_z} \sqrt{\cos^2 \theta - (1 - n_z \sin \theta)^2} \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Легко видеть, что определитель, входящий в (2.1), равен нулю, так как при разложении определителя по элементам второго столбца все миноры равны нулю. Следовательно,  $T = 0$ , т. е. траектория движения аппарата является плоской кривой.

Применяя обычные приемы аналитической геометрии, можно найти уравнение плоскости  $\Pi$  (фиг. 3), в которой лежит траектория, определяемая системой (1.8). Получаем

$$n_z x + z - n_z r_0 = 0 \quad (2.3)$$

Плоскость (2.3) наклонена к плоскости невозмущенной орбиты  $\Pi_0$  ( $z = 0$ ) под углом

$$\gamma = \arctg n_z \quad (2.4)$$

причем

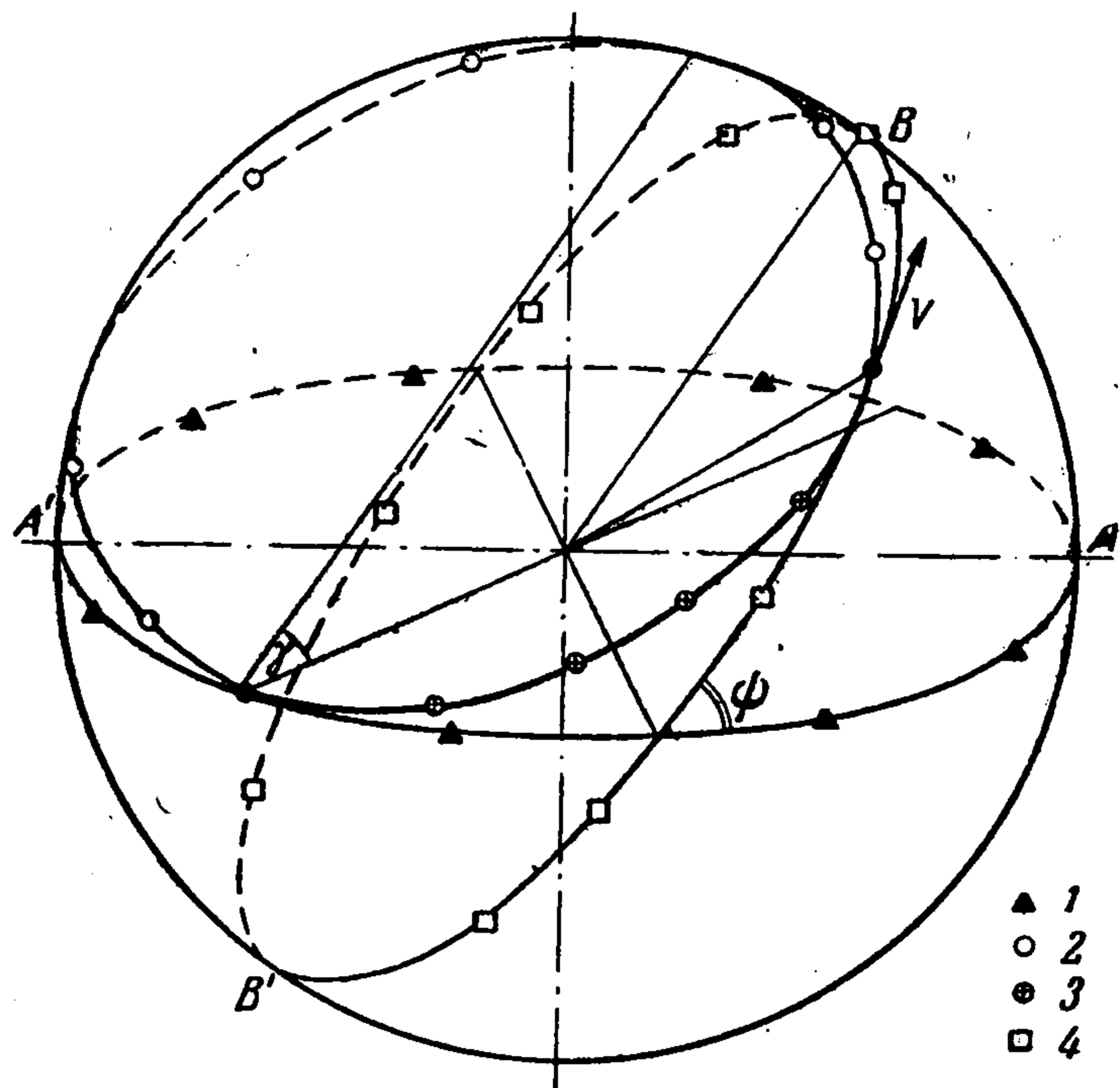
$$\gamma = \frac{1}{2} \theta_{\max} \quad \text{при } n_z \leq 1$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \theta_{\max} \quad \text{при } n_z \geq 1$$

Радиус кривизны траектории в процессе движения, очевидно, остается постоянным и равен

$$\rho = \frac{r_0}{\sqrt{1 + n_z^2}} \quad (2.5)$$

Таким образом, под действием постоянной боковой перегрузки  $n_z$  плоскость орбиты аппарата, находящегося в начальный момент времени на круговой орбите  $\Pi_0$  [радиуса  $r_0$  (фиг. 3)], повернется на угол  $\gamma$ , определяемый (2.4), и аппарат будет продолжать движения в плоскости малого круга  $\Pi$  с радиусом орбиты  $\rho = r_0 \cos \gamma$ . Модуль скорости и высота полета аппарата остаются постоянными и равными соответствующим начальным значениям. Возмущенная траектория аппарата касается исходной орбиты в точке  $t = 0$ , т. е. аппарат через каждый оборот возвращается к начальной точке невозмущенной орбиты.



Фиг. 4

3. Предыдущее рассмотрение относилось к случаю непрерывного действия боковой силы. После прекращения действия силы орбита аппарата снова становится центральной, но повернутой относительно невозмущенной орбиты на некоторый угол  $\psi$ , как это показано на фиг. 4, где 1 — исходная орбита, 2 — орбита при наличии постоянно действующей боковой перегрузки, 3 — участок активного полета, 4 — орбита после прекращения действия перегрузки,  $AB$  и  $A'B'$  — максимальные отклонения аппарата.

Рассмотрим задачу об определении  $\psi$  при условии, что боковая перегрузка создается непосредственно тягой двигателя при заданном относительном запасе топлива  $\alpha = \text{const}$ . Тогда время работы двигателя  $t_a$  и создаваемая им постоянная боковая перегрузка  $n_z$  будут связаны соотношением

$$t_a = - \frac{J}{n_z} \ln(1 - \alpha) \quad (3.1)$$

Здесь  $J$  — удельный импульс двигателя. Траектория аппарата в рассматриваемом случае ограниченного времени действия силы состоит из двух участков: — активного 3 и пассивного 4 (фиг. 4). Очевидно, что величина угла  $\psi$  будет равна максимальному значению угла отклонения аппарата от первоначальной орбиты  $\theta_{\max}$  на пассивном участке траектории в момент времени, для которого  $\dot{\theta} = 0$ . Это значение  $\psi = \theta_{\max}$  можно найти из решения системы (1.1) при  $f_r = 0$ ,  $f_\varphi = 0$  и  $f_\theta = 0$  и начальных условиях, соответствующих значениям функций  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  и их производных, определяемых из (1.8) в конце активного участка при  $t = t_a$ .

Как указывалось выше, на активном участке 3 скорость движения равна круговой скорости, соответствующей высоте полета аппарата, причем высота и модуль скорости остаются постоянными в процессе движения. Следовательно, после прекращения действия боковой перегрузки аппарат будет двигаться по круговой орбите 4 с прежними значениями модуля скорости и высоты полета.

Учитывая сказанное, из системы (1.1) можно выделить уравнение

$$\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \operatorname{tg} \theta + \omega_0^2 \operatorname{tg} \theta = 0 \quad (3.2)$$

Подстановкой  $p(\theta) = \dot{\theta} \cos \theta$ , уравнение (3.2) сводится к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После несложных преобразований получаем первый интеграл уравнения (3.2)

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\cos \theta} \left( \dot{\theta}_a^2 \cos^2 \theta_a - \frac{1}{2} \omega_0^2 \cos 2\theta_a + \frac{1}{2} \omega_0^2 \cos 2\theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

где  $\theta_a$  и  $\dot{\theta}_a$  — значения угла отклонения и его производной в конце активного участка траектории при  $t = t_a$ .

Приравнивая (3.3) нулю, получаем соотношение для определения величины  $\psi = \theta_{\max}$

$$\cos \psi = 1 - n_z \sin \theta_a \quad (3.4)$$

или, учитывая (1.8)

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{n_z}{\sqrt{1 + n_z^2}} \sin \frac{1}{2} \sqrt{1 + n_z^2} \omega_0 t_a \quad (3.5)$$

Располагаемый относительный запас топлива можно характеризовать через идеальную скорость  $v$ , которую приобретает аппарат после расходования запаса топлива в пустоте с удельным импульсом  $J$

$$\alpha = 1 - \exp\left(-\frac{v}{Jg_0}\right) \quad (3.6)$$

Тогда максимальное отклонение аппарата от невозмущенной орбиты при заданном  $v$  из (1.8), (3.1), (3.5) и (3.6) будет

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{n_z}{\sqrt{1+n_z^2}} \sin \frac{\sqrt{1+n_z^2}}{2n_z} \frac{v}{V_0} \quad (3.7)$$

Анализ полученного решения (3.7) показывает (кривая 1, фиг. 5), что при малых величинах  $n_z$  максимальный угол поворота плоскости орбиты аппарата от исходной орбиты  $\psi$  выражается периодической функцией, затухающей при  $n_z \rightarrow 0$ . Это объясняется тем, что при сохранении постоянного направления перегрузки в процессе активного полета, как указывалось выше, аппарат, двигаясь по малому кругу земной сферы, периодически через каждый оборот возвращается в исходную точку, причем уменьшение угла  $\psi$  происходит во время четных полупериодов. Поэтому для увеличения суммарного угла поворота плоскости орбиты аппарата целесообразно через каждые полпериода изменять направление тяги на обратное.

Тогда угол поворота за целое число  $N$  полупериодов будет равен

$$\psi = N \arcsin \frac{2n_z}{1+n_z^2} \quad (3.8)$$

при этом очевидно, что  $\psi = N\pi$ . Общее время полета аппарата определяется выражением (3.1), а время одного полуоборота из (1.6)

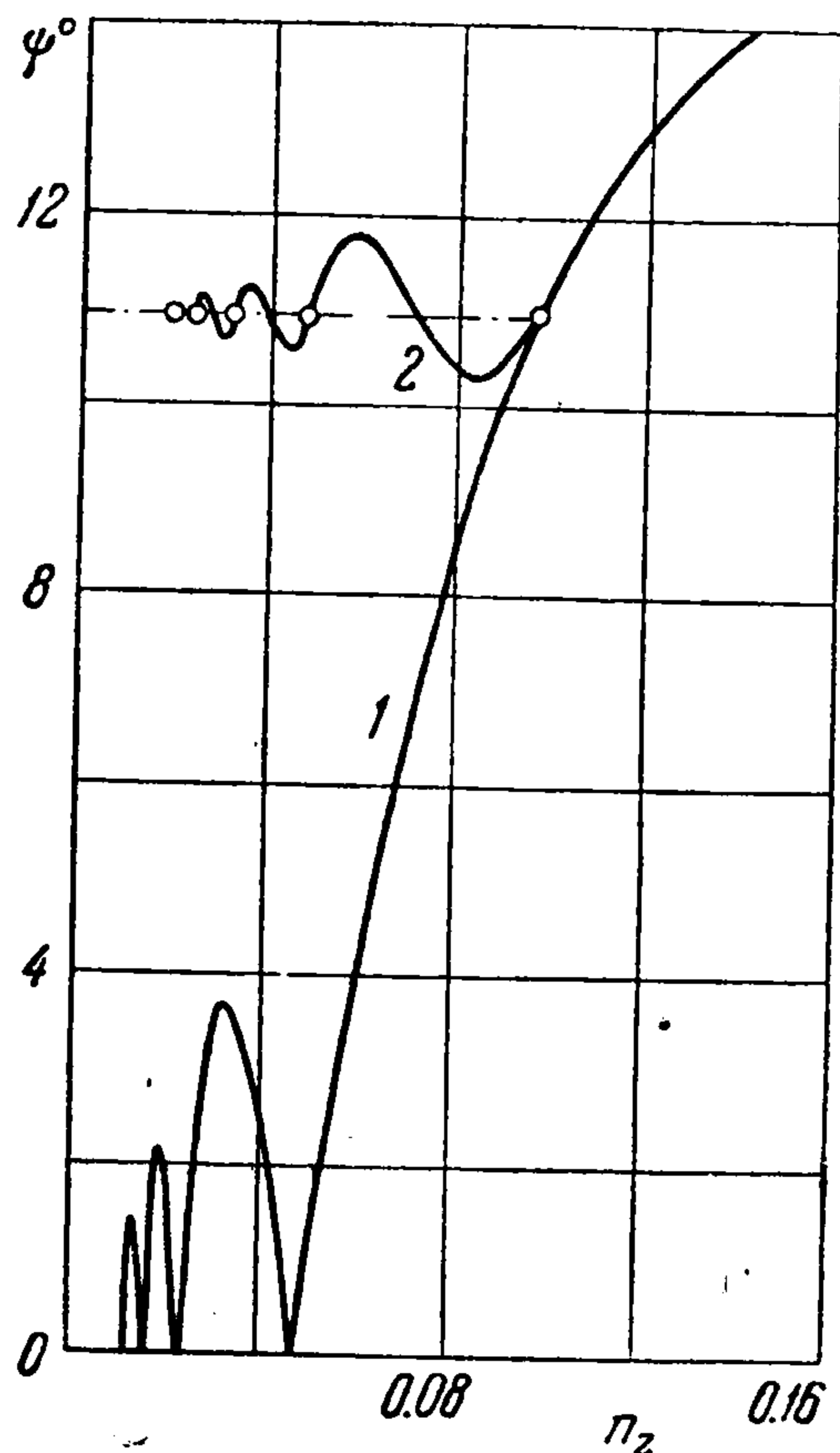
$$\frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1+n_z^2}} \quad (3.9)$$

Если  $t_a$  кратно  $\tau/2$ , то, определяя число возможных полуоборотов  $N$  и подставляя его значение в (3.8), получаем

$$\psi = \frac{1}{\pi} \frac{v}{V_0} \frac{\sqrt{1+n_z^2}}{n_z} \arcsin \frac{2n_z}{1+n_z^2} \quad (3.10)$$

Для малых значений  $n_z$  имеем

$$\psi \approx \frac{2}{\pi} \frac{v}{V_0} \quad (3.11)$$



Фиг. 5

Анализ (3.10) показывает, что при перегрузке, меньшей  $n_z$ , соответствующей расходованию всего запаса топлива за первый полуоборот  $n_z(\tau/2)$ , и при принятом условии кратности общего времени активного полета одному полупериоду величина возможного отклонения плоскости орбиты аппарата практически остается постоянной (точки на фиг. 5).

Величина боковой перегрузки, соответствующая расходованию топлива за первый полуоборот, из (3.1), (3.6) и (3.9) будет

$$n_z(\tau/2) = \left[ \left( \frac{\pi V_0}{v} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \quad (3.12)$$

При увеличении  $n_z$  значение угла  $\psi$  возрастает и асимптотически приближается к некоторому предельному значению. Физически это означает, что чем быстрее расходуется располагаемый запас топлива (т. е. чем больше будет перегрузка  $n_z$ ), тем больше аппарат отклонится от невозмущенной орбиты. Максимальное отклонение аппарата при фиксированном запасе топлива имеет место при  $n_z \rightarrow \infty$ , т. е. в случае импульсного приложения тяги

$$\psi = \frac{v}{V_0} \quad \text{при } n_z \rightarrow \infty \quad (3.13)$$

Сравнение (3.11) и (3.13) показывает, что при заданной идеальной скорости  $v$  в случае импульсного действия силы угол поворота орбиты в  $\pi/2$  раз больше, чем при использовании малых перегрузок.

4. В общем случае условие кратности времени активного полета  $t_a$  и времени полупериода возмущенной орбиты  $\tau/2$  не выполняется. Для определения максимально возможного поворота плоскости орбиты аппарата в этом случае может быть принята следующая последовательность. Вначале вычисляется угол поворота плоскости орбиты за целую часть активных полуоборотов  $\theta^*$ , определяемый выражением (3.8). В процессе полета на этой части траектории через каждые полуоборота при  $\varphi = N\pi$  происходит изменение направления действия перегрузки на обратное.

Для последней части активного участка имеем начальные условия

$$t = N\tau/2, \quad \theta = \theta^*, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \varphi = N\pi \quad (4.1)$$

Время активного полета на этом участке, очевидно, будет

$$\Delta t = t_a - N\tau/2 < \tau/2 \quad (4.2)$$

Таким образом, приходим к задаче, подобной рассмотренной выше, но с другими начальными условиями по  $\theta$  и  $\varphi$ . Угол поворота плоскости орбиты  $\psi$ , как и ранее, будет равен максимальному углу отклонения аппарата от начальной орбиты  $\theta_{\max}$ , что имеет место на пассивной части траектории в момент времени, соответствующий  $\dot{\theta} = 0$ . Проводя вычисления, аналогичные предыдущему, но при новых начальных условиях, получаем выражения для определения параметров конца активного участка

$$\dot{\theta}_a = \omega_0 \left[ 1 - \left( \frac{\cos \theta^* + n_z \sin \theta^*}{\cos \theta_a} - n_z \operatorname{tg} \theta_a \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

$$\theta_a = \arcsin \frac{n_z (\cos \theta^* + n_z \sin \theta^*) + (\sin \theta^* - n_z \cos \theta^*) \cos \vartheta}{1 + n_z^2} \quad (4.4)$$

$$\varphi_a = \arcsin \frac{\sqrt{1 + n_z^2} \sin \vartheta}{(\cos \theta^* + n_z \sin \theta^*) \cos \vartheta - n_z (\sin \theta^* - n_z \cos \theta^*)} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\vartheta = \sqrt{1 + n_z^2} \omega_0 \Delta t$$

Далее, рассматривая пассивный полет при начальных условиях, определяемых выражениями (4.3)—(4.5), получаем в параметрическом виде выражения для траектории аппарата после окончания действия перегрузки

$$\theta = \arcsin [\dot{\theta}_a \omega_0^{-1} \cos \theta_a \sin \omega_0 (t - t_a) + \sin \theta_a \cos \omega_0 (t - t_a)] \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_a + \arcsin \left[ \cos \theta_a \frac{\omega_0 \dot{\theta}_a^{-1} \operatorname{tg} \theta_a + \operatorname{tg} \omega_0 (t - t_a)}{1 - \omega_0 \dot{\theta}_a^{-1} \operatorname{tg} \theta_a \operatorname{tg} \omega_0 (t - t_a)} \left( 1 - \frac{\dot{\theta}_a^2}{\omega_0^2} \right)^{1/2} \right] - \\ - \arcsin \left( 1 + \frac{\dot{\theta}_a^2}{\omega_0^2} \right)^{-1/2} \sin \theta_a \end{aligned} \quad (4.7)$$

Приравняв  $\dot{\theta}$  нулю (см. (3.3)) и используя (4.3), получаем выражение для определения искомого угла поворота плоскости орбиты спутника  $\psi$

$$\cos 2\psi = 2 [\cos \theta^* + n_z (\sin \theta^* - \sin \theta_a)]^2 - 1 \quad (4.8)$$

Анализ зависимости (4.8) (кривая 2, фиг. 5) показывает, что при значениях  $n_z$ , меньших  $n_z(\tau/2)$ , определяемой формулой (3.12), величина угла поворота плоскости орбиты  $\psi$  колеблется относительно значения, определяемого формулой (3.10), которая дает  $\psi$  для величины  $n_z$ , соответствующей расходованию запаса топлива за целое число полупериодов. Амплитуда колебаний  $\psi$  в представленном на фиг. 5 случае  $v/V_0 = 0.3$  не превышает  $1^\circ$  и уменьшается вместе с уменьшением  $n_z$ . Период колебаний равен разности последовательных времен работы двигателя, соответствующих расходованию всего запаса топлива за целое число полуоборотов. Так же, как и амплитуда, период колебаний уменьшается при уменьшении перегрузки  $n_z$ .

5. В заключение отметим, что при использовании аэродинамических сил для создания боковой перегрузки возможный угол поворота плоскости орбиты при заданном запасе топлива будет изменяться прямо пропорционально величине аэродинамического качества, так как использование аэродинамического качества при данной перегрузке можно трактовать как соответствующее изменение располагаемой идеальной скорости.

Поступила 26 IX 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Су слов Г. К. Теоретическая механика. Гостехиздат, 1956.