Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

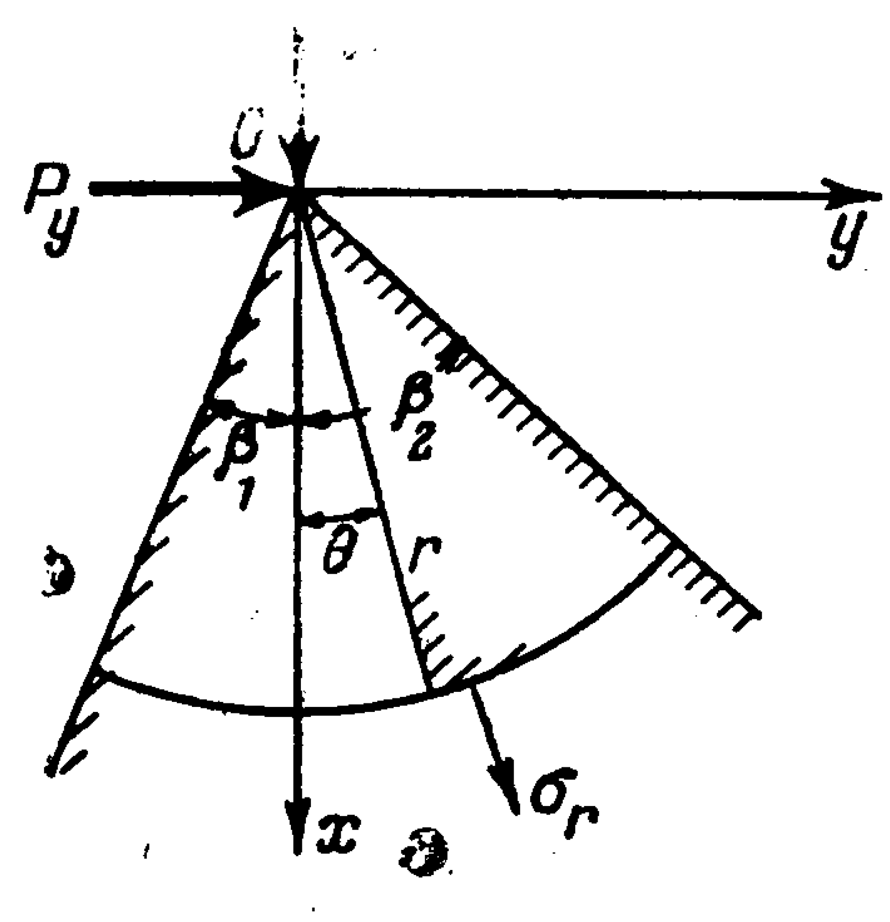
РАДИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КЛИНЕ И ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ МОДУЛЕМ УПРУГОСТИ

С. Г. Лехницкий

(Ленинград)

Рассматривается плоская задача теории упругости для бесконечного изотропного клина, у которого модуль упругости E есть непрерывная функция координат r, θ, нагруженного силой, приложенной к вершине и, в частности, для полуплоскости. Устанавливается, что существует определенный и довольно широкий класс функций $E(r, \theta)$, которому соответствует так называемое радиальное распределение напряжений ($\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$), отличающееся от распределения в клине и полуплоскости с постоянным модулем только напряжением σ_r (и даже, в частных случаях, совсем не отличающееся).

1. Уравнение для модуля упругости. Рассмотрим бесконечный упругий клин с углом при вершине равным $\beta_1 + \beta_2$, у которого модуль Юнга и коэффициент Пуассона E, ν являются непрерывными функциями координат r, θ, где θ отсчитывается от оси x, вообще не совпадающей с осью симметрии. Пусть данное тело находится в обобщенном плоском напряженном состоянии или в состоянии плоской деформации под действием силы, приложенной к вершине (фиг. 1). Составляющие силы, отнесенные к единице толщины, обозначим через P_x, P_y; для составляющих напряжения, деформации и перемещения используем обычные обозначения.



Фиг. 1

Как известно из классической, линейной теории упругости, в изотропном клине с постоянными E, ν имеет место радиальное распределение напряжений (см., например, [1])

$$\sigma_r = (A\cos\theta + B\sin\theta)\frac{1}{r}, \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \qquad (1.1)$$

где A, B — коэффициенты, определяемые из условий равновесия части клина, вырезанной дугой произвольного радиуса r

$$\int_{-\beta_1}^{\beta_2} \sigma_r r\cos\theta d\theta = -P_x, \qquad \int_{-\beta_1}^{\beta_2} \sigma_r r\sin\theta\, d\theta = -P_y \qquad (1.2)$$

Некоторые результаты по теории плоской задачи для тела с переменным модулем упругости приводятся в работах Голецкого [2], Кончковского [3], Теодореску и Пределеану [4, 5] и др.; в последних двух дано решение для полуплоскости с модулем упругости, заданным в виде показательной функции координат, под действием периодически повторяющейся нагрузки на границе. Решение задачи для клина и полуплоскости в общей постановке, по-видимому, еще не найдено.

Не задаваясь целью решить задачу в общем случае, при любых E, ν, поставим ее следующим образом: определить, каким условиям должны удовлетворять модуль Юнга и коэффициент Пуассона для того, чтобы распределение напряжений было радиальным ($\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$). При этом будем исходить из уравнений линейной теории упругости.

Следует различать два случая — плоскую деформацию и обобщенное плоское напряженное состояние. Если в первом случае положить $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ и ввести новые упругие характеристики

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \qquad \mu = \frac{\nu}{1-\nu} \tag{1.3}$$

то основную систему уравнений равновесия упругого тела можно записать таким образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\sigma_r}{E'} \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\mu r \sigma_r}{E'} - u, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} + r\frac{\partial v}{\partial r} - v = 0\end{gathered} \tag{1.4}$$

Из первых трех уравнений находим

$$\sigma_r = \frac{f(\theta)}{r} \tag{1.5}$$

$$u = \int \frac{f(\theta)}{E'r}\,dr + u', \qquad v = -\int \left[\frac{\mu f(\theta)}{E'} + \int \frac{f(\theta)}{E'r}\,dr\right] d\theta + v' \tag{1.6}$$

где $f(\theta)$ — неизвестная функция, u', v' — «жесткие» смещения. Из четвертого уравнения (1.4) получим условие совместности системы трех уравнений для двух функций u, v, которое после элементарных преобразований примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\frac{f}{E'} + \frac{f}{E'} - r\frac{\partial}{\partial r}\frac{f}{E'} - r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{\mu f}{E'} = 0 \tag{1.7}$$

Следовательно, распределение напряжений будет радиальным во всех случаях, когда E', μ удовлетворяют уравнению (1.7), куда входит также и неизвестная функция f одной переменной θ; она должна удовлетворять условиям равновесия (1.2). В случае обобщенного плоского напряженного состояния получим те же выражения (1.6) и уравнение (1.7), только вместо E', μ нужно подставить E, ν.

2. Случай постоянного коэффициента Пауссона. Если модуль E есть функция r, θ, а ν — постоянная, то уравнение (1.7) перепишется так:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\frac{f}{E} + \frac{f}{E} - r\frac{\partial}{\partial r}\frac{f}{E} - \mu r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{f}{E} = 0 \tag{2.1}$$

где в случае плоской деформации $\mu = \nu/(1-\nu)$ и в случае обобщенного плоского напряженного состояния $\mu = \nu$.

Изучим в первую очередь класс решений уравнения (2.1) в виде произведений функции расстояния r на функцию полярного угла θ

$$E = E_r(r)\,E_\theta(\theta) \tag{2.2}$$

Подставляя в (2.1) и разделяя переменные, получим

$$\left(\frac{f}{E_\theta}\right)'' + n^2\frac{f}{E_\theta} = 0, \qquad \mu\left(\frac{1}{E_r}\right)'' + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{E_r}\right)' + \frac{n^2-1}{r^2}\frac{1}{E_r} = 0 \tag{2.3}$$

где n — произвольное число, вещественное, мнимое или нуль. Интегрируя, получим для $n \neq 0$

$$\frac{f}{E_\theta} = A\cos n\theta + B\sin n\theta, \qquad \frac{1}{E_r} = C_1 r^\alpha + C_2 r^{-\alpha+1-1/\mu} \tag{2.4}$$

$$E = \frac{E_\theta}{C_1 r^\alpha + C_2 r^{-\alpha+1-1/\mu}} \qquad \left(\alpha \neq 1,\ \alpha \neq \frac{1}{\mu}\right) \tag{2.5}$$

Здесь A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные. При заданном α

$$n = \sqrt{(1-\alpha)(1+\mu\alpha)} \tag{2.6}$$

Величина E_θ может быть произвольной функцией θ (но при этом, разумеется, выражение (2.5) только тогда имеет физический смысл, когда оно положительно, ибо всегда $E \geqslant 0$).

Если материал обладает модулем упругости, аналитическое выражение которого будет каким-либо частным случаем формулы (2.5), то в клине получается радиальное распределение напряжений вида

$$\sigma_r = \frac{E_\theta}{r}(A\cos n\theta + B\sin n\theta), \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \tag{2.7}$$

Коэффициенты A, B найдутся из условий равновесия (1.2).

Число n будет вещественным при $-1/\mu < \alpha < 1$ и мнимым при $\alpha > 1$ и $\alpha < -1/\mu$. При мнимых n косинус и синус в (2.7) должны быть заменены гиперболическими косинусом и синусом аргумента $in\theta$. В формуле (2.5) величина α может быть и комплексным числом, а именно

$$\alpha = -\frac{1-\mu}{2\mu} + \delta i, \qquad -\alpha + 1 - \frac{1}{\mu} = -\frac{1-\mu}{2\mu} - \delta i \tag{2.8}$$

где δ — произвольное положительное число. Соответствующий модуль Юнга представляется функцией

$$E = \frac{E_\theta}{C_1\cos(\delta\ln r) + C_2\sin(\delta\ln r)}\, r^{\frac{1-\mu}{2\mu}} \tag{2.9}$$

Напряжение σ_r определяется по формуле (2.7), в которой

$$n = \sqrt{\mu\delta^2 + \frac{(1+\mu)^2}{4\mu}} \tag{2.10}$$

При $\nu = 0$, $\mu = 0$ модуль, обеспечивающий радиальное распределение напряжений, получится как предел выражения (2.5) (при $C_1 \neq 0$)

$$E = E_\theta r^{-\alpha} \qquad (n = \sqrt{1-\alpha}) \tag{2.11}$$

Кроме (2.5), существует еще модуль (соответствующий $n = 0$)

$$E = E_\theta\left(C_1 r + C_2 r^{-\frac{1}{\mu}}\right)^{-1} \tag{2.12}$$

при котором получается радиальное распределение вида

$$\sigma_r = \frac{E_\theta}{r}(A + B\theta), \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \tag{2.13}$$

При постоянном E ($E_\theta = \text{const}$, $C_2 = \alpha = 0$ в формуле (2.5)) получаем известное решение (1.1).

Если модуль E является суммой выражений вида (2.5) при различных α, то распределение напряжений радиальным уже не будет (так как невозможно из уравнения (2.1) определить $f(\theta)$). Однако можно отметить особые случаи, когда функция $1/E$ представляется в виде суммы произведений, обратных (2.5), а распределение напряжений будет радиальным (правда, для частных случаев клина и нагрузки).

Случай 1. Модуль упругости задан в виде функции

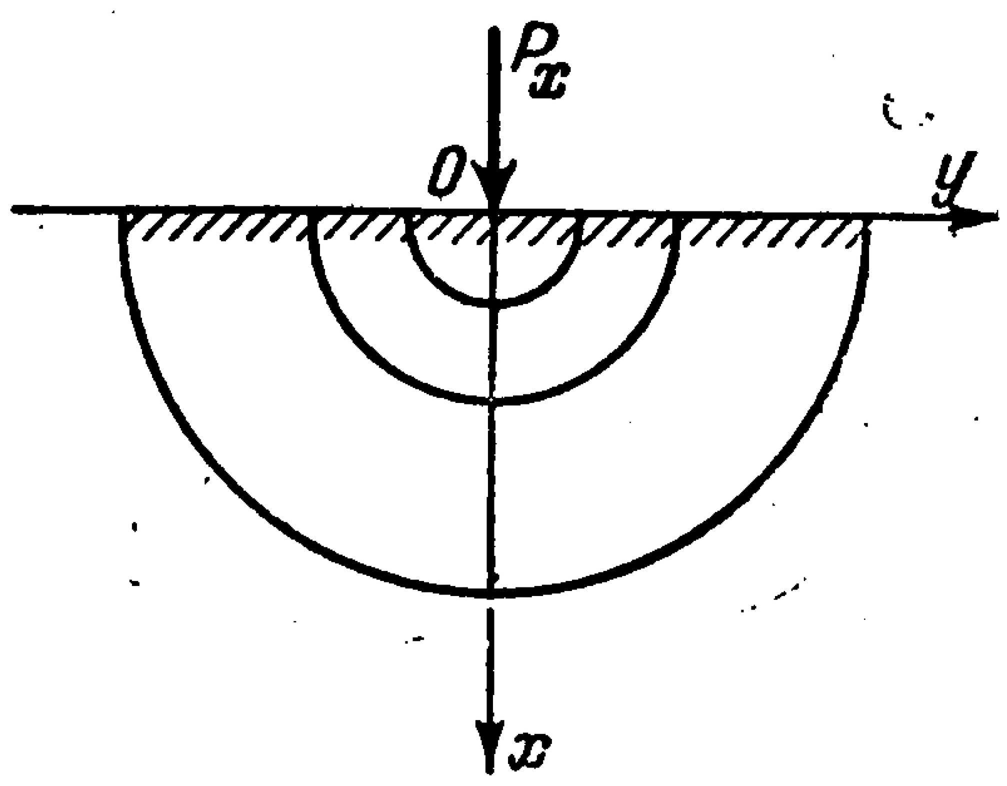
$$E = E_\theta \left[C_{10} r + C_{20} r^{-\frac{1}{\mu}} + \sum_{k=1}^{N} \left(C_{1k} r^{\alpha_k} + C_{2k} r^{-\alpha_k + 1 - \frac{1}{\mu}} \right) \cos n_k \theta \right]^{-1} \tag{2.14}$$

Здесь θ отсчитывается от оси x, совпадающей с осью симметрии клина ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$), C_{1k}, C_{2k} — постоянные, не равные одновременно нулю, E_θ — четная функция θ и притом такая, что $E \geqslant 0$ во всей области клина

$$n_k = \sqrt{(1 - \alpha_k)(1 + \mu \alpha_k)} \tag{2.15}$$

Распределение напряжений от силы, направленной по оси симметрии ($P_y = 0$), найдется по формуле

$$\sigma_r = \frac{A E_\theta}{r}, \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \tag{2.16}$$



Фиг. 2

Коэффициент A определится из первого условия (1.2); второе будет удовлетворено тождественно. При $\beta = \pi/2$ получим решение для полуплоскости под действием нормальной силы P_x (фиг. 2). Если в формуле (2.14) величина E_θ — постоянная, то решение имеет вид

$$\sigma_r = -\frac{P_x}{2r}, \qquad \sigma_\theta = \sigma_{r\theta} = 0 \tag{2.17}$$

Линии одинакового напряжения $\sigma_r = \text{const}$ (изобары) имеют форму окружностей с центром в точке приложения силы (фиг. 2).

Случай 2. Модуль упругости задан в виде функции

$$E = E_\theta \left[\left(C_{10} r + C_{20} r^{\frac{1}{\mu}} \right) \theta + \sum_{k=1}^{N} \left(C_{1k} r^{\alpha_k} + C_{2k} r^{-\alpha_k + 1 - \frac{1}{\mu}} \right) \sin n_k \theta \right]^{-1} \tag{2.18}$$

Здесь θ отсчитывается от оси симметрии клина, E_θ — нечетная функция θ, но такая, что $E \geqslant 0$ во всей области клина. Распределение напряжений от силы P_y, нормальной к оси клина ($P_x = 0$), найдется по формулам (2.16).

Из условий равновесия (1.2) первое удовлетворяется тождественно, второе же послужит для определения постоянной A.

Если в суммах (2.14) и (2.18) есть члены с $\alpha_k > 1$ и $\alpha_k < 1/\mu$, то соответствующие косинус и синус должны быть заменены гиперболическими от аргумента $in\theta$.

3. Распределение напряжений при степенном законе изменения E. Рассмотрим случай, когда модуль упругости меняется по закону

$$E = E_m x^m = E_m r^m \cos^m \theta \tag{3.1}$$

где m — произвольное вещественное число, положительное или отрицательное, целое или дробное (x отсчитываются от оси, вообще не перпендикулярной к оси симметрии клина). Имеем частный случай выражения (2.5), в котором $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $\alpha = -m$, $E_\theta = E_m \cos^m \theta$; постоянная

$$n = \sqrt{(1+m)(1-\mu m)} \tag{3.2}$$

будет вещественной при $-1 < m < 1/\mu$ и мнимой при $m < -1$ и $m > 1/\mu$. Напряжение σ_r определится по формуле

$$\sigma_r = \frac{\cos^m \theta}{r}(A \cos n\theta + B \sin n\theta) \tag{3.3}$$

Для коэффициентов A, B получаем уравнения

$$\begin{aligned} A \int \cos n\theta \cos^{m+1}\theta \, d\theta + B \int \sin n\theta \cos^{m+1}\theta \, d\theta &= -P_x \\ A \int \cos n\theta \cos^m \theta \sin\theta \, d\theta + B \int \sin n\theta \cos^m \theta \sin\theta \, d\theta &= -Py \end{aligned} \tag{3.4}$$

(пределы интегрирования $-\beta_1$ и β_2)

В случае мнимого $n = in_1$

$$\sigma_r = \frac{\cos^m \theta}{r}(A \operatorname{ch} n_1\theta + B \operatorname{sh} n_1\theta) \tag{3.5}$$

Остановимся на двух частных случаях полуплоскости.

Случай 1. Модуль упругости меняется пропорционально расстоянию от границы

$$E = E_1 x, \quad m = 1, \quad \alpha = -1$$

На основании формулы (3.3) и уравнений (3.4) находим

$$\sigma_r = -\frac{1+\mu}{\sin(n\pi/2)} \frac{\cos\theta}{r}(0.5nP_x \cos n\theta + P_y \sin n\theta) \qquad (n = \sqrt{2(1-\mu)}) \tag{3.6}$$

Так как коэффициент Пуассона для разных материалов меняется в пределах от 0 до 0.5, то при обобщенном плоском напряженном состоянии $1 \leqslant n \leqslant \sqrt{2} = 1.4142$.

При плоской же деформации $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ и $0 \leqslant n \leqslant \sqrt{2}$, причем $n = 0$ соответствует несжимаемому материалу ($\nu = 0.5$). В последнем случае формула (3.6) теряет силу, так как выражение для E следует рассматривать как частный случай выражения (2.12) и ему соответствует напряжение (2.13) или

$$\sigma_r = -\frac{2\cos\theta}{\pi r}(P_x + 2P_y\theta) \tag{3.7}$$

Отсюда видно, что распределение напряжений под действием нормальной силы ($P_y = 0$) в случае плоской деформации и несжимаемого материала получается точно таким же, как и в случае однородной изотропной полуплоскости. Заметим, что это же имеет место и тогда, когда модуль упругости зависит от координат следующим образом:

$$E = E_1 \cos\theta \left[C_1 r + C_2 r^{\frac{1}{\mu}}\right]^{-1} \tag{3.8}$$

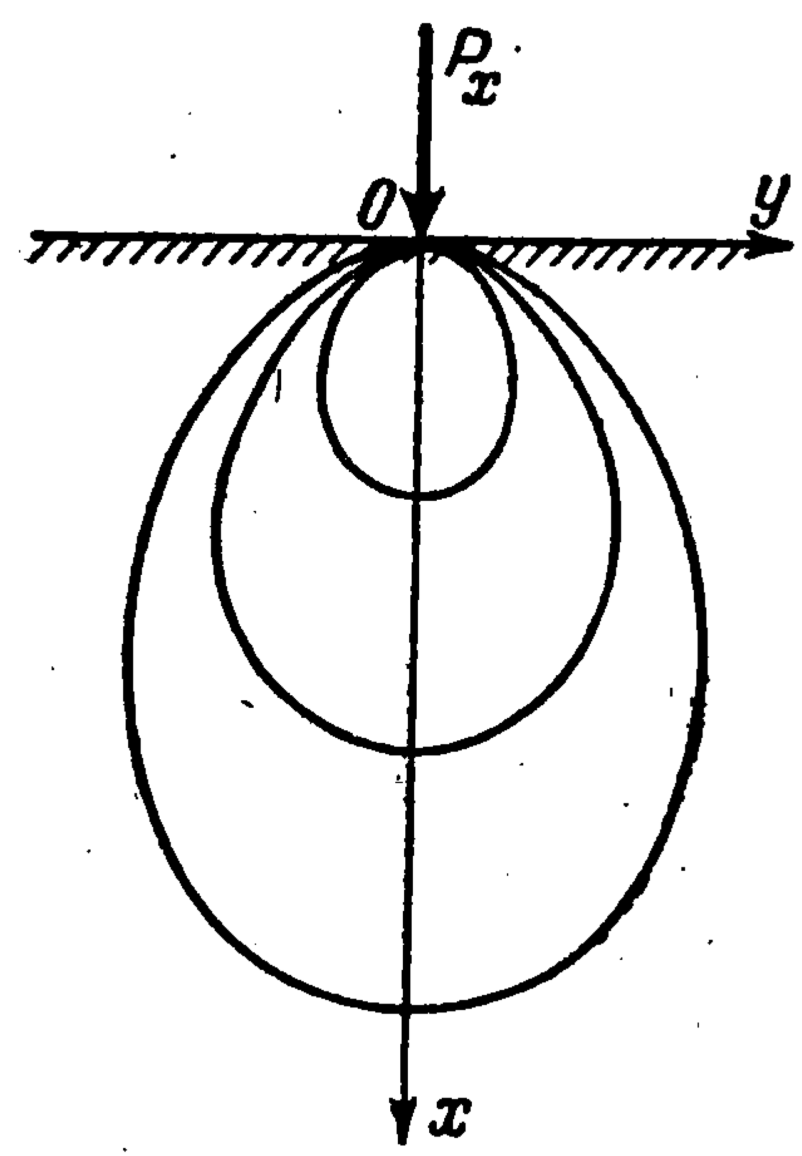
В этом легко убедиться, используя формулу (2.14) и определяя постоянные A и B из условий равновесия (1.2); при $P_y = 0$ получим

$$B = 0$$

В случае обобщенного плоского напряженного состояния и несжимаемого материала $n = 1$ и

$$\sigma_r = -0.75\, P_x \frac{\cos^2\theta}{r} \tag{3.9}$$

Линии одинаковых напряжений (изобары) будут иметь овальную форму (фиг. 3).



Фиг. 3

Случай 2. Модуль упругости меняется обратно пропорционально расстоянию

$$E = \frac{E_{-1}}{x}$$

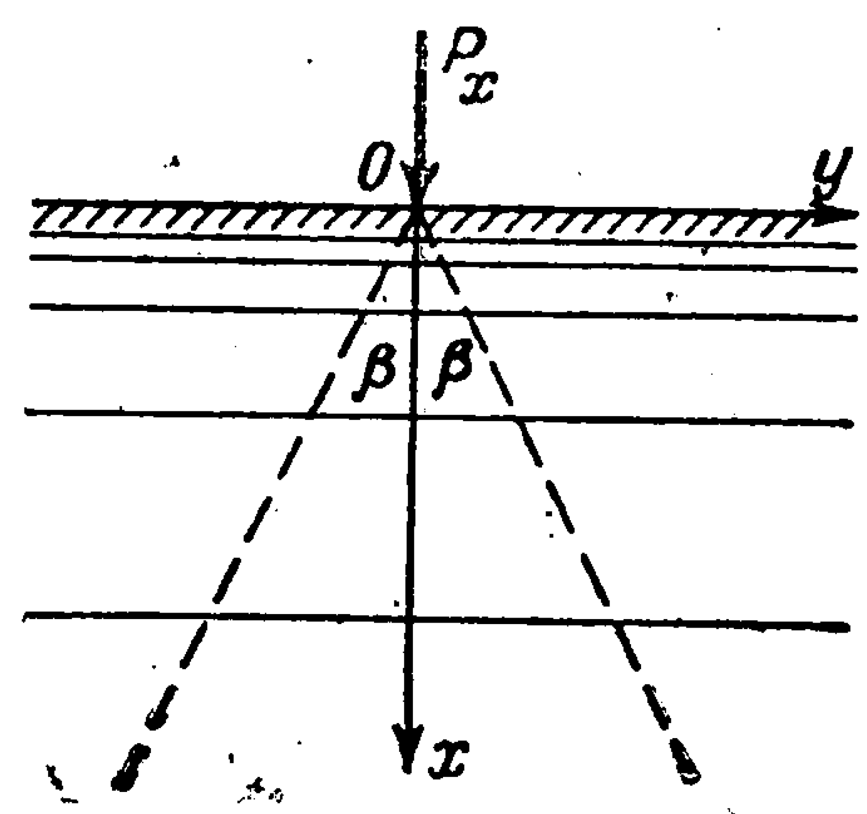
Выражение для E есть частный случай (2.12)

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad E_\theta = \frac{E_{-1}}{\cos\theta}$$

Для клина с осью x, совпадающей с осью симметрии $(\beta_1 = \beta_2 = \beta)$, получаем

$$\sigma_r = -\frac{1}{2r\cos\theta}\left[\frac{P_x}{\beta} + \frac{P_y}{g(\beta)}\theta\right]$$

$$\left(g(\beta) = \int_0^\beta \theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta\right) \tag{3.10}$$



Фиг. 4

При стремлении угла β к $\pi/2$ величина g неограниченно возрастает и для полуплоскости получим

$$\sigma_r = -\frac{P_x}{\pi x} \tag{3.11}$$

Таким образом, теория (по крайней мере линейная) приводит к заключению: для полуплоскости, у которой модуль упругости E меняется обратно пропорционально расстоянию от границы, а коэффициент Пуассона есть величина постоянная, сила, направленная вдоль границы совсем не вызовет напряжений. Напряжение от нормальной силы меняется по такому же закону, как и модуль E, так что изобарами $\sigma_r = \text{const}$ будут прямые, параллельные границе (фиг. 4).

Поступила 8 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Теория упругости. М.—Л., ОНТИ, 1937.
2. Golecki J. On the foundations of the theory of elasticity of plane incompressible non-homgeneous| bodies. Arch. mech. stosowanej, 1959, 11, No 4.
3. Kaczkowski Z. Statics of non-homogeneous rectangular plates and discs. Non Homogeity in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, London—New York — Paris — Los-Angeles, 1959.
4. Theodorescu P. P., Predeleanu M. Quelques conditions sur le problème des corps élastiques héterogens. Pergamon Press, London — New York — Paris — Los - Angeles, 1959.
5. Theodorescu P. P., Predeleanu M. Über das ebene Problem Nichthomogener elastischer Körper. Acta techn. Acad. scient. hung., 1959, 27, No 3—4