

К РАСЧЕТУ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА ВОКРУГ РЕШЕТКИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ, ВИБРИРУЮЩИХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СДВИГОМ ФАЗ

Г. С. Самойлович

(Москва)

Неустановившееся движение одиночного крыла произвольной формы с постоянной циркуляцией подробно исследовано С. А. Чаплыгиным [1] и Л. И. Седовым [2].

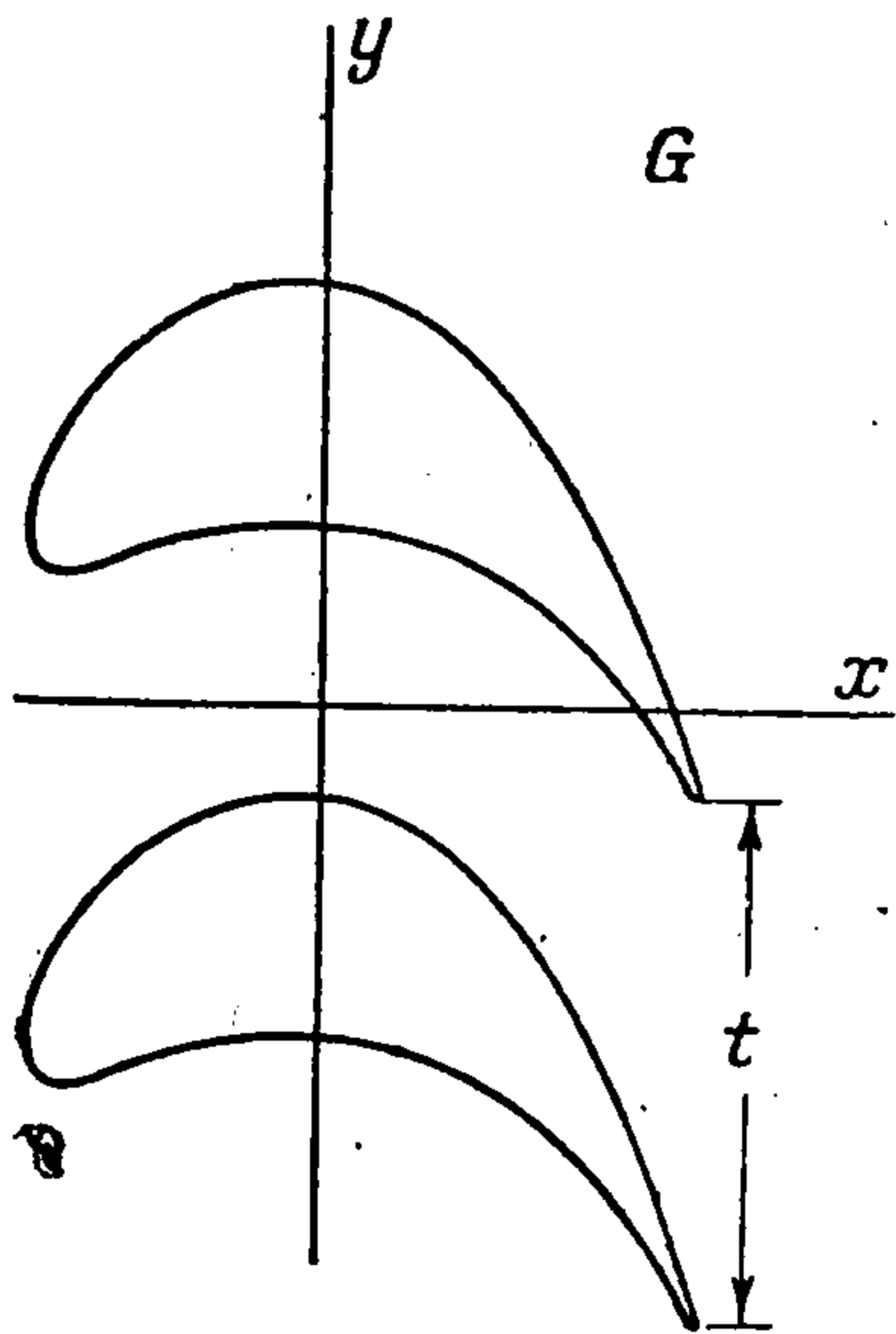
В работе рассматривается неустановившееся движение идеальной несжимаемой жидкости вокруг решетки профилей произвольной формы. Возмущенное движение жидкости вызывается вибрацией и в общем случае деформацией лопаток с малой амплитудой. Лопатки в решетке вибрируют синхронно, но с произвольным сдвигом фаз. Подробно рассматривается случай постоянного сдвига фазы от лопатки к лопатке.

Колебания профилей с постоянной циркуляцией рассмотрено в точной постановке. При колебании профилей с изменением циркуляции решается квазистационарная задача.

Одновременно в точной постановке решена задача установившегося обтекания решетки с различной циркуляцией вокруг профилей.

Приводятся примеры расчета потока при вибрации кругов в решетке и вибрации профилей газовой турбины.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ решетку, составленную из произвольных профилей (фиг. 1). Ось решетки пусть совпадает с осью y , шаг профилей обозначим через t .



Фиг. 1

Будем изучать неустановившееся потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости в бесконечно связной области G , являющейся внешностью указанной решетки.

Пусть на решетку набегаёт установившийся в бесконечности слева поток, а профили решетки совершают произвольные колебания с малой амплитудой. Будем сначала рассматривать случай, когда все профили колеблются синхронно с частотой ω , но с произвольным постоянным сдвигом фаз α между соседними профилями.

Введем комплексный потенциал скорости

$$f = \varphi + i\psi, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.1)$$

Здесь u, v — составляющие скорости жидкости w , потенциал скорости $\varphi = \varphi(x, y, \tau)$ и функция тока $\psi = \psi(x, y, \tau)$ зависят от координат и времени τ . Функции φ, ψ разобьем на суммы двух функций

$$\varphi = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y, \tau), \quad \psi = \psi_0(x, y) + \psi_1(x, y, \tau) \quad (1.2)$$

Здесь φ_0, ψ_0 не зависят от времени и решают задачу об установившемся обтекании решетки.

Эта задача может считаться решенной. В дальнейшем изложении предполагается, что она решена с использованием в качестве канонической области внешности решетки кругов [4].

Функции $\varphi_1(x, y, \tau)$, $\psi_1(x, y, \tau)$ являются потенциалом скорости и функцией тока абсолютного возмущенного движения жидкости, вызванного вибрацией профилей. Функцию φ_1 удобно представить в форме, аналогичной форме Кирхгофа [3]

$$\varphi_1 = U\varphi_{01} + V\varphi_{02} + \Omega\varphi_{03} + \Gamma\varphi_{04} + \varphi_{05} \quad (1.3)$$

Здесь U и V — составляющие скорости колебаний произвольного профиля по осям неподвижной системы координат, Ω — угловая скорость вращения профиля, Γ — циркуляция скорости вокруг профиля. Эти величины зависят только от времени. Функции φ_{01} , φ_{02} , φ_{03} , φ_{04} зависят только от координат точки, в которой вычисляется потенциал скорости.

Функция φ_{05} является потенциалом обтекания профилей потоком, вызванным вихревыми следами, появляющимися при изменении циркуляции согласно теореме Томсона. Очевидно, что φ_{05} зависят и от координат и от времени. Ниже рассматривается обтекание с постоянной циркуляцией в точной постановке, либо обтекание с переменной по времени циркуляцией, но в квазистационарной постановке ($\varphi_{05} = 0$), что допустимо при малых числах Струхала.

Поправка на влияние φ_{05} ввиду линейности задачи может быть внесена методом наложения.

Граничные условия на обтекаемых профилях состоят в равенстве в соответствующих точках нормальных составляющих скоростей контура и жидкости. Эти условия удобно записать через функцию ψ . Значение функции ψ на колеблющемся профиле, найденное из требования $\partial\psi / \partial n = w_n$, должно удовлетворять условию [2]

$$\psi = Uy - Vx - \frac{1}{2} \Omega (x^2 + y^2) + \text{const} \quad (1.4)$$

В бесконечной дали от решетки возмущения, вызванные колебаниями профилей, должны затухать. Только в том случае, если профили колеблются синфазно и с изменением циркуляции, возмущения на бесконечности будут справа оставаться конечными.

Решение задачи состоит в определении комплексного потенциала, удовлетворяющего на колеблющихся профилях условию (1.4). Поле скоростей находится при помощи (1.1), а поле давлений представляется интегралом Лагранжа

$$p = p_0(\tau) - \rho \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (1.5)$$

Вычисление сил и моментов, действующих на профили, удобно вести по общим формулам Л. И. Седова для неустановившегося движения.

§ 2. Вывод основных формул. Прежде чем переходить к решению, выведем некоторые общие формулы для специальной функции, имеющей свойства, которыми должен обладать комплексный потенциал скорости в поставленной задаче.

В области G введем в рассмотрение функцию $F(z, t, \alpha)$ комплексного переменного z , зависящую от двух вещественных параметров t и α , обладающую следующими свойствами.

1°. Функция $F(z, t, \alpha)$ удовлетворяет условию обобщенной периодичности в следующем смысле:

$$F(z + imt) = e^{-jma} F(z) \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots) \quad (2.1)$$

Здесь j — мнимая единица, не взаимодействующая с мнимой единицей i .

2°. Функция $F(z, t, \alpha)$ не имеет особых точек в области G .

3°. Функция

$$F(z, t, \alpha) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm \infty \quad (\alpha \neq 0) \quad (2.2)$$

Дадим интегральное представление для функции $F(z, t, \alpha)$.

Применив формулу Коши в бесконечно связной области G с учетом условия (2.2), получим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \oint_{L_m} \frac{F_m(\zeta) d\zeta}{z - \zeta} \quad (2.3)$$

Здесь $F_m(\zeta)$ означает граничное значение функции $F(z)$ на m -ом контуре L_m , составляющем решетку; интегрирование в (2.3) производится по всем контурам решетки. Сведем интегрирование к интегрированию только вдоль контура L_0 , который в дальнейшем будем называть основным. Делая в (2.3) замену переменных $\zeta = \zeta_0 + imt$ и воспользовавшись тем, что по условию (2.1)

$$F_m(\zeta) = e^{-jma} F_0(\zeta_0)$$

получим (индекс 0 в переменной интегрирования отброшен)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \oint_{L_0} \frac{F_0(\zeta) e^{-jma} d\zeta}{z - \zeta - imt} \quad (2.4)$$

Применив в (2.4) порядок интегрирования и суммирования (что в данном случае допустимо), получим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_0} \left[\frac{1}{z - \zeta} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{jma}}{z - \zeta + imt} + \frac{e^{-jma}}{z - \zeta - imt} \right) \right] F_0(\zeta) d\zeta \quad (2.5)$$

Выражение в квадратных скобках может быть преобразовано и просуммировано

$$\frac{1}{z - \zeta} + \frac{2(z - \zeta)}{t^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\alpha}{m^2 + (z - \zeta)^2/t^2} \quad (2.6)$$

$$- \frac{2ij}{t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin m\alpha}{m^2 + (z - \zeta)^2/t^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi - \alpha)z/t}{t \operatorname{sh} \pi z/t} - ij \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi - \alpha)z/t}{t \operatorname{sh} \pi z/t}$$

Тогда получим окончательную интегральную формулу, выражающую значения функции $F(z)$ в области G через ее значения на основном контуре

$$F(z) = \frac{1}{4i} \oint_{L_0} F_0(\zeta) \Phi(z - \zeta, \alpha, q) d\zeta \quad (2.7)$$

Здесь обозначено $q = 2/t$ и введена функция $\Phi(z, \alpha, q)$

$$\Phi(z, \alpha, q) = q \left(\frac{\operatorname{ch}^{1/2}(\pi - \alpha) qz}{\operatorname{sh}^{1/2} \pi qz} - ij \frac{\operatorname{sh}^{1/2}(\pi - \alpha) qz}{\operatorname{sh}^{1/2} \pi qz} \right) \quad (2.8)$$

Функция $\Phi(z, \alpha, q)$ обладает следующим основным свойством:

$$\Phi\left(z + \frac{2im}{q}\right) = e^{-jma} \Phi(z) \quad (2.9)$$

Функция $\Phi(z, \alpha, q)$ имеет простые полюсы в точках $2im/q$ и разлагается на простейшие дроби

$$\Phi(z, \alpha, q) = \frac{1}{z} + q \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{jma}}{qz + 2im} + \frac{e^{-jma}}{qz - 2im} \right) \quad (2.10)$$

Функция

$$\Phi(z, \alpha, q) \rightarrow \pm (1 \mp ij) e^{\mp \alpha qz} \quad \text{при } z \rightarrow \pm \infty \quad (2.11)$$

Отметим частные случаи

$$\begin{aligned} \Phi(z, 0, q) &= q \operatorname{cth}^{1/2} \pi qz + \operatorname{const} && \text{при } \alpha = 0 \\ \Phi(z, \pi, q) &= q \operatorname{csch}^{1/2} \pi qz && \text{при } \alpha = \pi \\ \Phi(z) &= 1/2 \pi/z && \text{при } q = 0 (t = \infty) \end{aligned}$$

Разложим $\Phi(z - \zeta, \alpha, q)$ в (2.7) в ряд по степеням ζ

$$\Phi(z - \zeta, \alpha, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^n}{n!} \frac{d^n \Phi(z)}{dz^n} \quad (2.12)$$

Тогда из (2.7), (2.8) и (2.12), изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$F(z) = \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} N_{n+1} \frac{d^n \Phi(z)}{dz^n} \quad \left(N_n = \frac{1}{2\pi i} \int F(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta \right) \quad (2.13)$$

Получим разложение $\Phi(z, \alpha, q)$ в окрестности полюсов. Прежде всего отметим, что на основании свойства (2.9) разложение в окрестности полюса m отличается от разложения в окрестности полюса $m = 0$ только множителем $\exp(-jma)$.

Сначала разложим в ряд Тейлора (в окрестности полюса $m = 0$) выражение, стоящее в скобках (2.10)

$$\cos m\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} q^{2k}}{2^{2k-1} m^{2k}} z^{2k-1} - ij \sin m\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{2k+1}}{2^{2k} m^{2k+1}} z^{2k+1} \quad (2.14)$$

Здесь отброшена несущественная в дальнейшем постоянная.

Подставив этот ряд в (2.10) и переменив порядок суммирования, найдем разложение $\Phi(z, \alpha, q)$ в окрестности полюса $m = 0$

$$\Phi(z, \alpha, q) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k q^{2k}}{2^{2k-1}} z^{2k-1} - ij \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k q^{2k+1}}{2^{2k}} z^{2k} \quad (2.15)$$

Здесь

$$c_k = c_k(\alpha) = (-1)^{k+1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\alpha}{m^{2k}}, \quad s_k = s_k(\alpha) = (-1)^k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\alpha}{m^{2k+1}} \quad (2.16)$$

Ряд (2.15) должен сходиться вплоть до ближайшей особой точки, т. е. при условии $|z| < t = 2/q$.

Чтобы получить разложение функции $F(z, \alpha, q)$ в ряд Лорана, продифференцируем (2.15) n раз по z . После преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{d^n \Phi(z)}{dz^n} = & \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}} + \sum_k \frac{q^{2k} c_k}{2^{2k-1}} \frac{(2k-1)!}{(2k-n-1)!} z^{2k-n-1} - \\ & - ij \sum_k \frac{s_k q^{2k+1}}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} z^{2k-n} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь суммирование по k производится так, чтобы степени z были больше нуля (несущественные постоянные можно отбрасывать).

Тогда на основании (2.13) и (2.17) $F(z)$ в окрестности полюса $m = 0$ может быть представлена рядом (промежуточные преобразования опущены)

$$\begin{aligned} F(z, \alpha, q) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! N_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k \frac{(2k-1)! q^{2k} c_k}{n! 2^{2k-1}} N_{2k-n} z^n - \\ & - ij \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k \frac{(2k)! q^{2k+1} s_k}{n! 2^{2k}} N_{2k-n+1} z^n \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ряд должен сходиться при условии $|z| < t = 2/q$.

§ 3. Неустановившийся поток вокруг решетки кругов, колеблющихся со сдвигом фаз. Пусть дана решетка кругов с радиусами $r = 1$, совершающих гармонические колебания с малой амплитудой.

Закон колебаний любого круга решетки может быть записан следующим образом:

$$U = U_0 e^{j(\omega\tau - m\alpha)}, \quad V = V_0 e^{j(\omega\tau - m\alpha)} \quad (3.1)$$

Тогда функция тока на окружностях согласно (1.4) должна принимать следующий вид

$$\psi = U_0 \sin \theta - V_0 \cos \theta$$

Здесь θ — полярный угол; множитель, зависящий от времени, опущен.

Так как внешность решетки кругов выбрана канонической областью, рассмотрим сразу более общий случай задания граничного значения ψ

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin n\theta \quad (3.2)$$

Комплексный потенциал скорости f неустановившегося безциркуляционного потока вокруг решетки кругов должен обладать теми же свойствами, что и функция $F(z, \alpha, q)$. Следовательно, вне решетки кругов комплексный потенциал должен разлагаться в функциональный ряд (2.13), а в окрестности полюса $m = 0$ в ряд Лорана (2.18).

Разложение $F(z, \alpha, q)$ в ряд Лорана в окрестности полюса m отличается от разложения (2.18), как следует из (2.1), только множителем $\exp(-j m \alpha)$.

Следовательно, задача заключается в определении таких коэффициентов N_n в (2.18), чтобы удовлетворить граничное условие (3.2).

В общем случае коэффициенты N_n должны быть комплексными числами по двум мнимым единицам

$$N_n = (A_n + jB_n) + i(C_n + jD_n) \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в (2.18) и отделив мнимую (относительно i) часть, найдем ряд, в который должна разлагаться функция тока ψ в окрестности полюса $m = 0$.

Сравнив граничные значения с заданными (3.2), придем к четырем системам бесконечных уравнений, из которых можно найти четыре серии неизвестных A_n, B_n, C_n и D_n .

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-1} (n-1)! C_n + \sum_k \frac{(2k-1)! q^{2k} c_k}{n! 2^{2k-1}} C_{2k-n} + \sum_k \frac{(2k)! q^{2k+1} s_k}{n! 2^{2k}} B_{2k-n+1} = \delta_n \\ & -(-1)^{n-1} (n-1)! A_n + \sum_k \frac{(2k-1)! q^{2k} c_k}{n! 2^{2k-1}} A_{2k-n} - \sum_k \frac{(2k)! q^{2k+1} s_k}{n! 2^{2k}} D_{2k-n+1} = \gamma_n \\ & (-1)^{n-1} (n-1)! D_n + \sum_k \frac{(2k-1)! q^{2k} c_k}{n! 2^{2k-1}} D_{2k-n} - \sum_k \frac{(2k)! q^{2k+1} s_k}{n! 2^{2k}} A_{2k-n+1} = 0 \\ & -(-1)^{n-1} (n-1)! B_n + \sum_k \frac{(2k-1)! q^{2k} c_k}{n! 2^{2k-1}} B_{2k-n} + \sum_k \frac{(2k)! q^{2k+1} s_k}{n! 2^{2k}} C_{2k-n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Не исследуя вопрос о сходимости процесса последовательных приближений в общем, отметим, что если $B_n = D_n = 0$, то системы принадлежат к классу вполне регулярных систем.

Заметим, что системы распадаются на две группы в каждой по две серии неизвестных, причем неизвестные с четным индексом связаны с неизвестными другой серии с нечетным индексом.

Практически последовательные приближения сходятся очень быстро. Вычисления сильно сокращаются диагональной симметрией коэффициентов.

Распределение скоростей на окружностях в решетке находится через функцию ψ

$$v_s = -\partial\psi/\partial r \quad \text{при } r = 1 \quad (3.5)$$

Здесь v_s — окружная составляющая абсолютной скорости жидкости.

Воспользовавшись (3.5), (2.18) и (3.4) после преобразований, которые здесь опускаем, получим окончательно

$$\begin{aligned} v_s = \cos(\omega\tau - m\alpha) & \sum_{n=1}^{\infty} \{ [2(-1)^{n-1} n! C_n - n\delta_n] \cos n\theta - \\ & - [2(-1)^{n-1} n! A_n + n\gamma_n] \sin n\theta \} - \\ & - 2 \sin(\omega\tau - m\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n! [D_n \cos n\theta - B_n \sin n\theta] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Формула (3.6) дает решение задачи, так как она описывает распределение скоростей на любой окружности в решетке (здесь m — номер окружности) и в любой момент времени.

Радиальные скорости v_r на окружности известны по условию задачи.

Так как на окружности $v_s = (\partial\varphi / r\partial\theta)_{r=1}$, из (3.6) получим

$$\begin{aligned} \varphi = \cos(\omega\tau - m\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \{ [2(-1)^{n-1}(n-1)! C_n - \delta_n] \sin n\theta + \\ + [2(-1)^{n-1}(n-1)! A_n + \gamma_n] \cos n\theta \} - \\ - 2 \sin(\omega\tau - m\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n-1)! [D_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Распределение давлений находится по уравнению Лагранжа (1.5) по известному распределению потенциалов (3.7) и квадрату полной скорости, равному $w^2 = u^2 + v^2 = v_s^2 + v_r^2$.

Поле скоростей вне решетки может быть определено по (2.7), либо при помощи (2.13).

Пример. Найдем распределение скорости для возмущенного движения жидкости, вызванного вибрацией кругов в решетке в направлении ее оси со скоростью $V = V_0 \exp j\omega\tau$, $V_0 = 1$.

Задан параметр $q = 2/t = 0.7$. Проведем вычисления для сдвига фаз $\alpha = 0, \pi, \pi/4$. Из (1.4) и (3.2) следует $\delta_n = \gamma_n = 0$, кроме $\delta_1 = -1$.

а) Для $\alpha = 0$ по (2.16) найдем

$$c_1 = 1.645, \quad c_2 = -1.082, \quad c_3 = 1.017, \quad c_4 = -1.004 \dots, \quad s_n = 0.$$

Из (3.4) очевидно, $A_n = B_n = D_n = 0$ и $C_{2n} = 0$, что согласуется с соображениями симметрии обтекания. Коэффициенты C_{2n-1} находятся из решения первой системы (3.4)

$$C_1 = -0.714, \quad C_3 = -0.0117 \dots$$

Распределение абсолютной скорости v_s на окружностях определяется из (3.6)

$$v_s = -(0.428 \cos \theta + 0.129 \cos 3\theta + \dots) \cos \omega\tau$$

б) Для $\alpha = \pi$ по (2.16) найдем

$$c_1 = -0.824, \quad c_2 = 0.946, \quad c_3 = -0.985, \quad c_4 = 0.998, \dots, \quad s_n = 0$$

Из (3.4) очевидно $A_n = B_n = D_n = 0$ и $C_{2n} = 0$. Коэффициенты C_{2n-1} находятся из решения первой системы (3.4).

$$C_1 = -1.25, \quad C_3 = 0.0192 \dots$$

Абсолютная скорость v_s на окружностях из (3.6)

$$v_s = (-1.52 \cos \theta + 0.230 \cos 3\theta - \dots) \cos(\omega\tau - m\pi)$$

в) Для $\alpha = \pi/4$ по (2.16)

$$\begin{aligned} c_1 = 0.575, \quad c_2 = -0.694, \quad c_3 = 0.706, \quad c_4 = -0.707 \dots \\ s_1 = -0.845, \quad s_2 = 0.740, \quad s_3 = -0.715, \quad s_4 = 0.709 \dots \end{aligned}$$

Из (3.4) следует

$$A_n = D_n = 0, \quad B_{2n-1} = C_{2n} = 0$$

Коэффициенты C_{2n-1}, B_{2n} находятся из решения первой и четвертой систем уравнений (3.4)

$$C_1 = -0.895, \quad C_3 = -0.00795 \dots, \quad B_2 = -0.0675, \quad B_4 = 0.00337 \dots$$

Распределение абсолютной скорости v_s на окружностях определяется по (3.6)

$$\begin{aligned} v_s = -(0.790 \cos \theta + 0.095 \cos 3\theta + \dots) \cos(\omega\tau - 1/4)m\pi + \\ + (0.270 \sin 2\theta - 0.162 \sin 4\theta + \dots) \sin(\omega\tau - 1/4)m\pi \end{aligned}$$

Очевидно, что при таком обтекании имеется восемь групп окружностей, на которых распределение скоростей в любой момент времени будет различным. На фиг. 2 представлены кривые для четырех характерных значений $\beta = \omega t - 1/4 m\pi$.

§ 4. Чисто циркуляционное обтекание решетки кругов со сдвигом фаз. Рассмотрим чисто циркуляционное установившееся обтекание неподвижной решетки кругов при условии, что циркуляция вокруг m -ого круга равна $\Gamma_m = \Gamma_0 e^{jm\alpha}$.

На основании анализа, приведенного в § 1 и 2, очевидно, что комплексный потенциал скорости для данного обтекания может быть представлен так:

$$f = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \int \Phi(z, \alpha, q) dz + \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} N_{n+1} \frac{d^n \Phi(z, \alpha, q)}{dz^n} \quad (4.1)$$

Разложение первого члена (4.1) в окрестности полюса $m = 0$ получим, интегрируя (2.15)

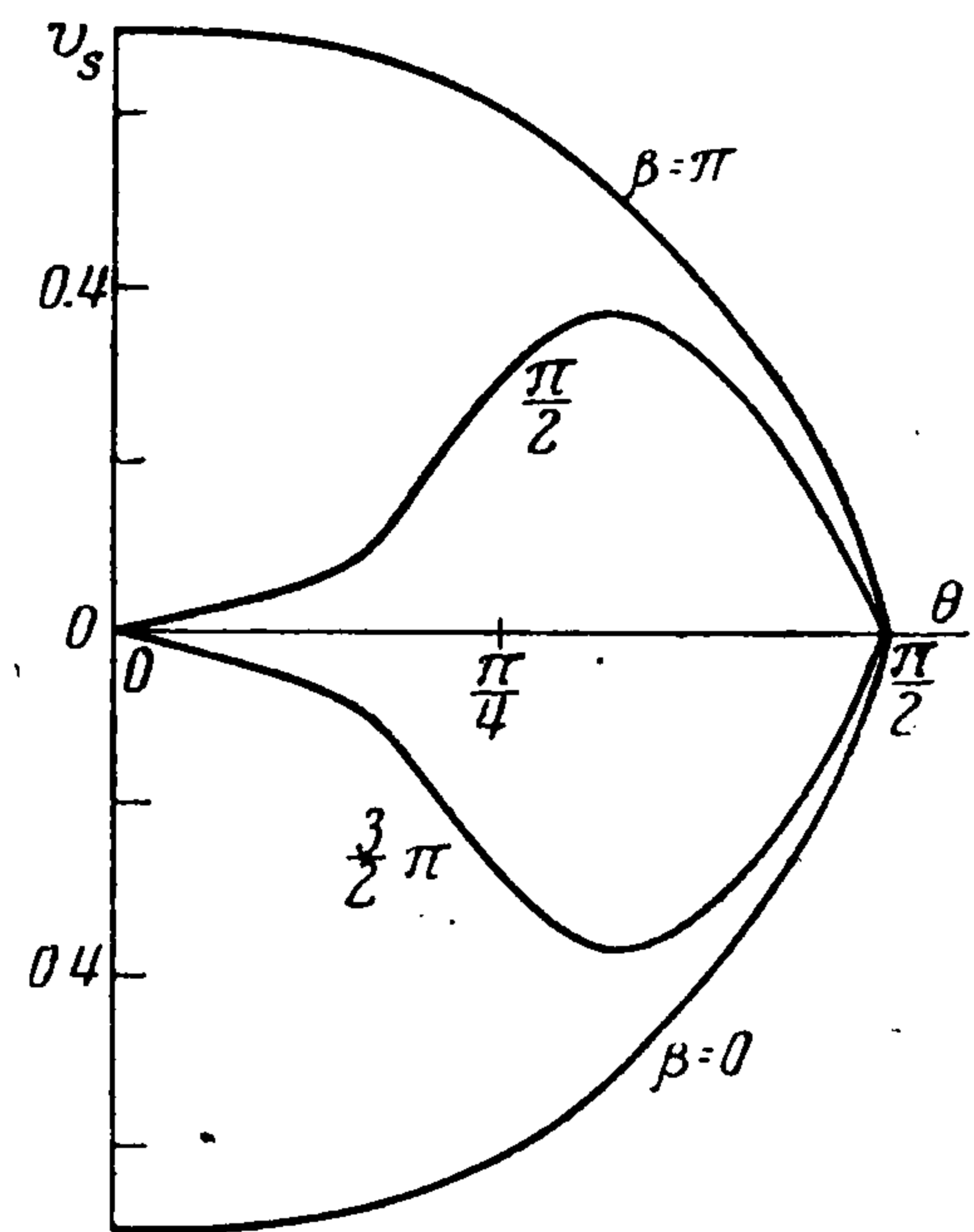
$$\int \Phi(z) dz = \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n q^{2n}}{2^{2n} n!} z^{2n} - ij \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n q^{2n+1}}{2^{2n} (2n+1)} z^{2n+1} \quad (4.2)$$

В рассматриваемом обтекании окружности решетки являются линиями тока и, следовательно, функция тока ψ на них принимает постоянные значения.

Коэффициенты N_n в (4.1) будут двойными комплексными числами вида (3.3). Ввиду симметрии обтекания $A_n = D_n = 0$ и $B_{2n} = D_{2n-1} = 0$. Подставим (2.18) и (4.2) в (4.1) и, отделив мнимую (относительно i) часть, приравняем ее нулю. Получим две системы бесконечных уравнений, из которых определяются две серии неизвестных C_{2n} и B_{2n-1}

$$-(n-1)! C_n + \sum_k \frac{(2k-1)! c_k q^{2k}}{2^{2k-1} n!} C_{2k-n} + \sum_k \frac{(2k)! s_k q^{2k+1}}{2^{2k} n!} B_{2k-n+1} = \frac{q^n c_{n/2}}{2^{n-1} n} \quad (4.3)$$

$$-(n-1)! B_n + \sum_k \frac{(2k-1)! c_k q^{2k}}{2^{2k-1} n!} B_{2k-n} + \sum_k \frac{(2k)! s_k q^{2k+1}}{2^{2k} n!} C_{2k-n+1} = \frac{q^n c_{(n-1)/2}}{2^{2n-1} n}$$



Фиг. 2

На основании (4.1), (2.18), (4.2), (3.3) и (4.3) находим ряд, в который должен раскладываться комплексный потенциал чисто циркуляционного потока в окрестности полюса $m = 0$

$$f = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} [\ln z + i \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} (n-1)! C_n (z^n - z^{-n}) + j \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (n-1)! B_n (z^n + z^{-n})] \quad (4.4)$$

Умножив это выражение на $e^{j\alpha}$, получим разложение в окрестности полюса m и, отделив действительную (относительно обеих мнимых

единиц) часть, найдем распределение потенциала скорости на окружностях ($r = 1$)

$$\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi} [\theta - 2 \cos m\alpha \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} (n-1)! C_n \sin n\theta - 2 \sin m\alpha \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (n-1)! B_n \cos n\theta] \quad (4.5)$$

Распределение скоростей получим дифференцированием φ по θ

$$v_s = \frac{\Gamma_0}{2\pi} [\cos m\alpha - 2 \cos m\alpha \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} n! C_n \cos n\theta + 2 \sin m\alpha \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} n! B_n \sin n\theta] \quad (4.6)$$

При рассмотрении квазистационарной задачи (и использовании канонической области) надо заменить $\sin m\alpha$ и $\cos m\alpha$ на $\sin(\omega t - m\alpha)$ и $\cos(\omega t - m\alpha)$.

Отметим, что, как следует из (2.13), в общем случае скорость в бесконечной дали от решетки стремится к нулю. Только при $\alpha = 0$ скорость в бесконечности $x \rightarrow \pm \infty$ имеет равные по модулю, но обратные по знаку значения.

Пример. Найдем распределение скоростей на окружностях в решетке кругов, если циркуляция меняется от окружности к окружности со сдвигом фаз равным: $\alpha = 0, \pi$ и $\pi/4$. Параметр $q = 2/t = 0.7$, $\Gamma_0/2\pi = 1$.

а) для $\alpha = 0$ получим $s_n = 0$ и $B_n = 0$. Из (4.3)

находим

$$C_2 = 0.184, \quad C_4 = 0.00012 \dots$$

Тогда из (4.6)

$$v_s = 1 + 0.736 \cos 2\theta - 0.0057 \cos 4\theta + \dots$$

б) Для $\alpha = \pi$ получим $s_n = 0$ и $B_n = 0$. Из (4.3)

находим

$$C_2 = 0.110, \quad C_4 = 0.000945 \dots$$

Тогда из (4.6)

$$v_s = (1 - 0.441 \cos 2\theta + 0.046 \cos 4\theta - \dots) \cos m\pi$$

в) Для $\alpha = \pi/4$ получим

$$C_2 = -0.0060, \quad C_4 = 0.00073 \dots$$

$$B_1 = 0.00753, \quad B_3 = 0.0175 \dots$$

(коэффициент B_3 должен быть больше остальных коэффициентов B_n)

$$v_s = (1 + 0.240 \cos 2\theta - 0.035 \cos 4\theta + \dots) \cos^{1/4} m\pi + (-0.015 \sin \theta - 0.210 \sin 3\theta - \dots) \sin^{1/4} m\pi$$

На фиг. 3 даны графики распределения скорости по окружностям $m = 0$ и $m = 2$. Окружность $m = 2$ обтекается с циркуляцией, равной нулю. Всего имеется восемь групп окружностей с различным распределением скоростей.

§ 5. Обтекание решетки произвольных профилей, колеблющихся со сдвигом фаз. Рассмотрим задачу о колебании профилей в решетке со сдвигом фаз. Форму профилей предполагаем произвольной. Если профили колеблются с изменением циркуляции, то задача решается в квазистационарной постановке.

Потенциал скорости $\varphi(x, y, \tau)$ и функция тока $\psi(x, y, \tau)$ удовлетворяют уравнению Лапласа, поэтому воспользуемся методом конформного преобразования.

Выберем в качестве канонической области область вне решетки кругов плоскости z .

Связь между решетчатыми областями устанавливается функциональным рядом [4].

$$\zeta = az + \frac{\pi}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_{-(n+1)} \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{t} \quad (5.1)$$

Этот ряд является частным случаем функционального ряда (2.13). В окрестности полюсов (5.1) раскладывается в ряд

$$\zeta = az + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (5.2)$$

Коэффициенты правильной части ряда зависят от коэффициентов главной части

$$a_n = \sum_k^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2k} B_k}{2k(2k-n-1)! n!} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{2k} a_{-(2k-n)} \quad (5.3)$$

Положив $a = a' + ia''$, $a_n = a_n' + ia_n''$, $a_{-n} = a_{-n}' + ia_{-n}''$, можно задать контур профиля в решетке двумя параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} \xi &= a' \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{-n}' + a_n') \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{-n}'' - a_n'') \sin n\theta \\ \eta &= a'' \sin \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{-n}'' + a_n'') \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' - a_{-n}') \sin n\theta \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь θ — полярный угол основного круга в решетке.

Метод определения коэффициентов a_n и a_{-n} изложен в [4] и поэтому будем считать ряд (5.4) заданным.

Пусть лопатки в решетке совершают произвольные, но малые по амплитуде, изгибные и крутильные колебания с произвольным постоянным сдвигом фаз α .

Граничные значения функции тока $\psi(\xi, \eta)$ на профилях в решетке определяются (1.4). При подстановке туда параметрических уравнений (5.4) получаем граничные значения $\psi(\theta)$ на окружностях в канонической области в форме тригонометрического ряда (3.2). Соответствующая задача в канонической области решена. Распределение скоростей от безциркуляционного (3.6) и чисто циркуляционного (4.6) потоков на основной окружности известно. Величина циркуляции вокруг основной окружности Γ_0 устанавливается из постулата Чаплыгина — Жуковского в квазистационарной постановке.

Изложенное без труда распространяется на решетку, профили которой не только колеблются, но и подвержены малым деформациям. Граничное значение для функции ψ от деформационного движения с нормальной скоростью v_n устанавливается через соотношение $\partial\psi/\partial s = v_n(\theta, \tau)$.

Выше рассматривались задачи, когда сдвиг фазы менялся от лопатки к лопатке на постоянную величину. Все результаты могут быть обобщены, что приведет только к увеличению вычислительной работы.

Вместо основной функции $\Phi(z, \alpha, q)$ можно рассматривать серию функций $\Phi(z, \alpha_r, q)$, в каждой из которых $\alpha_r = \text{const}$. Тогда в разложениях (2.17) и (4.2) добавится впереди знак суммирования по r , а числа s и s будут суммироваться по двум индексам k и r .

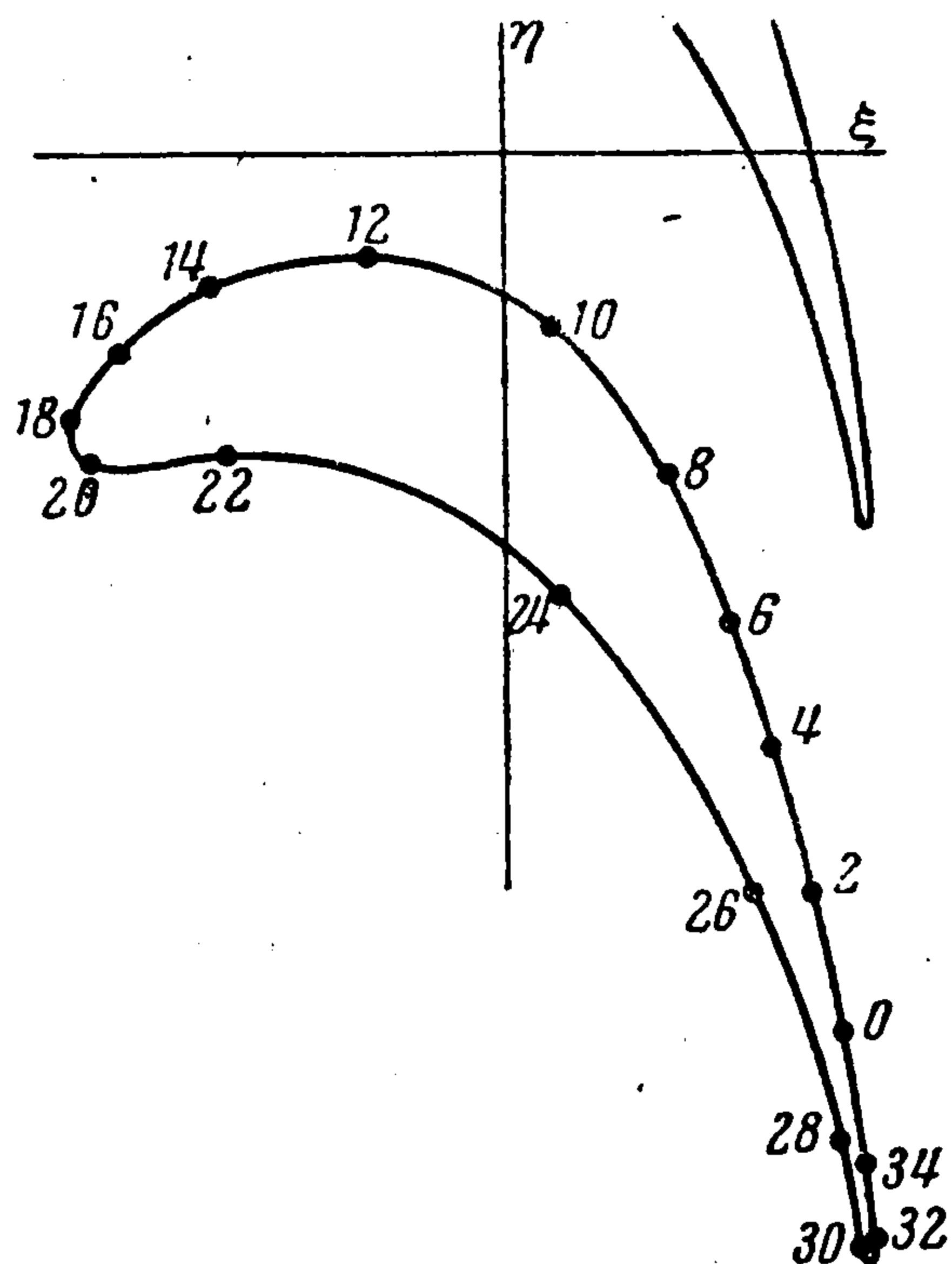
Пример. Найдем распределение скоростей на профилях в решетке (фиг. 4), которые колеблются со сдвигом фаз $\alpha = \pi$ в направлении, перпендикулярном к хорде.

Опустим предварительные расчеты, которые выполняются так, как описано выше.

Пусть составляющие скоростей колебания по осям координат $U_0 = V_0 = 1$.

Выпишем коэффициенты ряда (3.2), представляющего граничные значения $\psi'_k(\theta)$ на окружности в решетке

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -1.020, & \delta_2 &= +0.161, & \delta_3 &= +0.0717 \\ \delta_4 &= -0.0574, & \delta_5 &= +0.0119 \\ \gamma_1 &= +0.505, & \gamma_2 &= +0.129, & \gamma_3 &= -0.0542 \\ \gamma_4 &= +0.0188, & \gamma_5 &= +0.0093 \end{aligned}$$



Фиг. 4

Колебания происходят со сдвигом фаз $\alpha = \pi$, поэтому из (2.16) следует, что $s_k = 0$, тогда из (3.4) получим, что $B_n = D_n = 0$.

Подставив δ_n и γ_n в (3.4) и решив полученные уравнения ($q = 0.853$), найдем C_n и A_n (удерживаем члены с индексом не выше 5).

$$\begin{aligned} C_1 &= -1.535, & C_2 &= -0.209, & C_3 &= +0.0950, & C_4 &= +0.0120, & C_5 &= +0.000358, \\ A_1 &= -0.385, & A_2 &= +0.110, & A_3 &= +0.0134, & A_4 &= +0.00411, & A_5 &= -0.000275 \end{aligned}$$

Далее решаем первую систему уравнений (4.3) и находим

$$C_2^\circ = +0.188 \frac{\Gamma_0}{2\pi}, \quad C_4^\circ = -0.00479 \frac{\Gamma_0}{2\pi} \dots$$

где верхним индексом отмечено, что эти коэффициенты отнесены к чисто циркуляционному обтеканию.

По подсчитанным коэффициентам находим распределение скоростей по окружности при помощи (3.6) и (4.6).

Применив условие Чаплыгина — Жуковского, находим циркуляцию $\Gamma_0 / 2\pi = +2.41$. Тогда окончательное выражение закона распределения абсолютных скоростей v_s по окружности дается рядом

$$v_s(\theta) = \sum_n C_n^* \cos n\theta + \sum_n A_n^* \sin n\theta + 2.41$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_1^* &= -2.050, & C_2^* &= -1.300, & C_3^* &= +0.925, & C_4^* &= +0.210, \\ A_1^* &= +0.265, & A_2^* &= 0.172, & A_3^* &= 0, & A_4^* &= +0.160 \end{aligned}$$

На фиг. 5 показано распределение абсолютных скоростей на профиле v_s по отношению к максимальной скорости колебания профиля

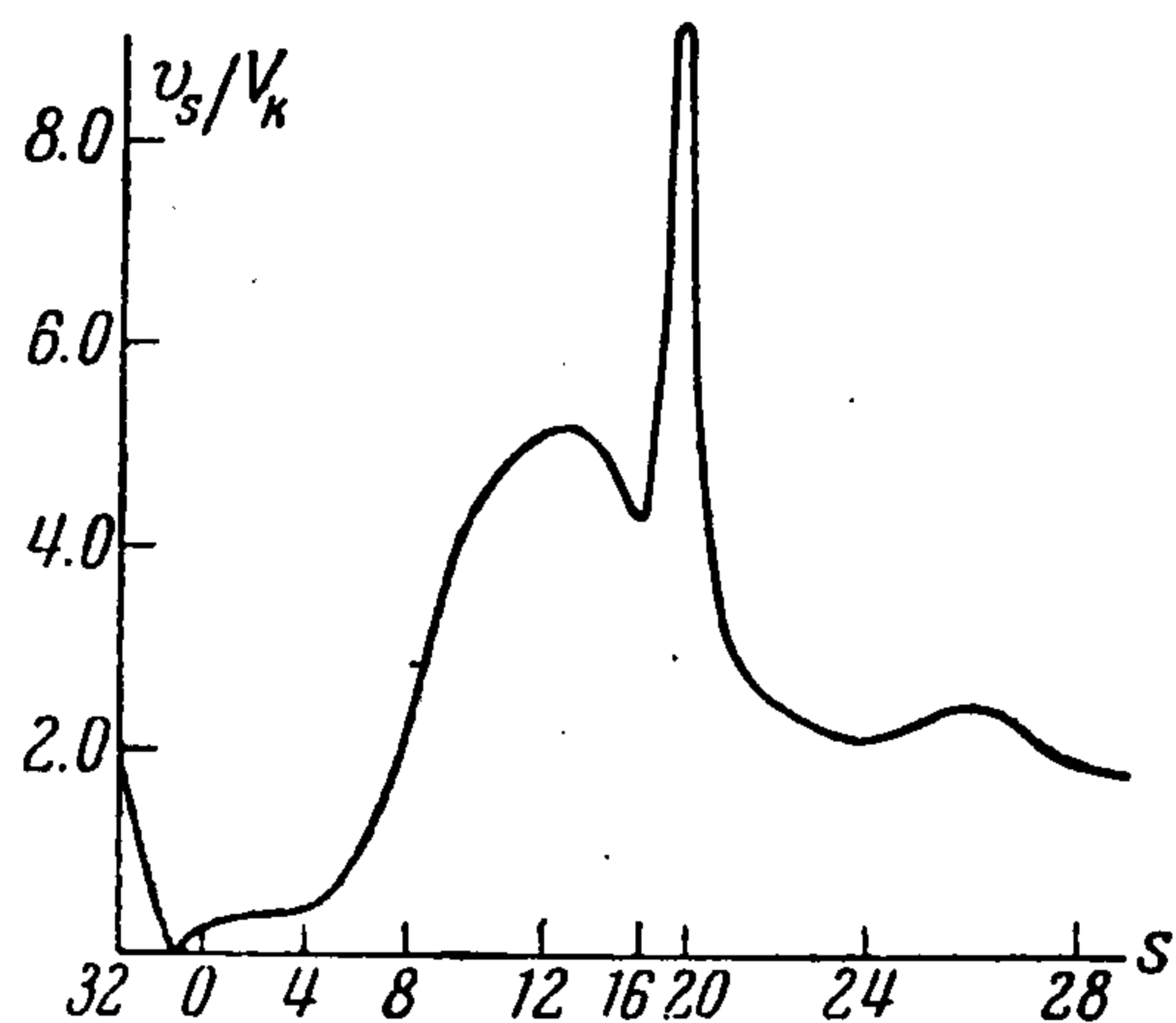
$$V_k = \sqrt{U_0^2 + V_0^2}$$

По оси абсцисс произведена развертка профиля. Номера точек на оси абсцисс соответствуют номерам точек на профиле (фиг. 4). Значительный пик скоростей возникает при обтекании входной кромки. Между точками 0 и 34 происходит ветвление потока.

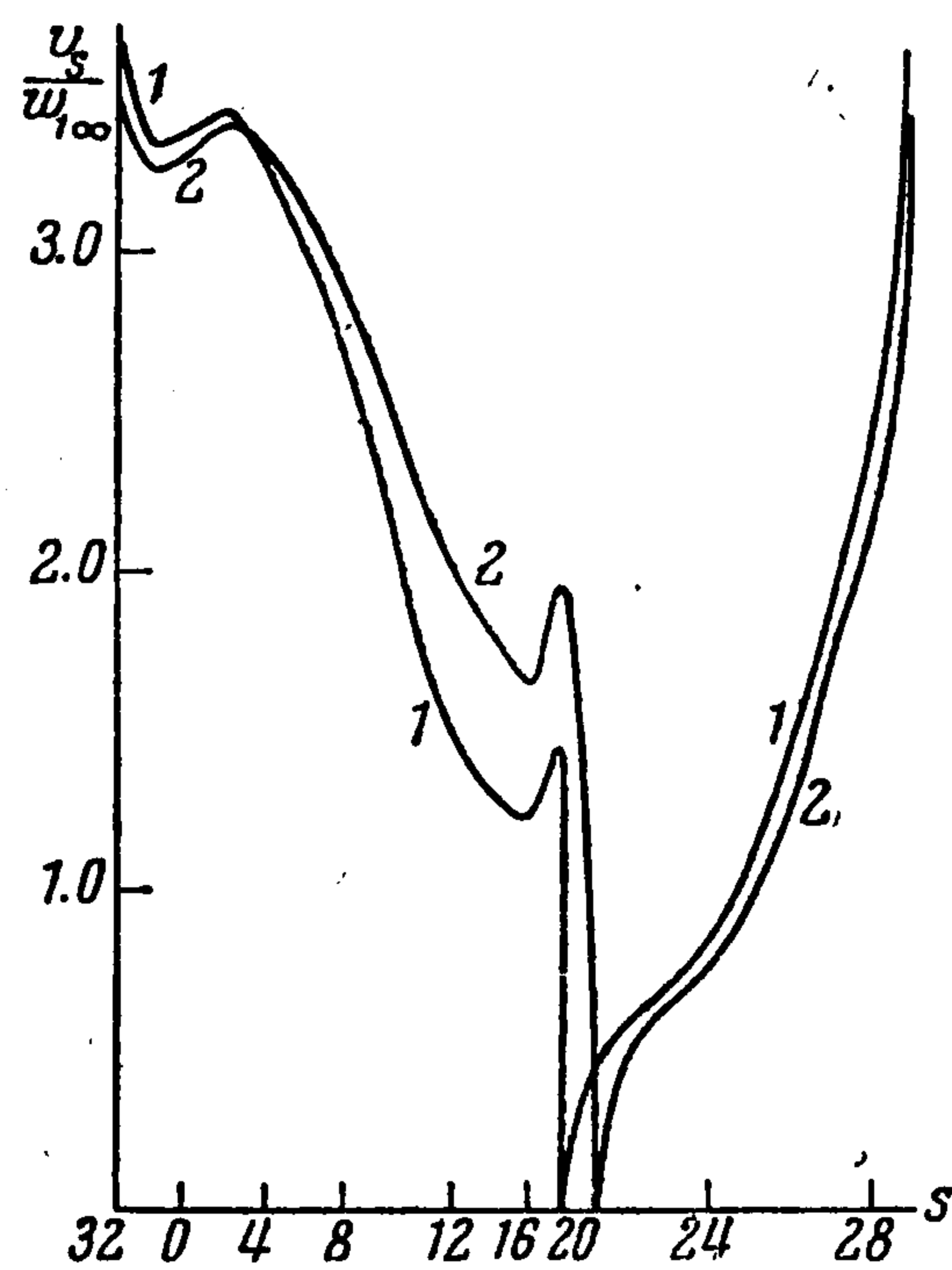
Этот график является вспомогательным.

Фиг. 6 дает представление о том, как вибрация профиля влияет на режим его нормального обтекания. Решение получено сложением рассчитанного выше возмущенного потока, вызванного вибрацией профилей в противофазе, и установившегося потока (расчет опущен), обтекающего решетку. При построении кривых распределения скорости $v_s/w_{1\infty}$ принято, что максимальная скорость вибрации составляет 0.05 скорости набегающего на решетку потока.

При столь малых числах Струхаля, типичных для подобных практических задач, применение квазистационарной теории приведет к весьма незначительной ошибке.



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 6 кривая 1 соответствует моменту времени, когда профиль при колебании движется вперед выпуклой частью, а кривая 2 — вогнутой. Особенно сильное изменение скорости наблюдается у входной кромки. Передняя критическая точка перемещается по профилю, а задняя по условию неподвижна.

Поступила 20 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Полн. собр. соч., т. III, Изд-во АН СССР, 1935.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехтеориздат, 1950.
3. Поляков Н. Н. Теория нестационарных движений несущей поверхности. Изд-во ЛГУ, 1960.
4. Самойлович Г. С. Расчет гидродинамических решеток. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 2.