Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОДНА ФОРМА РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И РЕШЕНИЕ ЭТИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СФЕРЫ

А. Я. Александров, Ю. И. Соловьев
(Новосибирск)

В работах [1-3] предложен метод решения пространственных осесимметричных задач при помощи функций комплексного переменного; при этом уравнения задачи определяются вращением плоского состояния относительно оси симметрии или линейным перемещением осесимметричного состояния. Ниже (§ 1) путем использования общего решения пространственной задачи теории упругости в форме П. Ф. Папковича получены уравнения [2,3]. Эти уравнения используются для решения первой и второй основных задач теории упругости для сферы и пространства со сферической полостью (§ 2).

§ 1. Общие уравнения для осесимметричных задач. 1°. В случае осесимммметричной деформации тела вращения компоненты упругого смещения w, u могут быть представлены следующим образом (см., например, [4]):

$$2Gw = 4(1-\nu)B_z - \frac{\partial}{\partial z}(zB_z + rB_r + B_0)$$

$$2Gu = 4(1-\nu)B_r - \frac{\partial}{\partial r}(zB_z + rB_r + B_0) \qquad (1.1)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, B_z, B_r, B_0 — функции переменных z, r, удовлетворяющие уравнениям

$$\triangle B_z = 0, \qquad \triangle(B_r e^{i\theta}) = 0, \qquad \triangle B_0 = 0 \qquad (1.2)$$

$$\left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)$$

В этих равенствах и ниже z, r, θ — цилиндрические координаты (z — ось вращения).

Проведем секущую плоскость через ось z. В сечении получится симметричная плоская фигура (фиг. 1). Рассмотрим симметрично расположенные точки t и $\bar{t}$. Введем функции комплексного переменного φ_1, φ_2, φ_3 при помощи равенств

$$B_z(z, r) = \frac{1}{\pi i}\int_{\bar{t}}^{t} \varphi_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar{t})}}$$

$$B_r(z, r) = \frac{1}{\pi i r}\int_{\bar{t}}^{t} \varphi_2(\zeta)\frac{(\zeta - z)\, d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar{t})}} \qquad (1.3)$$

$$B_0(z, r) = \frac{1}{\pi i}\int_{\bar{t}}^{t} \varphi_3(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar{t})}}$$

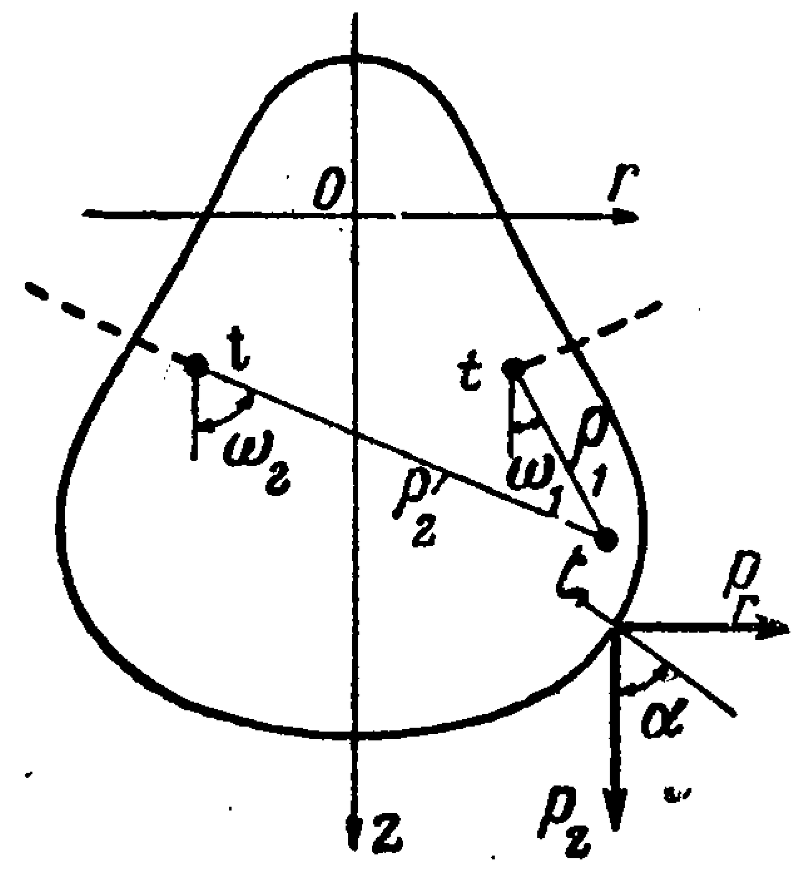
$$(t = z + ri, \ \bar{t} = z - ri)$$

Здесь ζ — комплексное переменное в той же плоскости, изменяющееся от $\zeta = \bar{t}$ до $\zeta = t$. В этих равенствах следует использовать одну из ветвей функции $\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar{t})}$; для определенности положим, что

$$\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar{t})} = \sqrt{\rho_1\rho_2}\, e^{i(\omega_1+\omega_2)/2}$$

если

$$\zeta - t = \rho_1 e^{i\omega_1}, \qquad \zeta - \bar{t} = \rho_2 e^{i\omega_2}$$



Фиг. 1

Линию разветвления (на фиг. 1 показана пунктиром) будем проводить через бесконечно удаленную точку.

Потребуем, чтобы величина интегралов в (1.3) не зависела от пути интегрирования, если интегрирование производится вдоль гладкой или кусочногладкой кривой, целиком лежащей внутри области и не пересекающей линии разветвления. Кроме того, учтем, что левые части равенств (1.3) будут действительными величинами. Отсюда следует, что функции $\varphi_n(\zeta)$ должны быть голоморфны внутри рассматриваемой области, причем

$$\operatorname{Re}\varphi_n(\zeta) = \operatorname{Re}\varphi_n(\bar{\zeta}), \qquad \operatorname{Im}\varphi_n(\zeta) = -\operatorname{Im}\varphi_n(\bar{\zeta}) \qquad (n = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

Нетрудно убедиться, что интегралы в формулах (1.3) сходятся абсолютно и равномерно при $r > 0$. Когда $r = 0$ (т. е. на оси симметрии), будут иметь место равенства

$$B_z(z, 0) = \varphi_1(z), \qquad B_r(z, 0) = 0, \qquad B_0(z, 0) = \varphi_3(z) \tag{1.5}$$

При этих условиях правые части в (1.3) являются непрерывными и дифференцируемыми функциями z и r. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что уравнения (1.2) удовлетворяются тождественно.

Подставляя (1.3) в (1.1), получим для перемещений

$$2Gw = \frac{1}{\pi i}\int_{\bar{t}}^{t} [\varkappa\varphi_1(\zeta) - z\varphi_1'(\zeta) - (\zeta - z)\varphi_2'(\zeta) - \varphi_3'(\zeta)] \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar{t})}} \tag{1.6}$$

$$2Gu = \frac{1}{\pi i r}\int_{\bar{t}}^{t} [\varkappa\varphi_2(\zeta) - z\varphi_1'(\zeta) - (\zeta - z)\varphi_2'(\zeta) - \varphi_3'(\zeta)] \frac{(\zeta - z)\, d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar{t})}} \qquad (r > 0)$$

$$(\varkappa = 3 - 4\vartheta)$$

Введем обозначения

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2}[\varphi_1(\zeta) - \varphi_2(\zeta)]$$

$$\psi(\zeta) = \varphi_3'(\zeta) - \frac{\varkappa}{2}[\varphi_1(\zeta) + \varphi_2(\zeta)] + \frac{\zeta}{2}[\varphi_1'(\zeta) + \varphi_2'(\zeta)]$$

где $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ — голоморфные функции. Представим равенства (1.6) в следующей форме:

$$2Gw = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\bar t}^{t} [\varkappa\varphi(\zeta) - (2z-\zeta)\varphi'(\zeta) - \psi(\zeta)]\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar t)}} \tag{1.7}$$

$$2Gu = -\frac{1}{\pi i r}\int\limits_{\bar t}^{t}[\varkappa\varphi(\zeta) + (2z-\zeta)\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta)]\frac{(\zeta-z)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar t)}} \qquad (r>0)$$

При $r = 0$ будем иметь

$$2Gw = \varkappa\varphi(z) - z\varphi'(z) - \psi(z), \qquad u = 0 \tag{1.8}$$

Уравнения (1.7) можно использовать для решения осесимметричной задачи при заданных перемещениях w_0, u_0 на границе области. Для этого следует точки t считать лежащими на контуре области и производить интегрирование вдоль дуги контура. Тогда равенства (1.7) обратятся в систему двух интегральных уравнений относительно функций φ и ψ.

2°. Используя известные формулы, связывающие напряжения и перемещения в цилиндрических координатах, найдем выражения для напряжений

$$\sigma_z = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\bar t}^{t}[2\varphi'(\zeta) - (2z-\zeta)\varphi''(\zeta) - \psi'(\zeta)]\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar t)}} \tag{1.9}$$

$$\sigma_\theta = \frac{4\nu}{\pi i}\int\limits_{\bar t}^{t}\varphi'(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar t)}} - $$

$$-\frac{1}{\pi i r^2}\int\limits_{\bar t}^{t}[\varkappa\varphi(\zeta) + (2z-\zeta)\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta)]\frac{(\zeta-z)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar t)}}$$

$$\sigma_r = \frac{4(1+\nu)}{\pi i}\int\limits_{\bar t}^{t}\varphi'(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar t)}} - \sigma_z - \sigma_\theta$$

$$\tau_{rz} = -\frac{1}{\pi i r}\int\limits_{\bar t}^{t}[(2z-\zeta)\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta)]\frac{(\zeta-z)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta-t)(\zeta-\bar t)}} \qquad (r>0)$$

При $r = 0$ получим

$$\begin{gathered}\sigma_z = 2\varphi'(z) - z\varphi''(z) - \psi'(z), \qquad \tau_{rz} = 0\\ \sigma_\theta = \sigma_r = (2\nu+1)\varphi'(z) + \frac{1}{2}[z\varphi''(z) + \psi'(z)]\end{gathered} \tag{1.10}$$

Выражения (1.7) и (1.9) по существу совпадают с формулами статей [1-3]. Различие состоит только в ином расположении действительной и мнимой осей и несколько измененных обозначениях.

Напишем выражения для усилий на контуре p_z и p_r. Если α — угол наклона нормали контура (фиг. 1) к оси z, то усилия p_z и p_r могут быть выражены через напряжения следующим образом:

$$p_z = \sigma_z\cos\alpha + \tau_{zr}\sin\alpha, \qquad p_r = \tau_{rz}\cos\alpha + \sigma_z\sin\alpha \tag{1.11}$$

Подставим (1.9) в (1.11); учитывая, что $\cos\alpha = dr / ds$, $\sin\alpha = - dz / ds$, получим

$$p_z = -\frac{1}{\pi i r}\frac{d}{ds}\int_{\bar t}^{t} [\varphi(\zeta) - (2z - \zeta)\varphi'(\zeta) - \psi(\zeta)] \frac{(\zeta - z)\, d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}},$$

$$p_r = \frac{1}{\pi i r^2}\frac{d}{ds}\int_{\bar t}^{t} [\varphi(\zeta) + (2z - \zeta)\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta)] \left[\frac{(\zeta - z)^2}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}\right] d\zeta - \frac{\sin\alpha}{\pi i r^2}\int_{\bar t}^{t} [(3 + 4\nu)\varphi(\zeta) +$$

$$+ (2z - \zeta)\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta)] \frac{(\zeta - z)\, d\zeta}{\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}} \qquad (r > 0) \tag{1.12}$$

На оси симметрии

$$p_z = 2\varphi'(z) - z\varphi''(z) - \psi'(z), \qquad p_r = 0 \tag{1.13}$$

В этих формулах t — аффикс контурной точки. Равенства (1.12) можно использовать для решения осесимметричной задачи, когда на границе заданы внешние усилия.

3°. До сих пор предполагалось, что область, занятая телом, является конечной. Но те же самые рассуждения можно применить и к упругому пространству с осесимметричной полостью. Следует лишь линию разветвления для радикала $\sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}$ проводить через эту полость. Все ранее полученные формулы сохраняют свой смысл, за исключением (1.12). В равенствах (1.12) следует сменить направления p_z и p_r на противоположные, а под α понимать угол наклона к оси z внутренней нормали. Для сходимости интегралов в (1.3), а следовательно, и в остальных формулах необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi_n(\zeta)$ были голоморфны вне полости, включая бесконечно удаленную точку. Кроме того, необходимо выполнение равенств

$$\lim \varphi_1(\zeta) = 0, \qquad \lim \zeta\varphi_2(\zeta) = 0, \qquad \lim \varphi_3(\zeta) = 0 \qquad \text{при } \zeta \to \infty \tag{1.14}$$

Функции φ и ψ также должны быть голоморфны вне полости, и в окрестности бесконечно удаленной точки должны допускать разложение в ряды

$$\varphi(\zeta) = \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \cdots, \qquad \psi(\zeta) = \frac{a_1'}{\zeta} + \frac{a_2'}{\zeta^2} + \cdots \tag{1.15}$$

причем между a_1 и a_1' существует зависимость

$$(\varkappa + 1)\, a_1 + a_1' = 0 \tag{1.16}$$

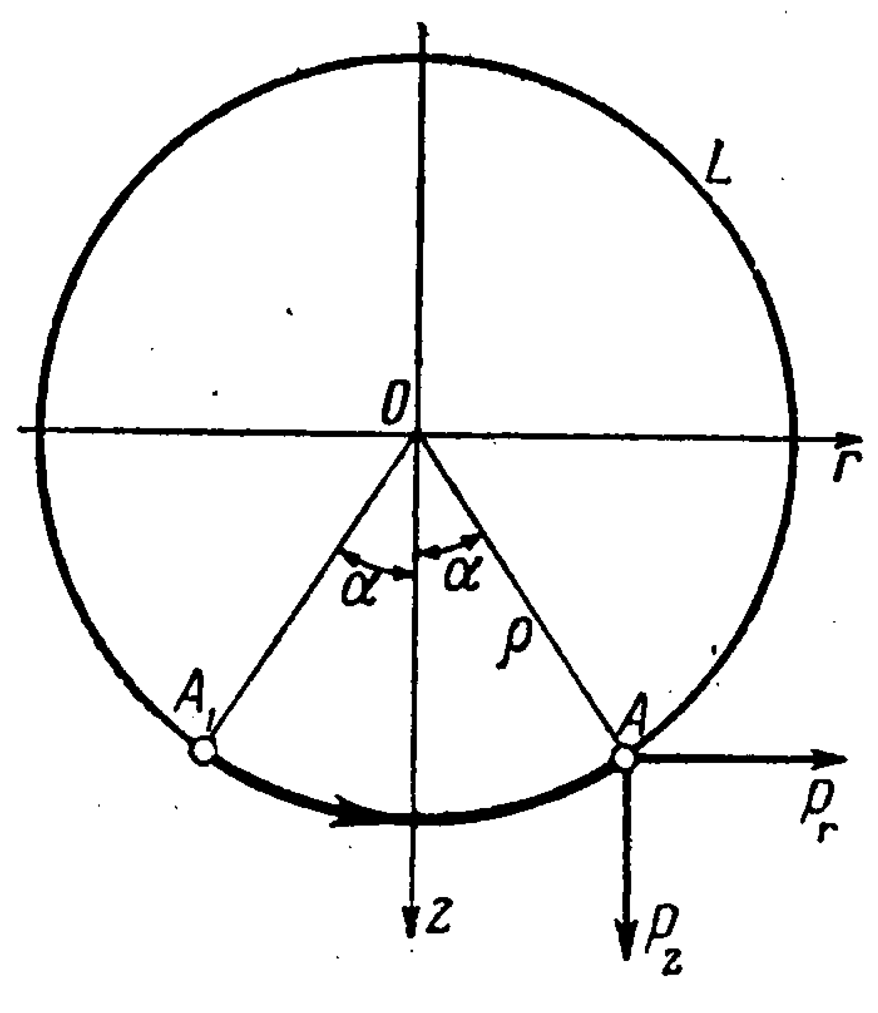
Эти коэффициенты легко могут быть найдены при помощи первой из формул (1.12). Если Z_0 — равнодействующая внешней нагрузки, приложенной внутри полости, то коэффициенты a_1 и a_1' равны

$$a_1 = \frac{Z_0}{4\pi(\varkappa + 1)}, \qquad a_1' = -\frac{Z_0}{4\pi} \tag{1.17}$$

Перемещения и напряжения точек, лежащих на оси симметрии ниже (фиг. 1) полости, определяются формулами (1.8), (1.10), (1.13). Для точек, лежащих на оси симметрии выше полости, следует в этих формулах сменить знаки на противоположные.

Полученные таким путем формулы отличаются от формул для пространства с полостью, полученных в работах [1-3], тем, что здесь фигурируют функции φ и ψ, являющиеся производными от соответствующих функций работ [1-3].

§ 2. Решение для сферы и пространства со сферической полостью. 1°. Пусть упругая сфера радиуса ρ нагружена осесимметричной нагрузкой с составляющими p_z и p_r. На фиг. 2 изображено сечение сферы плоскостью, проходящей через ось симметрии z.



Фиг. 2

Используем формулы (1.12). За путь интегрирования будем принимать дугу A_1A, т. е. положим $\zeta = \sigma$, где σ — аффикс точки контура, лежащей между A_1 и A.

Произведем интегрирование по частям в правых частях равенств (1.12), учитывая, что

$$t = \rho e^{i\alpha}, \quad \bar{t} = \rho e^{-i\alpha}, \quad z = \rho\cos\alpha, \quad r = \rho\sin\alpha$$

$$ds = \rho\, d\alpha, \qquad \sigma = \rho e^{i\theta} \qquad (-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha)$$

Затем дифференцируя результат по α, получим

$$p_z = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}[2\varphi'(\sigma) - \bar{\sigma}\varphi''(\sigma) - \psi'(\sigma)]\frac{e^{3i\theta/2}d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}} +$$

$$+\frac{3}{\pi}\rho\int_{-\alpha}^{+\alpha}\varphi''(\sigma)\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}\,e^{3i\theta/2}\,d\theta \tag{2.1}$$

$$p_r = \frac{1}{\pi}\rho\int_{-\alpha}^{+\alpha}[-\varphi''(\sigma) + \bar{\sigma}\varphi'''(\sigma) + \psi''(\sigma)]\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}\,e^{5i\theta/2}d\theta -$$

$$-\frac{5\rho^2}{3\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\varphi'''(\sigma)\,[2(\cos\theta-\cos\alpha)]^{3/2}e^{5i\theta/2}d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}[(2+4\nu)\varphi'(\sigma) + \bar{\sigma}\varphi''(\sigma) + \psi'(\sigma)]\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}\,e^{3i\theta/2}\,d\theta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\rho\int_{-\alpha}^{+\alpha}\varphi''(\sigma)\,[2(\cos\theta-\cos\alpha)]^{3/2}e^{3i\theta/2}d\theta$$

Введем голоморфные функции $F(\zeta)$ и $F_1(\zeta)$, связанные с функциями $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ соотношениями

$$\varphi'(\zeta) = 2\zeta F'(\zeta) + F_1(\zeta) \tag{2.2}$$

$$\psi'(\zeta) = 2F(\zeta) + \zeta F'(\zeta) - 2\rho^2 F''(\zeta) - F_1(\zeta)$$

Тогда равенства (2.1) можно преобразовать к виду

$$p_z = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}F_1(\sigma)\frac{e^{3i\theta/2}d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}} \tag{2.3}$$

$$p_r\sin\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}[4(1+\nu)\varphi'(\sigma) + 4\sigma^2F''(\sigma) - \tag{2.4}$$

$$-\sigma F_1'(\sigma) - F_1(\sigma)]\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}\,e^{3i\theta/2}d\theta$$

Воспользовавшись свойствами (1.4), которыми, очевидно, будут обладать и функции $F(\zeta)$ и $F_1(\zeta)$, представим (2.3) следующим образом:

$$p_z = \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^\alpha F_1(\sigma)\frac{e^{3i\theta/2}d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}$$

Умножим это равенство на

$$\frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}}$$

и проинтегрируем в пределах от 0 до γ.

В правой части переменим порядок интегрирования и учтем, что

$$\int_\theta^\gamma \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}} = \frac{\pi}{2}.$$

В результате будем иметь

$$\int_0^\gamma \frac{p_z\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}} = \operatorname{Re}\int_0^\gamma F_1(\sigma)e^{3i\theta/2}d\theta$$

Отсюда

$$2\rho e^{-i\gamma/2}\frac{d}{d\gamma}\int_0^\gamma \frac{p_z\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}} = 2\rho e^{-i\gamma/2}\operatorname{Re}\left[F_1(\tau)\,e^{3i\gamma/2}\right] =$$

$$= \tau F_1(\tau) + \frac{\bar\tau^2}{\rho}\overline{F_1(\tau)} \qquad (\tau=\rho e^{i\gamma}) \qquad (2.5)$$

Умножим левую и правую части (2.5) на величину

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\tau}{\tau-\zeta}$$

и возьмем интеграл по замкнутому контуру L. В силу известных свойств интегралов типа Коши получим

$$F_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)}\frac{2\rho}{\zeta}\,\frac{e^{-i\gamma/2}d\tau}{\tau-\zeta}\,\frac{d}{d\gamma}\int_0^\gamma\frac{p_z\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}} \qquad (2.6)$$

Рассуждая подобным же образом, можно найти

$$V(\gamma) = 2e^{-3i\gamma/2}\frac{d}{d\gamma}\left[\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d}{d\gamma}\int_0^\gamma\frac{pr\sin^2\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}}\right] -$$

$$-2ie^{-i\gamma}\frac{d}{d\gamma}\left[e^{-i\gamma/2}\frac{d}{d\gamma}\int_0^\gamma\frac{p_z\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}}\right] = 4(1+\nu)\varphi'(\tau) + 4\tau^2F''(\tau) -$$

$$-\frac{\bar\tau^2}{\rho^3}\left[\overline{\tau^2F_1(\tau)}\right]' + \frac{\bar\tau^3}{\rho^3}\left[4(1+\nu)\overline{\varphi'(\tau)} + 4\bar\tau^2\overline{F''(\tau)}\right] - \frac{\bar\tau^3}{\rho^3}\left[\bar\tau\overline{F_1(\tau)}\right] \quad (2.7)$$

а также

$$4v(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)}\frac{V(\gamma)\,d\tau}{\tau-\zeta} = 4(1+\nu)\varphi'(\zeta) + 4\zeta^2F''(\zeta) =$$

$$= 4\left[\zeta^2F''(\zeta) + 2(1+\nu)\zeta F'(\zeta) + (1+\nu)F(\zeta)\right] \qquad (2.8)$$

Решая дифференциальное уравнение относительно $F(\zeta)$, будем иметь

$$F(\zeta) = \frac{\zeta^{k_1}}{k_1-k_2}\int v(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{k_1+1}} - \frac{\zeta^{k_2}}{k_1-k_2}\int v(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{k_2+1}} \qquad (2.9)$$

где k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения

$$k^2 + (1-2\nu)k + 1 + \nu = 0$$

Постоянные интегрирования здесь выбираются таким образом, чтобы функция $F(\zeta)$ была голоморфной.

Все приведенные рассуждения остаются в силе и в случае упругого пространства, имеющего сферическую полость. Только в правой части формул (2.6), (2.8), (2.9) знак меняется на противоположный, а также меняется положительное направление p_z и p_r.

2°. Если на границе сферы заданы перемещения w_0, u_0, то исходными выражениями будут равенства (1.7).

Выкладки, аналогичные сделанным выше, приводят к формулам

$$f_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)}\frac{2e^{-i\gamma/2}d\tau}{\tau-\zeta}\frac{d}{d\gamma}\int\limits_0^\gamma\frac{2Gw_0\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}}$$

$$f(\zeta)=\frac{\zeta^k}{k}\int x(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^k}-\frac{1}{k}\int x(\zeta)\,d\zeta \tag{2.10}$$

Здесь

$$k=\frac{\varkappa+1}{2\varkappa},\qquad x(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)}\frac{X(\gamma)}{4\varkappa}\frac{d\tau}{\tau-\zeta}$$

$$X(\gamma)=\frac{2e^{-3i\gamma/i}}{\rho}\frac{d}{d\gamma}\left[\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d}{d\gamma}\int\limits_0^\gamma\frac{2Gu_0\sin^2\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}}\right]-$$

$$-\frac{2ie^{-i\gamma}}{\rho}\frac{d}{d\gamma}\left[e^{-i\gamma/2}\frac{d}{d\gamma}\int\limits_0^\gamma\frac{2Gw_0\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}}\right]$$

Функции $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$ связаны с функциями φ и ψ соотношениями

$$\varphi(\zeta)=2\zeta f'(\zeta)-f(\zeta) \tag{2.11}$$

$$\psi(\zeta)=-\varkappa f(\zeta)+(2\varkappa-1)\zeta f'(\zeta)-2\rho^2 f''(\zeta)-f_1(\zeta)$$

3°. *Пример 1. Упругая сфера единичного радиуса под действием равномерного давления p.* В рассматриваемом случае $p_z=-p\cos\alpha$, $p_r=-p\sin\alpha$

$$\int\limits_0^\gamma\frac{p_z\sin\alpha d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}}=-p\left(2\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{8}{3}\sin^3\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\int\limits_0^\gamma\frac{p_2\sin^2\alpha d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\gamma)}}=-p\left(\frac{16}{3}\sin^3\frac{\gamma}{2}-\frac{64}{15}\sin^5\frac{\gamma}{2}\right)$$

По формулам (2.6) — (2.9) получим

$$F_1(\zeta)=-p,\qquad V(\gamma)=-3p,\qquad v(\zeta)=-\frac{3}{4}p$$

$$F(\zeta)=-\frac{3p}{4k_1k_2}=-\frac{3p}{4(1+\nu)}$$

Из формул (2. 2) имеем

$$\varphi'(\zeta)=-\frac{3p}{4(1+\nu)},\qquad \varphi'(\zeta)=-\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}p$$

Отсюда с точностью до действительных постоянных

$$\varphi(\zeta)=-\frac{3p}{4(1+\nu)}\zeta,\qquad \psi(\zeta)=-\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}p\zeta$$

Согласно формулам (1. 10) напряжения на оси симметрии равны

$$\sigma_z=2\varphi'(z)-z\varphi''(z)-\psi'(z)=-p,\qquad \tau_{rz}=0$$

$$\sigma_r=\sigma_\theta=(2\nu+1)\varphi'(z)+\frac{1}{2}[z\varphi''(z)+\psi'(z)]=-p$$

Пример 2. *Сферическая полость радиуса* ρ *под действием равномерного давления* p. В этом случае $p_z = -p\cos\alpha$, $p_r = -p\sin\alpha$. Получаем

$$F_1(\zeta) = -p\frac{\rho^3}{\zeta^3}, \qquad V(\gamma) = -3p, \qquad v(\zeta) = 0, \qquad F(\zeta) = 0$$

$$\varphi'(\zeta) = 0', \qquad \varphi'(\zeta) = p\frac{\rho^3}{\zeta^3}, \qquad \varphi(\zeta) = 0, \qquad \psi(\zeta) = -p\frac{\rho^3}{2\zeta^2}$$

Соответствующие напряжения на оси симметрии

$$\sigma_z = -p\frac{\rho^3}{z^3}, \qquad \sigma_r = \sigma_\theta = p\frac{\rho^3}{2z^3} \qquad \text{при } z > 0$$

$$\sigma_z = p\frac{\rho^3}{z^3}, \qquad \sigma_r = \sigma_\theta = -p\frac{\rho^3}{2z^3} \qquad \text{при } z < 0$$

Пример 3. *Упругое пространство с впаянной абсолютно жесткой сферой, которая находится под действием осевой силы* Z_0. Здесь $w_0 = \mathrm{const}$, $u_0 = 0$

$$X(\gamma) = -2Gw_0\frac{e^{-2i\gamma}}{\rho}, \qquad x(\zeta) = -\frac{2Gw_0\rho}{4\varkappa\zeta^2}$$

$$f_1(\zeta) = 2Gw_0\rho\frac{1}{\xi}, \qquad f(\zeta) = -\frac{2Gw_0\rho}{2(3\varkappa+1)}\frac{1}{\zeta}$$

Отсюда

$$\varphi(\zeta) = \frac{3Gw_0\rho}{3\varkappa+1}\frac{1}{\zeta}, \qquad \psi(\zeta) = -\frac{3(\varkappa+1)Gw_0\rho}{3\varkappa+1}\frac{1}{\zeta} + \frac{4Gw_0\rho^3}{3\varkappa+1}\frac{1}{\zeta^3}$$

Из (1.17) можно записать

$$\frac{1}{4\pi}Z_0 = \frac{3(\varkappa+1)Gw_0\rho}{3\varkappa+1}$$

Отсюда

$$\varphi(\zeta) = \frac{Z_0}{4\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{\zeta}, \qquad \psi(\zeta) = -\frac{Z_0}{4\pi}\frac{1}{\zeta} + \frac{Z_0\rho^2}{3\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{\zeta^3}$$

При $\rho \to 0$ получим решение для сосредоточенной силы Z_0, приложенной в начале координат

$$\varphi(\zeta) = \frac{Z_0}{4\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{\zeta}, \qquad \varphi(\zeta) = -\frac{Z_0}{4\pi}\frac{1}{\zeta}$$

Напряжения по оси симметрии будут $(z > 0)$

$$\sigma_z = -\frac{(2-\nu)Z_0}{4\pi(1-\nu)}\frac{1}{z^2}, \qquad \sigma_r = \sigma_\theta = \frac{(1-2\nu)Z_0}{8\pi(1-\nu)}\frac{1}{z^2}$$

что совпадает с известными формулами.

Поступила 5 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я. Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости и решение осесимметричных задач при помощи аналитических функций. ДАН СССР, 1959, т. 129, № 4.
2. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций. ДАН СССР, 1961, т. 139, № 2.
3. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимостей между осесимметричными и плоскими состояниями. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.