

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ И СОПЕЛ

Ю. Д. Шмыглевский

(Москва)

Вариационным задачам газовой динамики осесимметричных безвихревых течений к настоящему времени посвящено большое количество работ. Идея рассмотрения контрольного контура, существенно облегчающая решение задач, была предложена А. А. Никольским в 1950 г. [1]. Метод решения вырожденных вариационных задач был разработан в 1946 г. Д. Е. Охоцимским [2]. Гудерлей и Хантш в 1955 г. [3] поставили задачу об оптимальном сверхзвуковом сопле и свели ее к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1957 г. автором предлагаемой статьи было опубликовано [4] решение ряда вариационных задач газовой динамики совершенного газа. Результаты последней работы, касающиеся осесимметричных сопел, были повторены для случая несовершенного газа Рао в 1958 г. [5]. Метод Рао отличается от метода работ [3,4], и его обоснование в 1959 г. было дано Гудерлеем [6]. Перечисленные работы касались необходимых условий экстремума, в работе [4] указывался путь проверки выполнения достаточных условий. Фанселау в своей заметке [7] обратился к исследованию достаточных условий экстремума, однако конструктивных результатов не получил. Наконец, Л. Е. Стернин в 1961 г. [8] вывел уравнение геометрического места точек экстремальных характеристик, в которых ускорения становятся бесконечными, и тем самым определил область применимости ранее развитой теории решений с непрерывными функциями. Здесь излагаются дальнейшие исследования вариационных задач для осесимметричных сверхзвуковых течений. Определяются достаточные условия достижения минимума волнового сопротивления тел вращения, строятся разрывные решения для областей, в которых минимум не достигается на непрерывных функциях, и выделяется область изэнтропических течений.

Автор глубоко благодарен О. С. Рыжову за ценное обсуждение работы, а также А. Н. Беловой, выполнившей все вычисления, и Л. В. Папандиной за проведение графических работ.

1. Вариационная задача. Осесимметричные течения совершенного газа подчиняются уравнениям

$$\frac{\partial r \rho w \cos \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial r \rho w \sin \vartheta}{\partial r} = 0$$

$$w \cos \vartheta \frac{\partial w \cos \vartheta}{\partial x} + w \sin \vartheta \frac{\partial w \cos \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{w^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$$

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \begin{cases} \text{const} & \text{— в безвихревом случае} \\ \varphi^\circ(\psi) & \text{— в вихревом случае} \end{cases}$$

Здесь через x, r обозначены декартовы координаты в меридиональной плоскости течения; w — скорость, отнесенная к критической скорости звука a_* ; ϑ — угол наклона скорости к оси потока x ; ρ — плотность газа, отнесенная к плотности адиабатически заторможенного потока ρ_0 ; p — давление, отнесенное к произведению $\rho_0 a_*^2$; κ — показатель адиабаты; ψ — функция тока ($d\psi = r\rho w (\cos \vartheta dr - \sin \vartheta dx)$).

На характеристиках системы (1.1) выполняются равенства:
первое семейство

$$dr = \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha) dx \quad (1.2)$$

$$d\vartheta + \frac{1 + \cos 2\alpha}{\kappa - \cos 2\alpha} d\alpha + \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{\sin(\vartheta + \alpha)} \frac{dr}{r} - \frac{\sin 2\alpha}{2\kappa(\kappa - 1)} d \ln \varphi^\circ = 0$$

второе семейство

$$dr = \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha) dx \quad (1.3)$$

$$d\vartheta - \frac{1 + \cos 2\alpha}{\kappa - \cos 2\alpha} d\alpha - \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)} \frac{dr}{r} + \frac{\sin 2\alpha}{2\kappa(\kappa - 1)} d \ln \varphi^\circ = 0$$

где α — угол Маха, связанный с w равенством $w^2(\kappa - \cos 2\alpha) = \kappa + 1$.

Пусть в плоскости xr заданы точки a и b и характеристика первого семейства ae , причем энтропийная функция φ° на ae постоянна (фиг. 1). Необходимо построить образующую ab , обеспечивающую минимальное волновое сопротивление. Задача решается определением соответствующей характеристики второго семейства bc , проходящей через точку b .

Введем следующие обозначения: P, A, Θ — соответственно r, α, ϑ на характеристике ae

$$\sigma(\alpha) = \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - \cos 2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau(\alpha) = \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{\kappa - \cos 2\alpha} \right)^{\frac{1}{2} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}}$$

$$F_1 = \int_{P=P_a}^{r_c} \sigma(A) \tau(A) \left[\frac{\sin A}{\kappa} + \frac{\cos \Theta}{\sin(\Theta + A)} \right] P dP$$

$$F_2 = \int_{P=P_a}^{r_c} \operatorname{ctg}(\Theta + A) dP, \quad F_3 = \int_{P=P_a}^{r_c} \frac{\tau(A) P dP}{\sin(\Theta + A)}$$

$$\Phi_1 = \sigma(\alpha) \tau(\alpha) \left[\frac{\sin \alpha}{\kappa} - \frac{\cos \vartheta}{\sin(\vartheta - \alpha)} \right] r \varphi^{-\frac{1}{\kappa - 1}}$$

$$\Phi_2 = \operatorname{ctg}(\vartheta - \alpha), \quad \Phi_3 = \frac{\tau(\alpha) r}{\sin(\vartheta - \alpha)} \varphi^{-\frac{1}{\kappa - 1}}, \quad \varphi = \exp \frac{s(r) - S}{c_v}$$

Здесь $s(r)$ — энтропия газа на bc , S — энтропия на ae , c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме; функция φ представляет собой отношение φ° на bc к постоянной φ° на ae .

Первоначально будем предполагать течение в треугольнике abc безвихревым, т. е. $s(r) \equiv S = \text{const}$ или $\varphi = 1$. В дальнейшем это предположение будет специально рассмотрено.

Для характеристики bc возникает [4] следующая вариационная задача.

При заданных постоянных $r_a, r_b, X = x_b - x_a$ и заданных функциях $A(P), \Theta(P)$ найти функцию $\alpha(r)$, реализующую экстремум функционала

$$\chi = F_1(r_c) - \int_{r=r_b}^{r_c} \Phi_1(r, \alpha, \beta) dr \quad (1.4)$$

при изопериметрических условиях

$$X = F_2(r_c) - \int_{r=r_b}^{r_c} \Phi_2(\alpha, \beta) dr, \quad \Psi \equiv 0 = F_3(r_c) + \int_{r=r_b}^{r_c} \Phi_3(r, \alpha, \beta) dr \quad (1.5)$$

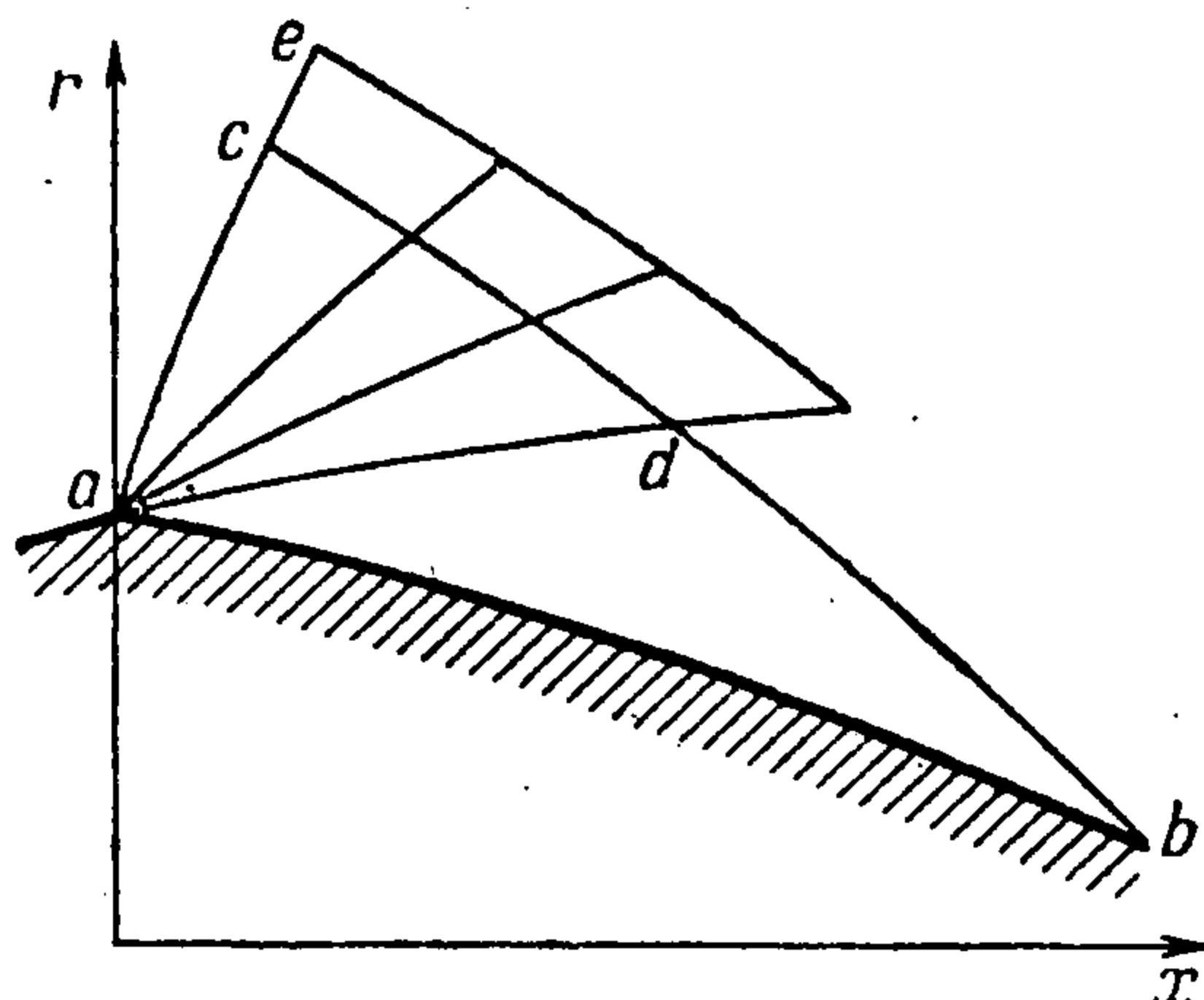
и дифференциальной связи

$$\Phi_4 \equiv \frac{d\beta}{dr} - \frac{\sin[\beta - f(\alpha)] \sin \alpha}{r \sin[\beta - f(\alpha) - \alpha]} = 0 \quad (1.6)$$

Величина χ с точностью до постоянного множителя определяет волновое сопротивление тела вращения, X является длиной проекции образующей ab на ось x , $\Psi = 0$ представляет расход газа через характеристический контур acb . Функция β связана с ϑ и α равенствами

$$\beta = \vartheta + f(\alpha) \quad (1.7)$$

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \arctg \left(\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \operatorname{ctg} \alpha \right) + \alpha$$

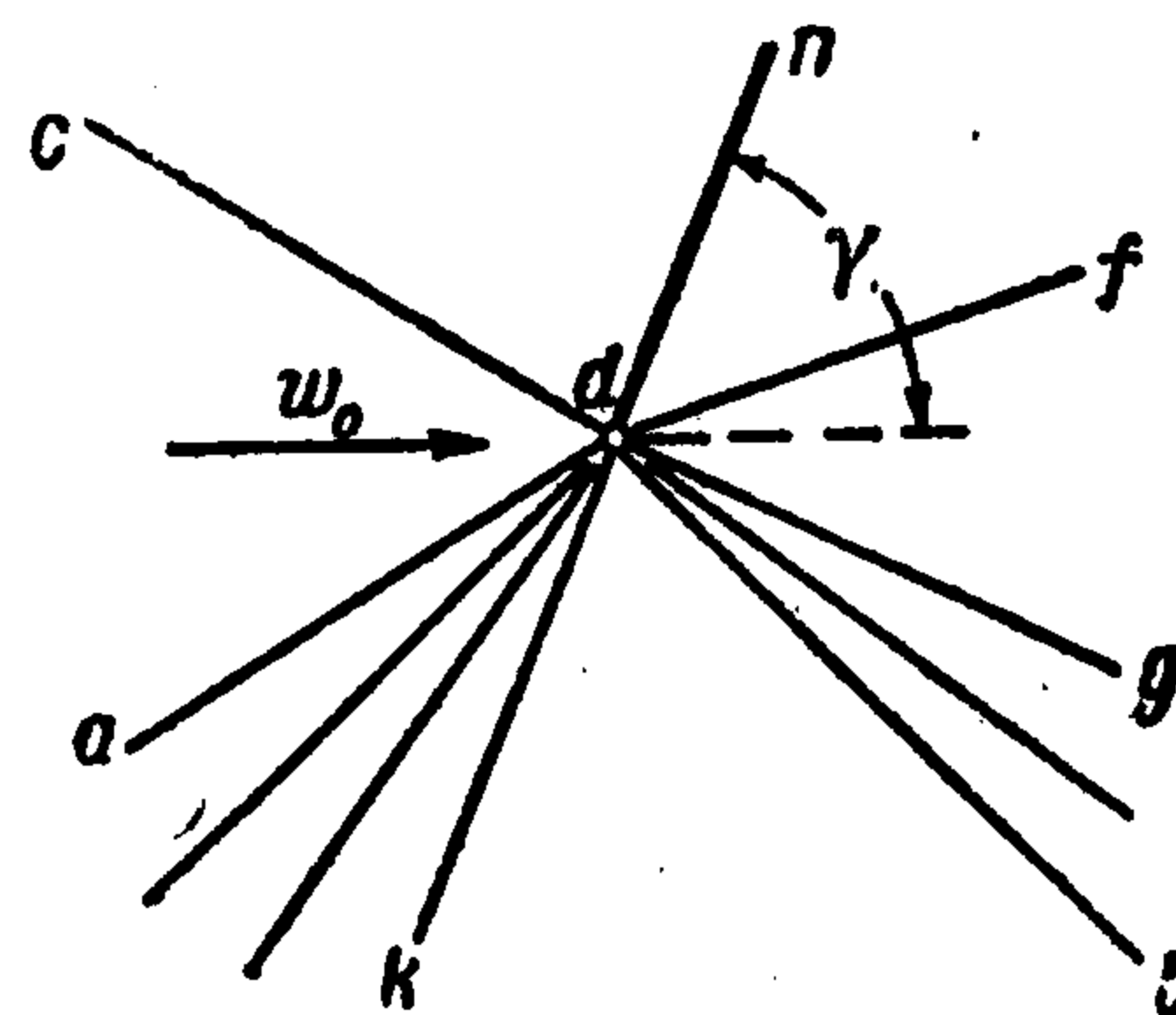


Фиг. 1

Условие (1.6) совпадает со вторым уравнением из (1.3). Здесь и в дальнейшем вычисления будут проводиться в системе переменных r, α, β , но для наглядности формулы будут записываться в переменных r, α, ϑ .

Допустимые функции $\alpha(r)$ должны удовлетворять следующим требованиям, определяемым свойствами решений уравнений (1.1) в задачах обтекания одной поверхности. Функции $\alpha(r)$ кусочно непрерывны. В интервалах, на которых $\alpha(r)$ непрерывна, первая производная от $\alpha(r)$ не должна выходить за пределы, обусловленные изломом обтекаемого контура [9]. Условия в точках разрыва $\alpha(r)$ должны быть рассмотрены специально, причем разрывы на ударных волнах не рассматриваются в силу предположения о постоянстве энтропии.

2. Изэнтропические разрывы. Разрыв функций на характеристике второго семейства при сохранении энтропии возможен в случае фокусировки характеристик первого семейства в точке d , принадлежащей рассматриваемой характеристике (фиг. 2). Для получения соотношений в точке d достаточно рассмотреть плоское течение с прямолинейными характеристиками. Пусть в точке d фокусируются характеристики пучка adk . Пересечение характеристик вызывает возникновение ударной волны dn . Отражение возмущений реализуется либо в виде пучка характеристик ldg , либо в виде ударной волны. Будем изучать только первый случай. Линия df представляет контактный разрыв.



Фиг. 2

Для величин α, ϑ, p , постоянных в областях nda, kdl, gdf и fdn , будем соответственно использовать индексы 0, 1, 2 и 3.

Решение Прандтля — Майера дает

$$\vartheta_0 + f(\alpha_0) = \vartheta_1 + f(\alpha_1), \quad \vartheta_1 - f(\alpha_1) = \vartheta_2 - f(\alpha_2) \quad (2.1)$$

где функция f определена в (1.7). При этом

$$\alpha_0 \leq \alpha_1, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \quad (2.2)$$

Угол наклона скорости ϑ_3 и давление p_3 , отнесенное к произведению плотности газа в области $n da$ на квадрат критической скорости, определяются соотношениями на ударной волне

$$\vartheta_3 = \vartheta_0 + \gamma - \arctg \frac{\kappa - \cos 2\alpha_0 - (\kappa - 1) \cos^2 \gamma}{(\kappa + 1) \sin \gamma \cos \gamma}$$

$$p_3 = \frac{2 \sin^2 \gamma}{\kappa - \cos 2\alpha_0} - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{\kappa - \cos 2\alpha_0}$$
(2.3)

где γ — угол наклона ударной волны dn к направлению скорости w_0 .

Давление p_2 равно

$$p_2 = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left(\frac{1 - \cos 2\alpha_0}{\kappa - \cos 2\alpha_0} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left(\frac{1 - \cos 2\alpha_2}{\kappa - \cos 2\alpha_2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$
(2.4)

На линии df контактного разрыва выполняются равенства

$$\vartheta_2 = \vartheta_3, \quad p_2 = p_3$$
(2.5)

Таким образом, десять величин — $\alpha_0, \vartheta_0, \alpha_1, \vartheta_1, \alpha_2, \vartheta_2, p_2, \vartheta_3, p_3, \gamma$ — связаны семью равенствами (2.1), (2.3) — (2.5). Задание, например, $\alpha_0, \vartheta_0, \alpha_1$ определяет остальные величины. Параметр ϑ_0 несуществен, так как его изменение осуществляет поворот всего течения.

В соответствии со сказанным в этом разделе будем считать функцию $\alpha(r)$ допустимой, если

$$\alpha_1 \leq \pi / 2$$
(2.6)

и если в точке разрыва d характеристики bc величина α претерпевает скачок от α_0 до некоторого α_1 , определяемого неравенствами

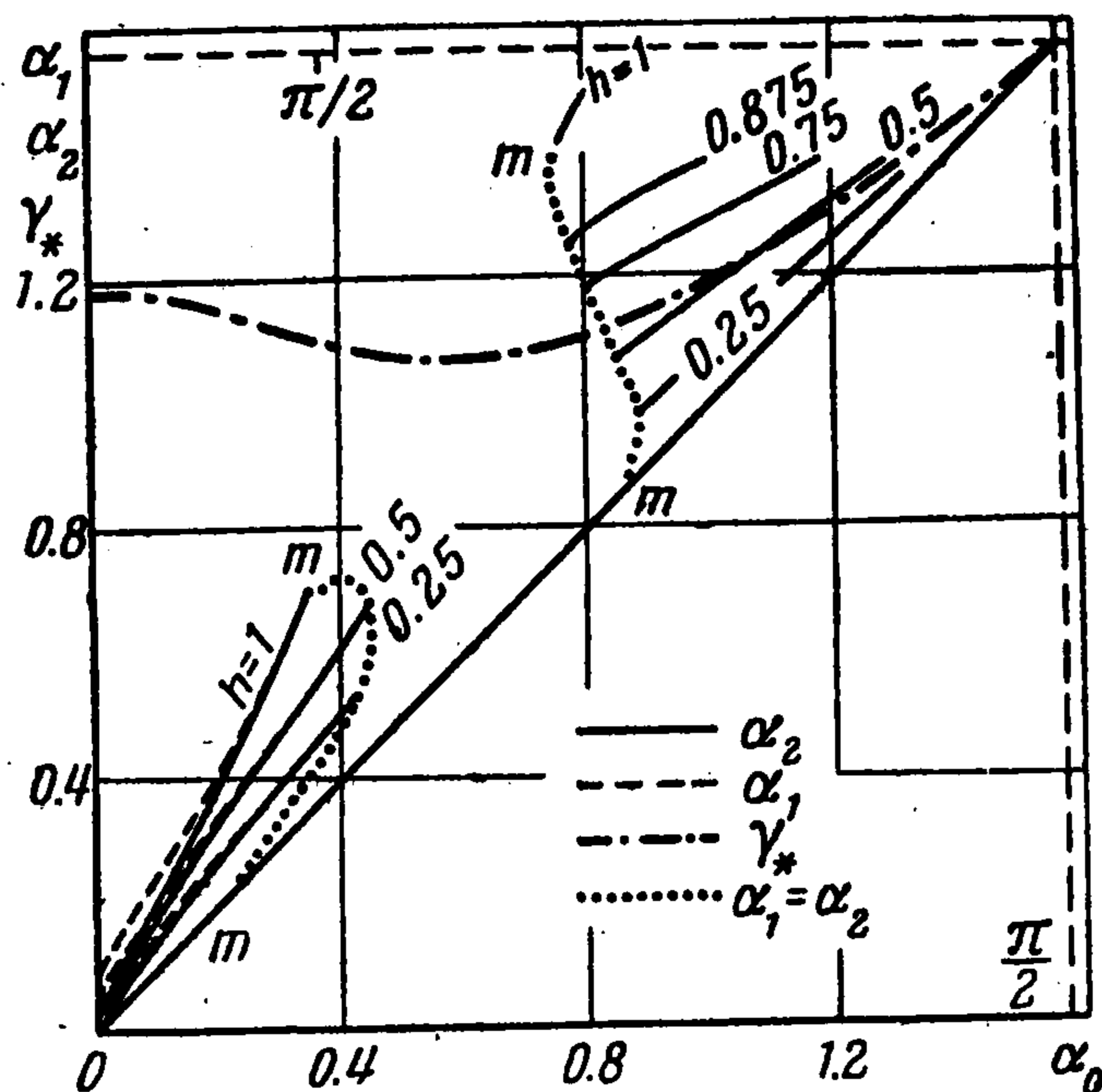
$$\alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1$$
(2.7)

где α_2 связано с $\alpha_0, \vartheta_0, \alpha_1$ равенствами (2.4), (2.3) — (2.5) и неравенствами (2.2).

Результаты расчетов по приведенным соотношениям для $\kappa = 1,4$ показаны на фиг. 3. Пусть при данном α_0 и некотором угле ударной волны $\gamma = \gamma_*(\alpha_0)$ за ударной волной достигается скорость звука. Тогда различным комбинациям α_0 и α_1 будем ставить в соответствие величину параметра h

$$h = \frac{\gamma - \alpha_0}{\gamma_* - \alpha_0}$$

На фиг. 3 изображена зависимость α_2 от величин h и α_0 . Величина α_1 нанесена там, где она заметно больше α_2 . Там же приведена зависимость $\gamma_*(\alpha_0)$. Пунктирные линии mt соответствуют $\alpha_1(\alpha_0, h) = \alpha_2(\alpha_0, h)$ и ограничивают область существования решений рассмотренного вида. Незаполненная кривыми область соответствует возникновению отраженной ударной волны.



Фиг. 3

3. Поле экстремалей. Вариационная задача пункта 1 методом множителей Лангранжа сводится к задаче на безусловный экстремум для функционала

$$I = F(r_c) + \int_{r=r_b}^{r_c} \Phi(r, \alpha, \beta, \beta', \nu) dr \quad (3.1)$$

где

$$F = F_1 + \lambda F_2 - \mu F_3, \quad \Phi = -[\Phi_1 + \lambda \Phi_2 + \mu \Phi_3 + \nu \Phi_4]$$

λ, μ — постоянные, а ν — переменный множитель Лагранжа.

В случае непрерывных функций $\alpha(r)$ эта задача решена в работе [4]. Необходимые для дальнейшего результаты сводятся к следующему.

Если варьирование проводится в соответствии с ограничениями задачи, условия трансверсальности выполнены, а ν выбрано так, что вариация по β равна нулю, то первая вариация

$$\delta \chi = \int_{r=r_b}^{r_c} \Phi_\alpha \delta \alpha dr \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha = & \frac{1}{(\kappa - \cos 2\alpha) \sin^2(\vartheta - \alpha)} \left\{ \sigma(\alpha) \tau(\alpha) \left[\frac{\kappa + 1}{2} \frac{\sin 2\vartheta}{\sin \alpha} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \cos \alpha (1 + \cos 2\alpha) \right] r + \lambda (1 - \kappa + 2 \cos 2\alpha) + \right. \\ & \left. + \mu \tau(\alpha) [(1 - \kappa + 2 \cos 2\alpha) \cos(\vartheta - \alpha) - (\kappa + 1) \operatorname{ctg} \alpha \sin(\vartheta - \alpha)] r - \right. \\ & \left. - \frac{\nu}{2r} [\sin^2 2\alpha - 2(\kappa - \cos 2\alpha) \sin^2 \vartheta] \right\} \quad (3.3) \end{aligned}$$

Величина ν определяется уравнением

$$\Phi_\beta - \frac{d\nu}{dr} = 0 \quad (3.4)$$

где

$$\Phi_\beta = - \frac{1}{\sin^2(\vartheta - \alpha)} \left\{ r \tau(\alpha) [\sigma(\alpha) \cos \alpha - \mu \cos(\vartheta - \alpha)] - \lambda + \frac{\nu}{r} \sin^2 \alpha \right\} \quad (3.5)$$

Далее, искомая характеристика bc состоит из двух участков cd и db (фиг. 1). Участок cd определяется характеристикой ac и изломом образующей ab в точке a . Производная от $\alpha(r)$ вдоль cd принимает предельное значение [9]. На участке db функции удовлетворяют уравнениям Эйлера данной задачи $\Phi_\alpha = 0$ и (3.4) и с учетом условий трансверсальности определяются равенствами

$$\nu \equiv 0, \quad r \tau(\alpha) \sigma(\alpha) \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \alpha} = \lambda, \quad \sigma(\alpha) \frac{\cos(\vartheta + \alpha)}{\cos \alpha} = \mu \quad (3.6)$$

Величины λ и μ находятся из последних равенств при r, α, ϑ , взятых в точке d . Равенства (3.6) могут быть разрешены относительно r и ϑ

$$\begin{aligned} r \frac{\tau(\alpha)}{\sigma(\alpha)} [\sigma^2(\alpha) \cos \alpha - \mu^2 \cos \alpha \cos 2\alpha - \\ - \operatorname{sign}(\vartheta_d + \alpha_d) \mu \sin 2\alpha \sqrt{\sigma^2(\alpha) - \mu^2 \cos^2 \alpha}] = \lambda \quad (3.7) \end{aligned}$$

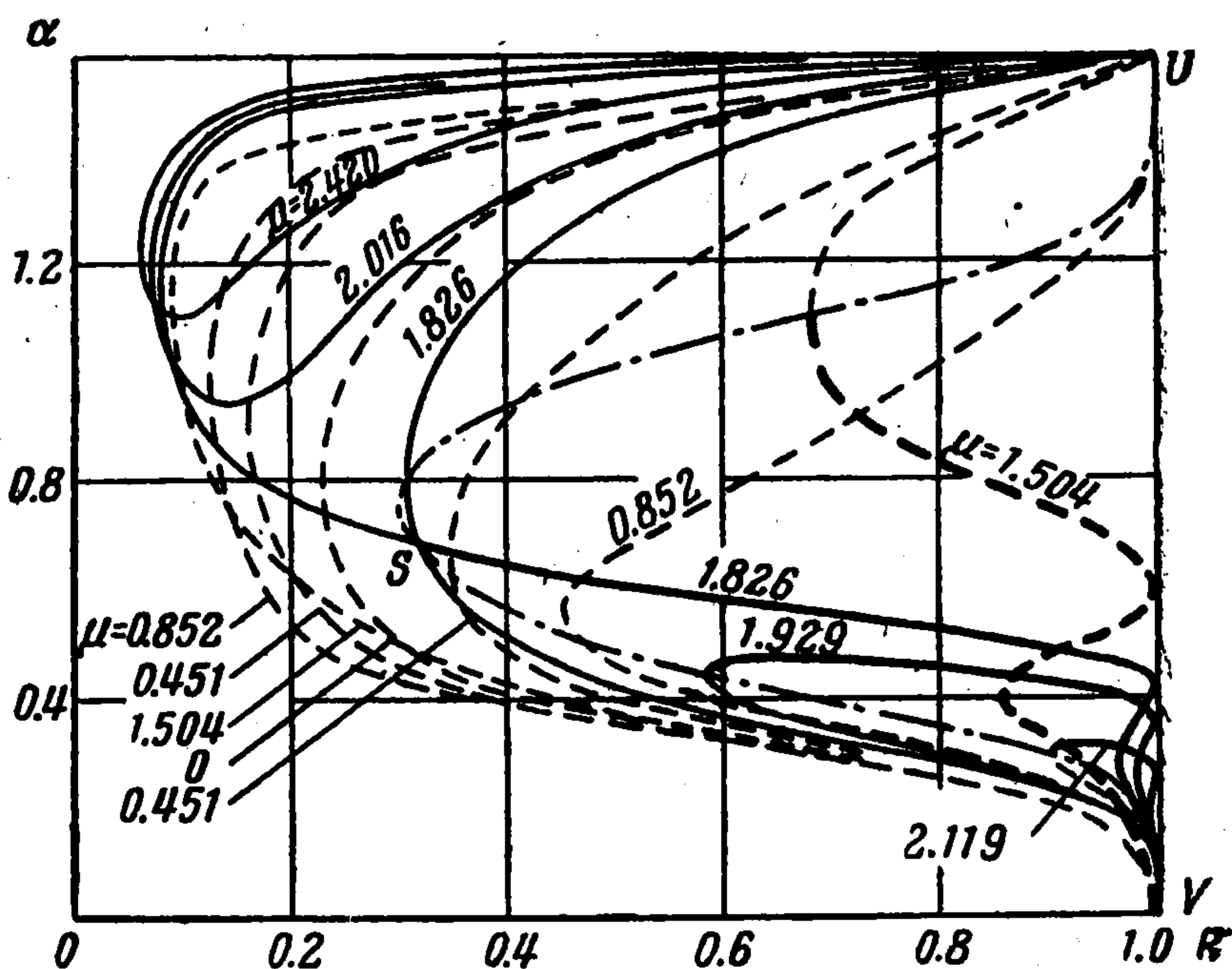
$$\vartheta = \operatorname{sign} \vartheta_d \left| \operatorname{arc} \sin \left[\sqrt{\frac{\lambda \cos \alpha}{r} \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{\kappa - \cos 2\alpha} \right)^{-\frac{1}{4}} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left(\frac{\kappa - \cos 2\alpha}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{4}}} \right] \right| \quad (3.8)$$

Наконец, отметим, что в силу второго равенства (3.6) при $\alpha \neq \pi/2$ величина ϑ не может менять знака, и $\lambda \geq 0$.

Равенство (3.7) позволяет построить зависимость α ($r/\lambda, \mu$). На фиг. 4 приведены кривые α (R) при различных значениях μ в случае $\kappa = 1.4$. Величина R определяется равенством

$$R = \frac{r}{10\lambda + r} \quad (3.9)$$

Равенство (3.8) или третье равенство из (3.6) дает зависимость ϑ (α, μ).



Фиг. 4

Соответствующие кривые при $\kappa = 1.4$ изображены на фиг. 5. Экстремали в плоскости годографа скоростей изображены на фиг. 6.

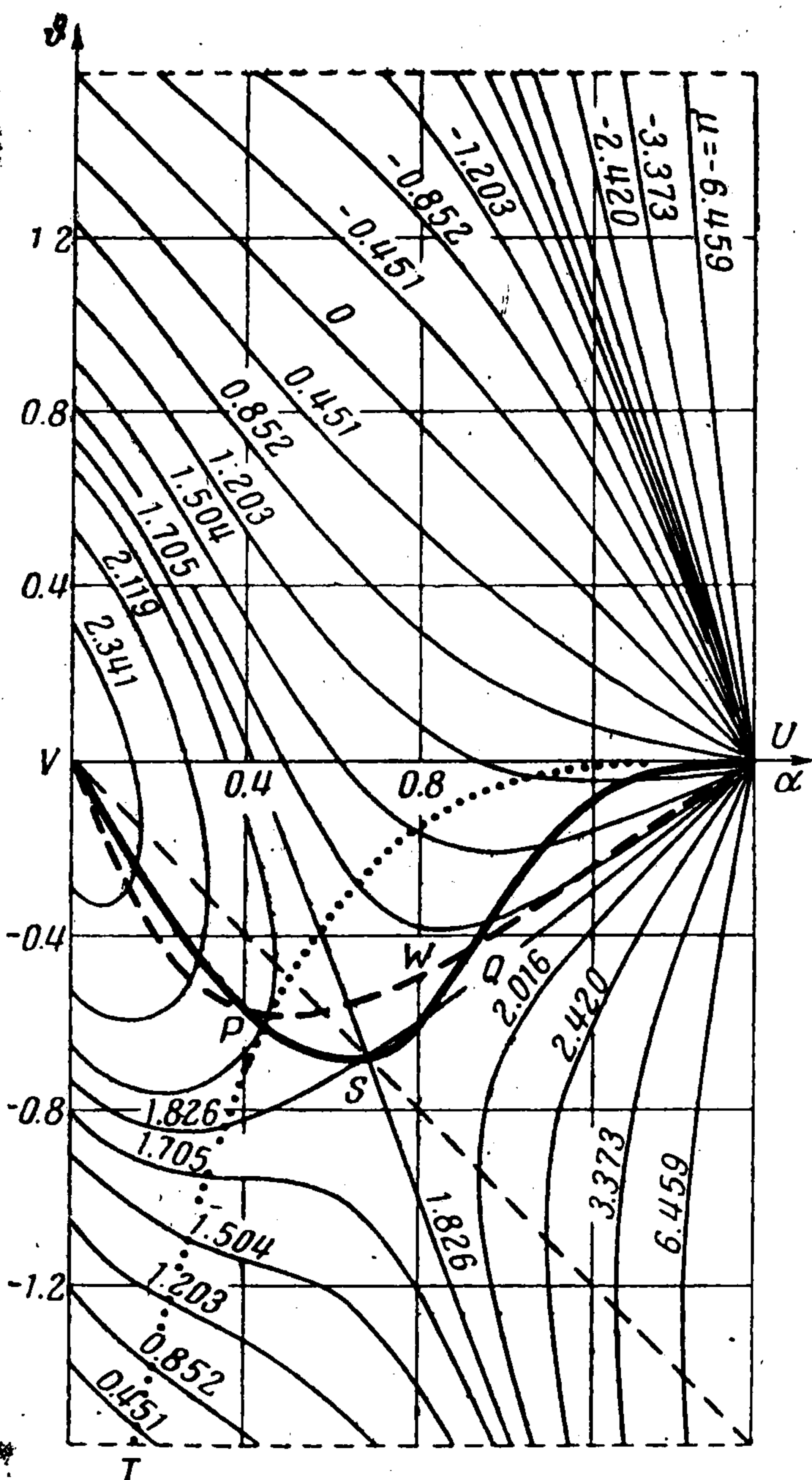
Наибольшее значение $\mu = \mu_*$, при котором радикал в (3.7) действителен во всем интервале $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, равно

$$\mu_* = \sqrt{\frac{8}{\kappa + 1}}$$

Пусть величины $\alpha = \alpha_*$, $\vartheta = \vartheta_*$ определяются равенствами $2 \cos 2\alpha_* = \kappa - 1$, $\cos(\vartheta_* + \alpha_*) = 1$. Точка с этими μ и α в плоскости α, ϑ является седлом и на фиг. 4—6 отмечена буквой S . Через точку S проходят две экстремали с $\mu = \mu_*$. Точка U с $\alpha = \pi/2$, $\vartheta = 0$ является узлом.

Экстремали в плоскости $R\alpha$ при $\mu > \mu_*$ представляют собой петли. При $\mu < \mu_*$ экстремали соединяют точки $R = 1, \alpha = 0$ и $R = 1, \alpha = \pi/2$. Соответствие областей в плоскостях $R\alpha, \alpha\vartheta$ и $w\vartheta$ легко проследить по значениям μ , приведенным на фиг. 4—6.

4. Область минимального сопротивления. Вдоль характеристики второго семейства $dr = -\sin(\vartheta - \alpha) dl$, где l — длина дуги характеристики, отсчитываемая от точки b в направлении увеличения расхода газа ψ , т. е. в направлении к точке c .

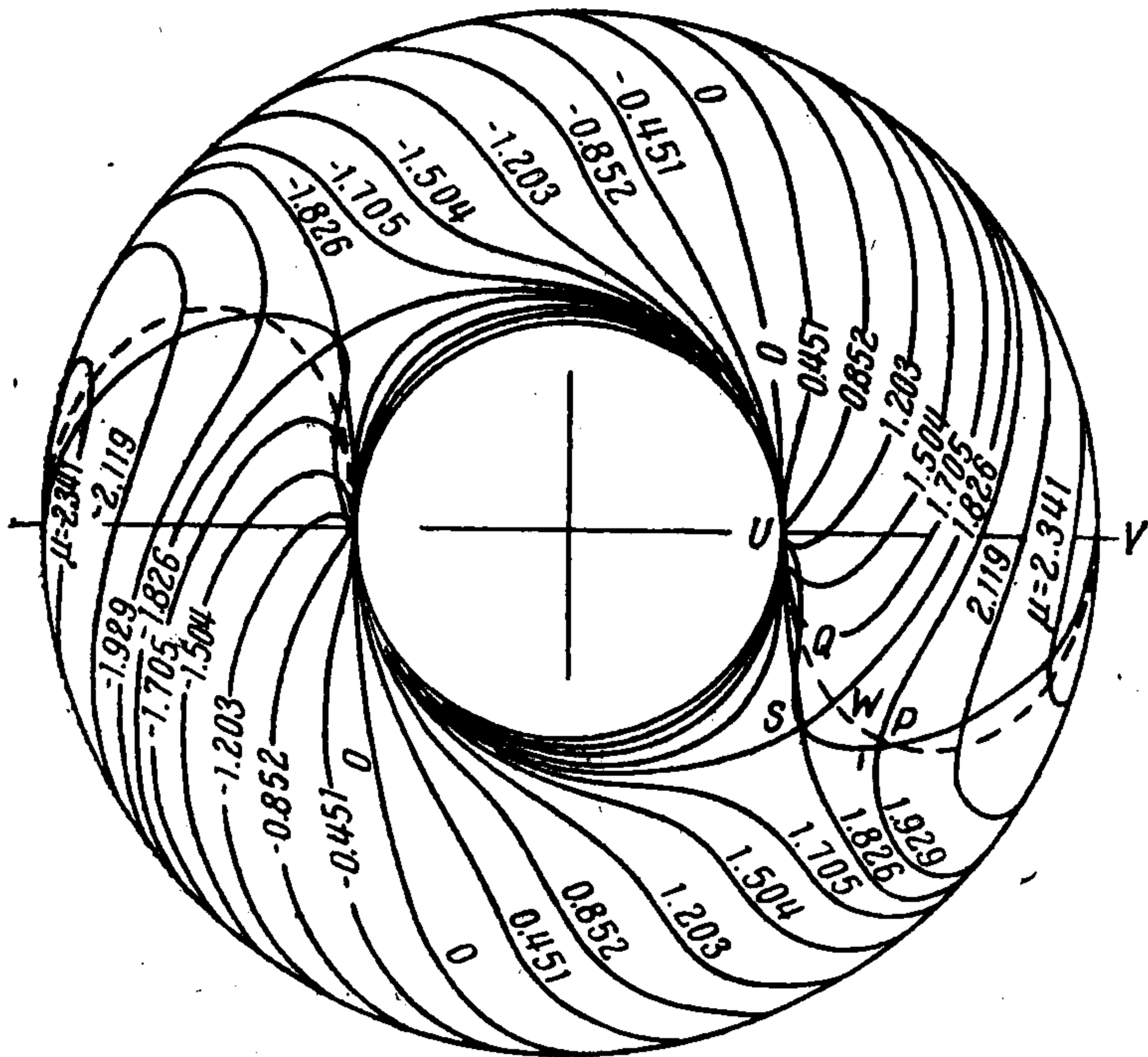


Фиг. 5

Используя выражение для dr , перепишем (3.2) в виде

$$\delta\chi = - \int_0^{l_c} V \delta\alpha dl \quad (V = \Phi_\alpha \sin(\vartheta - \alpha)) \quad (4.1)$$

Заметим, что знаки dr и dR совпадают в силу равенства (3.9) и неравенства $\lambda \geq 0$.



Фиг. 6

Рассмотрим теперь какую-либо экстремаль (фиг. 7) в плоскости $R\alpha$. На ней $V = 0$ и первая вариация $\delta\chi$ равна нулю в соответствии с (4.1). Некоторый участок экстремали, на котором $\alpha(R)$ является однозначной функцией, обеспечивает минимум волнового сопротивления χ , если над ним ($\delta\alpha > 0$) в плоскости $R\alpha$ имеет место неравенство $V < 0$, а под ним ($\delta\alpha < 0$) — неравенство $V > 0$. Действительно, выражение (4.1) показывает, что в этом случае $\delta\chi > 0$ при любом

знаке величины $\delta\alpha$. Таким образом, задача заключается в определении знака V в окрестности данного участка экстремали в плоскости $R\alpha$.

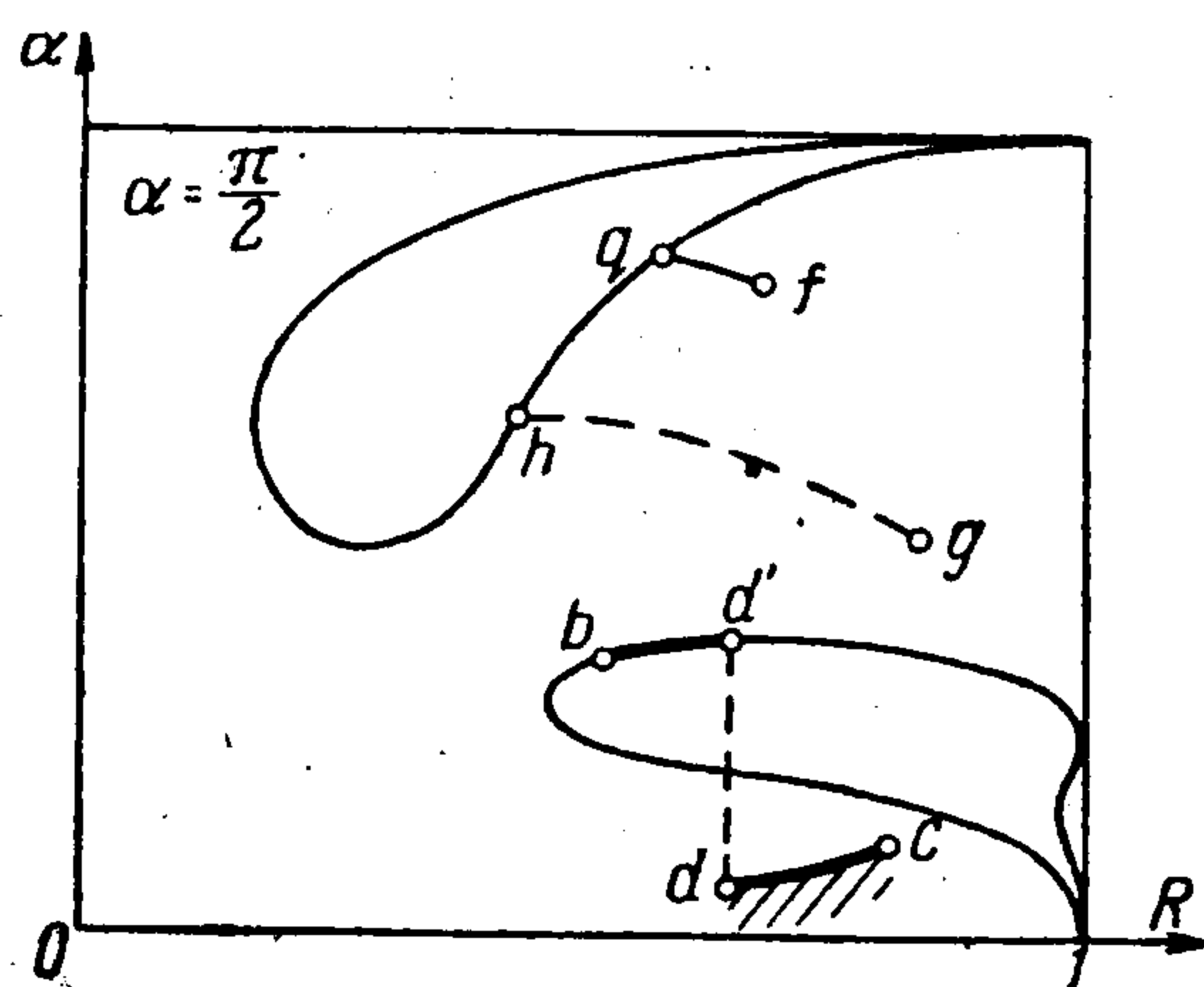
Из характера экстремалей и равенства (4.1) следует, что участки экстремалей, обеспечивающие минимум χ , могут граничить с участками, дающими максимум χ , в точках с бесконечной производной $d\alpha/dr$ при $\sin(\vartheta - \alpha) \neq 0$. Эти условия выполняются в точках с бесконечными ускорениями (или $d\alpha/dl$). Л. Е. Стернин [8] нашел геометрическое место точек с бесконечной производной $d\alpha/dr$ дифференцированием выражения (3.7) по α , исключением величины μ при помощи (3.6) и приравниванием полученного результата нулю. В рассматриваемом случае при отыскании экстремальных характеристик второго семейства полученное в [8] уравнение геометрического места точек с $dr/d\alpha = 0$ имеет вид

$$T(\alpha, \vartheta) \equiv (\kappa - 1 + 2\cos^2 2\alpha) \cos \alpha - (\kappa + 1) \cos \alpha \cos 2\vartheta - (\kappa - 1 - 2\cos 2\alpha) \sin \alpha \sin 2\vartheta = 0 \quad (4.2)$$

Это уравнение имеет простой корень $\vartheta = \alpha + n\pi$, где n — целое число, соответствующий конечным ускорениям, и корень

$$\vartheta = - \arctg \frac{(1 + \cos 2\alpha) \sin 2\alpha}{\kappa + \cos^2 2\alpha} + n\pi \quad (4.3)$$

изображенный при $n = 0$ на фиг. 5 кривой VSU . Легко проверить, что эта кривая проходит через точку S . Здесь и в дальнейшем корни уравнения



Фиг. 7

(4.2) при $n \neq 0$ специально не рассматриваются, поскольку их смысл очевиден.

Кривая, определяемая равенством (4.3), в плоскости $R\alpha$ пересекает один раз петлеобразные экстремали с $\mu \geq \mu_*$ и $\alpha \leq \alpha_*$, дважды — часть петлеобразных экстремалей с $\mu \geq \mu_*$ и $\alpha > \alpha_*$ и далее один раз пересекает часть экстремалей с $\mu < \mu_*$.

Обратимся к определению знака V вне рассматриваемой экстремали и выяснению смысла функций (4.3) с точки зрения достаточных условий экстремума. Величина V является функционалом и зависит от пути $\alpha = \alpha(R)$, соединяющего некоторую точку h экстремали с интересующей нас точкой g (фиг. 7). Действительно, величина ϑ связана с α и r уравнениями (1.6) и (1.7), а ϑ_g зависит тем самым от ϑ_h , α_h и $\alpha(r)$ на hg . Особыми точками V на экстремали являются точки, в которых $\sin(\vartheta - \alpha) = 0$, как это следует из (4.1) и (3.3). Существенно, однако, что V сохраняет знак в таких окрестностях регулярных точек экстремали, которые не пересекаются исследуемой экстремалью. В противном случае рассматриваемые окрестности экстремали пересекаются новыми экстремальями $\Phi_\alpha = 0$, но все линии $\Phi_\alpha = 0$ уже известны. Таким образом, достаточно каким-либо одним путем определить знак V вне экстремалей. Выберем следующий путь. В окрестности регулярной точки q построим бесконечно малый элемент характеристики qf , не совпадающий с экстремалью. Величины $\delta\alpha$ и dr на элементе qf имеют один порядок малости. Величина V в точке f с точностью до величин первого порядка малости равна

$$V = \delta V = V_\alpha \delta\alpha + V_\beta \delta\beta + V_\nu \delta\nu \quad (4.4)$$

Вычислим вариации $\delta\beta$ и $\delta\nu$. Варьируя равенство (1.6) и производя интегрирование, получим

$$\delta\beta = E(r_f) \int_{r=r_q}^{r_f} \frac{B}{E(r)} \delta\alpha dr \quad (4.5)$$

Здесь

$$E(r) = \exp \int_{r=r_q}^r \frac{\sin^2 \alpha}{r \sin^2(\vartheta - \alpha)} dr$$

$$B = \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{r (\kappa - \cos 2\alpha) \sin(\vartheta - \alpha)} [(1 + \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \vartheta +$$

$$+ (\kappa - \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \alpha - (2 \cos 2\alpha - \kappa + 1) \operatorname{ctg}(\vartheta - \alpha)]$$

Величина $\delta\nu$ в точке f равна ν , так как $\nu_q = 0$, и определяется равенствами (3.4) и (3.5). Далее, $\Phi_\beta = 0$ в точке q . Поэтому на элементе qf имеем с точностью до величин первого порядка малости

$$\Phi_\beta = (\Phi_\beta|_{\nu=0})_\alpha \delta\alpha + (\Phi_\beta|_{\nu=0})_\beta \delta\beta + \Phi_{\beta\nu} \delta\nu$$

Интегрирование (3.4) с учетом последнего равенства дает

$$\delta\nu = E(r_f) \int_{r=r_q}^{r_f} \frac{(\Phi_\beta|_{\nu=0})_\alpha \delta\alpha + (\Phi_\beta|_{\nu=0})_\beta \delta\beta}{E(r)} dr \quad (4.6)$$

Равенства (4.5) и (4.6) показывают, что вариации $\delta\beta$ и $\delta\nu$ на бесконечно малом элементе qf имеют по сравнению с $\delta\alpha$ более высокий порядок ма-

лости. Отсюда и из (4.4) следует, что с точностью до величин первого порядка малости

$$\delta V = V_\alpha \delta \alpha \quad (4.7)$$

Вспомним выражение (4.1) для V и (3.3) для Φ_α . Произведем дифференцирование V по α , как и всегда в системе переменных r, α, β , и в найденное выражение подставим λ и μ из (3.6). Окончательно имеем при $V = 0$

$$V_\alpha = - \frac{2r\tau(\alpha)\sigma(\alpha)\sin 2\alpha}{(\kappa - \cos 2\alpha)^2(1 - \cos 2\alpha)} \frac{T(\alpha, \vartheta)}{\sin(\vartheta - \alpha)} \quad (4.8)$$

где $T(\alpha, \vartheta)$ определяется в (4.2). Корни уравнения $T(\alpha, \vartheta) = 0$ уже найдены. Из формулы (4.8) следует, что $V_\alpha = 0$ при ϑ , определяемых равенствами (4.3). Нетрудно видеть, что $V_\alpha < 0$ при

$$H(\alpha) < \vartheta < \pi + H(\alpha) \quad (4.9)$$

где

$$H(\alpha) \equiv - \operatorname{arctg} \frac{(1 + \cos 2\alpha)\sin 2\alpha}{\kappa + \cos^2 2\alpha}$$

т. е. в области над кривой VSU (фиг. 5), и $V_\alpha > 0$ при

$$-\pi + H(\alpha) < \vartheta < H(\alpha) \quad (4.10)$$

т. е. в области ниже кривой VSU .

В области (4.9) знак V в окрестности экстремали противоположен знаку $\delta\alpha$ в силу (4.7). Отсюда и из (4.1) заключаем, что область (4.9) соответствует минимуму сопротивления χ .

Аналогично можно установить, что область (4.10) соответствует максимуму χ .

Возвратимся к плоскости $R\alpha$ (фиг. 4). Здесь минимуму сопротивления соответствуют отрезки экстремалей, отсекаемые штрих-пунктирной линией VSU и изображенные более жирными линиями.

Связь между результатами работы [8] и полученными здесь устанавливается без труда. Действительно, производная $dr/d\alpha$ вдоль экстремалей, вычисленная при помощи равенств

$$\Phi_\alpha(r, \alpha, \beta)|_{v=0} = 0, \quad \Phi_\beta(r, \alpha, \beta)|_{v=0} = 0$$

выполняющихся на экстремальных и рассматриваемых как неявное выражение r через α , равна

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\Phi_{\alpha\alpha}\Phi_{\beta\beta} - \Phi_{\alpha\beta}^2}{\Phi_{\beta r}\Phi_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha r}\Phi_{\beta\beta}} \quad (4.11)$$

На экстремальных имеем из (4.8)

$$\Phi_{\alpha\alpha} = - \frac{2r\tau(\alpha)\sigma(\alpha)\sin 2\alpha T(\alpha, \vartheta)}{(\kappa - \cos 2\alpha)^2(1 - \cos 2\alpha)\sin^2(\vartheta - \alpha)} \quad (4.12)$$

Аналогично можно вычислить

$$(4.13)$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = - \frac{r\tau(\alpha)\sigma(\alpha)\sin 2\alpha T(\alpha, \vartheta)}{(\kappa - \cos 2\alpha)(1 - \cos^2 2\alpha)\sin^2(\vartheta - \alpha)}, \quad \Phi_{\beta\beta} = \frac{r\tau(\alpha)\sigma(\alpha)\cos(\vartheta + \alpha)}{\cos \alpha \sin(\vartheta - \alpha)}$$

Таким образом, числители первого и второго членов правой части (4.11) обращаются в нуль при ϑ , определяемом выражением (4.3), а знаменатель в нуль при этом не обращается.

5. Разрывные решения. В силу вырожденности рассматриваемой вариационной задачи двусторонний экстремум в ней, вообще говоря, недостижим. Краевой экстремум может достигаться на предельных допустимых зависимостях α от r , оговоренных в пп. 1 и 2. Предельное убывание α на характеристике при движении от точки c к точке b определяется [10-11] изломом образующей ab в точке a . Предельное возрастание α может достигаться на разрывных зависимостях, рассмотренных в п. 2.

Характеристики течения первого типа в области cad изображены на фиг. 8. Выделим в поле этого течения кривую at , на которой α и ϑ связаны равенством (4.3) при $n = 0$. Точки области cat удовлетворяют условиям (4.9). В этом случае из каждой точки области cat можно выпустить экстремальную характеристику, определяющую тело с минимальным сопротивлением. Такие непрерывные решения были получены в работе [4], область их существования ограничена выходом экстремалей на кривую VSU (фиг. 5), т. е. появлением точек с бесконечными ускорениями.

Множеству точек области cat или по крайней мере его части соответствует множество точек b , которые можно считать заданными при постановке задачи. Класс решений вариационной задачи будет расширен, если удастся найти образующие ab с минимальным сопротивлением, соответствующие в этом смысле точкам d из (4.10).

Найдем решение задачи для того случая, когда исходная точка d экстремали (фиг. 8) принадлежит области (4.10). После построения схемы решения необходимо проверить выполнение необходимых и достаточных условий минимума χ для всего решения в целом.

Итак, точка d принадлежит области (4.10). Очевидно, что из этой точки необходимо перейти некоторым путем в область (4.9). При всяком допустимом непрерывном переходе часть характеристики будет принадлежать области (4.10) и поэтому может быть проварьирована так, что величина χ уменьшится. Остается использовать разрывный переход из одной области в другую. По условиям задачи допустим только изэнтропический скачок, обусловленный фокусировкой характеристик первого семейства adk в точке d (фиг. 8). Такой переход в плоскости $\alpha\vartheta$ производится (фиг. 9) по линии d_0d_1 , удовлетворяющей уравнению характеристики второго семейства (1.3) при $dr = d\varphi^0 = 0$

$$\vartheta_0 + f(\alpha_0) = \vartheta_1 + f(\alpha_1)$$

и по линии d_1d_4 , удовлетворяющей уравнению характеристики первого семейства (1.2) при $dr = d\varphi^0 = 0$

$$\vartheta_1 - f(\alpha_1) = \vartheta_4 - f(\alpha_4)$$

Новая схема течения содержит дополнительные произволы, связанные с положением точки d (фиг. 8). Выведем соответствующие этим произволам условия трансверсальности.

Функционал I , выраженный формулой (3.1), может быть записан в эквивалентной форме [4]

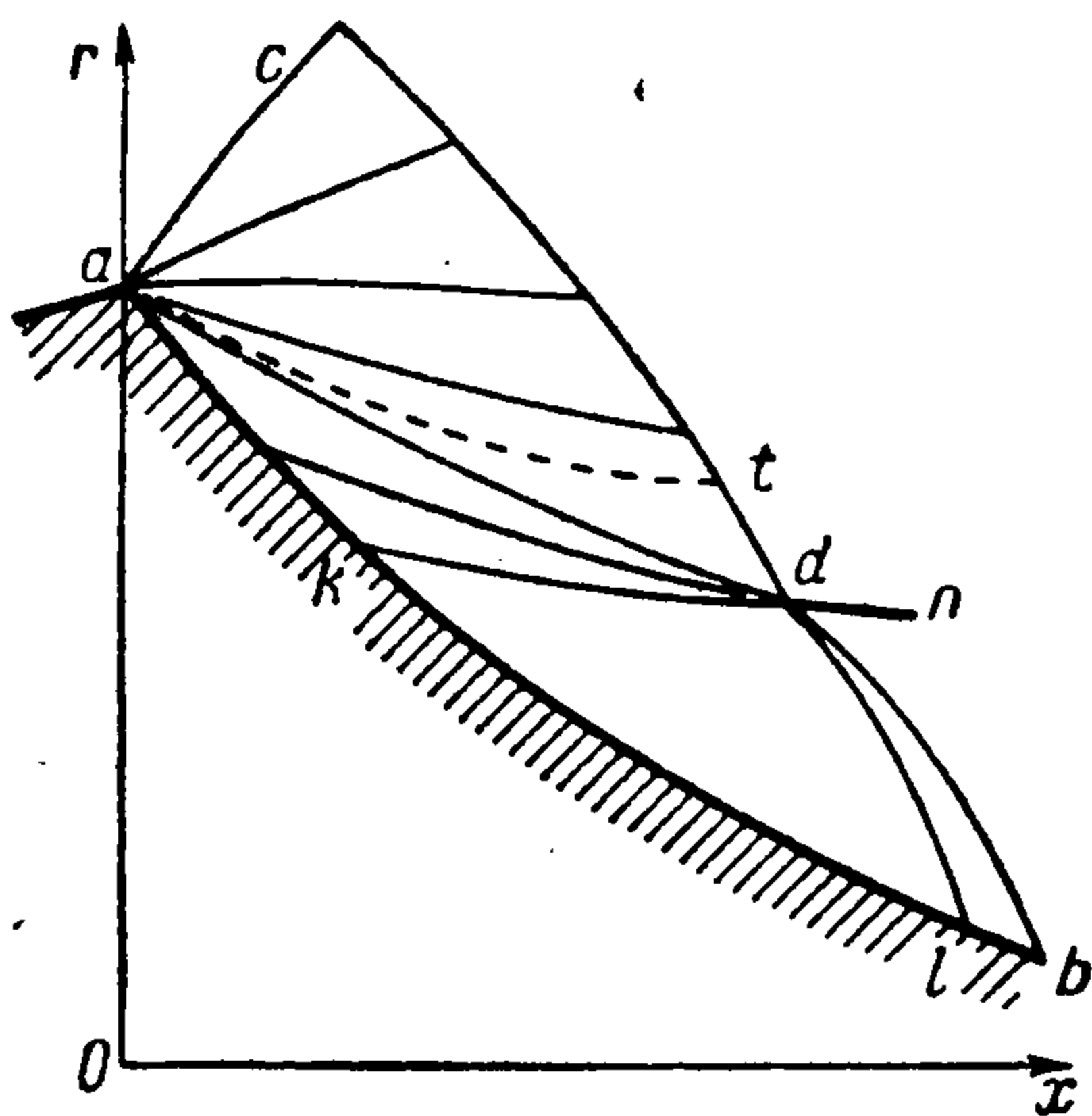
$$I = F(r_c) - \int_{r=r_c}^{r_d} \Phi dr + \int_{r=r_b}^{r_d} \Phi dr \quad (5.1)$$

причем

$$F(r_c) - \int_{r=r_c}^{r_d} \Phi dr = F(r_d) \quad (5.2)$$

где $F(r_d)$ — тот же интеграл, что и $F(r_c)$ в (3.1), но взятый вдоль характеристики ad . При вычислении первой вариации следует учесть структуру течения в окрестности точки d , описанную в п. 2. Величины в точке d ,

полученные при стремлении к этой точке по характеристикам ad , kd и bd , будем соответственно обозначать индексами 0, 1 и 4.



Фиг. 8

Течение в cad неизменно, произвольным является только выбор границ ad и dc этой области. Угол ω , образованный касательными к характеристикам ad и kd в точке d , не фиксирован и может варьироваться. На участке db функция $\alpha(r)$ свободна, но принадлежит классу допустимых функций вариационной задачи. Таким образом, среди конечных значений задачи произвольными являются две координаты

точки d , полностью определяющие область cad , величина ω и конечное значение r_d участка характеристики db , который при варьировании может скользить по фиксированной характеристике kd . Характер последней вариации определяется тем, что в силу независимости решения на ak от участка kb этот последний участок должен обладать минимальным волновым сопротивлением.

В качестве направлений, по которым варьируется положение точки d , выберем касательные в точке d к характеристикам cd , ad и kd , а соответствующие вариации величины r обозначим через δr_{dc} , δr_{da} и δr_{dk} .

При варьировании δr_{da} происходит переход от характеристики cd к другой характеристике второго семейства той же области cad . Учитывая равенство (5.2), приращение первых двух членов в (5.1) можно записать как

$$[dF(r_0) / dr_0] \delta r_{da}$$

а приращение третьего члена за счет вариации δr_{da} как $\Phi_4 \delta r_{da}$. Подобным образом для фиксированной характеристики kd вычисляется вариация, зависящая от δr_{dk} . Часть δI_{dak} вариации функционала I , зависящая от вариаций δr_{da} и δr_{dk} , принимает вид

$$\delta I_{dak} = \left(\frac{dF(r_0)}{dr_0} + \Phi_0 \right) \delta r_{da} + \left(\frac{dF(r_4)}{dr_4} + \Phi_4 \right) \delta r_{dk} \quad (5.3)$$

Варьирование по направлению характеристики второго семейства проведем для I в форме (5.1). При этом величина r_d меняется на δr_{dc} , второй член в (5.1) уменьшается на $\Phi_0 \delta r_{dc}$, а третий увеличивается на $\Phi_4 \delta r_{dc}$. Таким образом, часть δI_{dc} вариации функционала I , зависящая от δr_{dc} , равна

$$\delta I_{dc} = (\Phi_4 - \Phi_0) \delta r_{dc} \quad (5.4)$$

Первая вариация, зависящая от $\delta\omega$, равна нулю, так как при изменении ω меняется только конечное значение Φ_4 в третьем члене (5.1).

Ввиду независимости δr_{da} , δr_{dc} и δr_{dk} , вызванной тем, что точка d является особой, из (5.3) и (5.4) получаем условия трансверсальности

$$\frac{dF(r_0)}{dr_0} + \Phi_0 = 0, \quad \frac{dF(r_4)}{dr_4} + \Phi_4 = 0, \quad \Phi_4 - \Phi_0 = 0 \quad (5.5)$$

Второму из этих условий подчинено решение (3.6) уравнений Эйлера вариационной задачи [4]. Первое условие из (5.5), в котором Φ_0 заменено на Φ_4 в силу третьего условия из (5.5), и третье условие в развернутой форме имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} & \tau(\alpha_0) \sigma(\alpha_0) \left[\frac{\sin \alpha_0}{\kappa} + \frac{\cos \vartheta_0}{\sin(\vartheta_0 + \alpha_0)} \right] - \tau(\alpha_4) \sigma(\alpha_4) \left[\frac{\sin \alpha_4}{\kappa} - \frac{\cos \vartheta_4}{\sin(\vartheta_4 - \alpha_4)} \right] + \\ & + \Lambda [\operatorname{ctg}(\vartheta_0 + \alpha_0) - \operatorname{ctg}(\vartheta_4 - \alpha_4)] - \mu \left[\frac{\tau(\alpha_0)}{\sin(\vartheta_0 + \alpha_0)} + \frac{\tau(\alpha_4)}{\sin(\vartheta_4 - \alpha_4)} \right] = 0 \\ & \tau(\alpha_0) \sigma(\alpha_0) \left[\frac{\sin \alpha_0}{\kappa} - \frac{\cos \vartheta_0}{\sin(\vartheta_0 - \alpha_0)} \right] - \tau(\alpha_4) \sigma(\alpha_4) \left[\frac{\sin \alpha_4}{\kappa} - \frac{\cos \vartheta_4}{\sin(\vartheta_4 - \alpha_4)} \right] + \\ & + \Lambda [\operatorname{ctg}(\vartheta_0 - \alpha_0) - \operatorname{ctg}(\vartheta_4 - \alpha_4)] + \mu \left[\frac{\tau(\alpha_0)}{\sin(\vartheta_0 - \alpha_0)} - \frac{\tau(\alpha_4)}{\sin(\vartheta_4 - \alpha_4)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

где

$$\Lambda = \tau(\alpha_4) \sigma(\alpha_4) \frac{\sin^2 \vartheta_4}{\cos \alpha_4}, \quad \mu = \sigma(\alpha_4) \frac{\cos(\vartheta_4 + \alpha_4)}{\cos \alpha_4} \quad (5.8)$$

Решение является допустимым тогда, когда помимо условий (5.6) и (5.7) выполнены неравенства (2.6) и (2.7).

Отметим, что равенства $\alpha_4 = \alpha_0$, $\vartheta_4 = \vartheta_0$ будут для уравнений (5.6) — (5.7) корнем кратности два. Если при этом α_0 и ϑ_0 связаны равенством $T(\alpha_0, \vartheta_0) = 0$, где $T(\alpha, \vartheta)$ определяется в (4.2), то имеем корень кратности три. Приведем примеры решения уравнений (5.6) — (5.8) при некоторых значениях α_0 , ϑ_0

α_0	ϑ_0	α_1	ϑ_1	α_4	ϑ_4
0.0500	-0.3000	0.0914	-0.0991	0.0887	-0.0860
0.1000	-0.5000	0.1711	-0.1807	0.1679	-0.1671
0.1664	-0.6686	0.2670	-0.2789	0.2643	-0.2693
0.2000	-0.9000	0.3663	-0.3475	0.3586	-0.3268

В этих примерах точки α_0 , ϑ_0 и α_4 , ϑ_4 в плоскости α, ϑ лежат по разные стороны от кривой VSU , соответствующей равенству $T(\alpha, \vartheta) = 0$. В приведенных решениях выполнены неравенства (2.6) и (2.7).

6. Область безударных решений. В первоначальной постановке задачи течение предполагалось изэнтропическим и величина φ считалась равной единице. Определим теперь область, в которой это предположение действительно обеспечивает минимум χ .

Предположим, что величина $\varphi(r)$ переменна. Второе начало термодинамики выдвигает ограничение

$$\varphi(r) \geq 1 \quad (6.1)$$

Первая вариация δI при $\varphi = \varphi(r)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \delta I = & \left(\frac{dF(r_0)}{dr_0} + \Phi_4 \right) \delta r_{da} + \left(\frac{dF(r_4)}{dr_4} + \Phi_4 \right) \delta r_{dk} + (\Phi_4 - \Phi_0) \delta r_{dc} + \\ & + v_d \left[\left(\frac{d\beta}{dr} \right)_{dk} - \left(\frac{d\beta}{dr} \right)_{db} \right] \delta r_{dk} + v_d \frac{\sin 2\alpha_d}{2\kappa(\kappa-1)\varphi_d} \left[\left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_{dk} - \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_{db} \right] \delta r_{dk} - v_d \left[\delta\beta_b + \right. \\ & \left. + \frac{\sin 2\alpha_b}{2\kappa(\kappa-1)\varphi_b} \delta\varphi_b \right] + \int_{r=r_b}^{r_d} \left[\Phi_\alpha \delta\alpha + \left(\Phi_\beta - \frac{d}{dr} \Phi_{\beta'} \right) \delta\beta + \left(\Phi_\varphi - \frac{d}{dr} \Phi_{\varphi'} \right) \delta\varphi \right] dr \quad (6.2) \end{aligned}$$

Множитель v определяется приравнением нулю выражения при $\delta\beta$ под знаком интеграла

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(\vartheta - \alpha)} \left\{ r\tau(\alpha) [\sigma(\alpha) \cos \alpha - \mu \cos(\vartheta - \alpha)] \varphi^{-\frac{1}{\kappa-1}} - \right. \\ \left. - \lambda + \frac{v}{r} \sin^2 \alpha \right\} - \frac{dv}{dr} = 0 \quad (6.3) \end{aligned}$$

При выполнении условий трансверсальности, равенства (6.3) и равенств $\delta X = \delta \Psi = 0$, обусловленных постановкой задачи, вариация $\delta\chi$ имеет вид

$$\delta\chi = - \int_{r=r_b}^{r_d} \left[\Phi_\alpha \delta\alpha + \left(\Phi_\varphi - \frac{d}{dr} \frac{v \sin 2\alpha}{2\kappa(\kappa-1)\varphi} \right) \delta\varphi \right] \sin(\vartheta - \alpha) dl \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha = & \frac{r}{\sin^2(\vartheta - \alpha)} \left\{ \sigma(\alpha) \tau(\alpha) \left[\frac{\kappa+1}{2} \frac{\sin 2\vartheta}{\sin \alpha} - 2(1 + \cos 2\alpha) \cos \alpha \right] \varphi^{-\frac{1}{\kappa-1}} + \right. \\ & + \frac{\lambda}{r} (2\cos 2\alpha - \kappa + 1) + \mu \tau(\alpha) [(2\cos 2\alpha - \kappa + 1) \cos(\vartheta - \alpha) - \\ & \left. - (\kappa + 1) \operatorname{ctg} \alpha \sin(\vartheta - \alpha)] \varphi^{-\frac{1}{\kappa-1}} - \right. \\ & \left. - \frac{v}{2r^2} [\sin^2 2\alpha - 2(\kappa - \cos 2\alpha) \sin^2 \vartheta] \right\} \frac{1}{\kappa - \cos 2\alpha} \quad (6.5) \end{aligned}$$

$$\Phi_\varphi = \frac{r\tau(\alpha)}{\kappa-1} \left\{ \sigma(\alpha) \left[\frac{\sin \alpha}{\kappa} - \frac{\cos \vartheta}{\sin(\vartheta - \alpha)} \right] + \frac{\mu}{\sin(\vartheta - \alpha)} \right\} \varphi^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} - \frac{v \sin 2\alpha \varphi'}{2\kappa(\kappa-1)\varphi^2} \quad (6.6)$$

В изэнтропическом случае $v = 0$, μ определяется равенством (3.6), и выражение, стоящее в фигурных скобках формулы (6.6), имеет вид

$$\frac{\sigma(\alpha) \operatorname{tg} \alpha (\cos^2 \alpha - \kappa) \sin \vartheta - \sin \alpha \cos \alpha \cos \vartheta}{\kappa \sin(\vartheta - \alpha)}$$

Таким образом, функция Φ_φ обращается в нуль при

$$\vartheta = - \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\alpha}{2\kappa - 1 - \cos 2\alpha} + n\pi \quad (6.7)$$

Зависимость (6.7) изображена на фиг. 5 кривой VWU , пересекающейся с кривой VSU в точках V, P, Q, U . Легко видеть, что выше кривой VWU имеет место неравенство $\Phi_\varphi \sin(\vartheta - \alpha) < 0$, а ниже VWU — неравенство $\Phi_\varphi \sin(\vartheta - \alpha) > 0$.

Из (6.1) следует, что при $\varphi = 1$ допустимая вариация $\delta\varphi > 0$. На основании (6.4) делаем следующее заключение. В области

$$-\arctg \frac{\sin 2\alpha}{2\kappa - 1 - \cos 2\alpha} < \vartheta < \pi - \arctg \frac{\sin 2\alpha}{2\kappa - 1 - \cos 2\alpha} \quad (6.8)$$

допустимые вариации $\delta\varphi$ ведут к увеличению сопротивления χ . Таким образом, в области (6.8) минимальное сопротивление достигается при изэнтропических течениях.

Рассмотрим область Ω , ограниченную прямой VU , на которой $\vartheta = 0$ (фиг. 5), кривой (4.3) на участке VP , кривой (6.7) на участке PWQ и кривой (4.3) на участке QU . Пусть начальная точка d (фиг. 8) экстремали принадлежит этой области. В области Ω имеем $-\pi < \vartheta - \alpha \leq 0$, т. е. при движении по экстремальному участку характеристики от точки d к точке b величина r уменьшается или, в крайнем случае, при $\vartheta = \alpha = 0$ остается неизменной. Это соответствует движению по экстремалам в плоскости $\alpha\vartheta$ от прямой VU к ломаной $VPWQU$. Отсюда следует, что изэнтропические течения рассматриваемого вида существуют, если вся экстремаль принадлежит области Ω .

На экстремали с $\vartheta > 0$ подобное ограничение не накладывается даже при достаточно больших ϑ , так как угол ϑ на экстремальных участках характеристики не меняет знака.

Отметим, что вид условий трансверсальности, получаемых из (6.2) для области $PWQS$, отличается от (5.6) — (5.7) ввиду неравенства (6.1).

При безударном течении в области adb (фиг. 8) ударная волна dn не оказывает воздействия на контур ab .

7. Порядок расчета. Пусть заданы точки a и b и характеристика ae . Предполагается, что решение задачи относится к рассмотренному здесь типу.

Прежде всего рассчитывается течение в области cad . Это можно сделать, например, методом характеристик [12]. Точка d в области cad должна быть выбрана так, чтобы экстремальная характеристика db , получаемая в результате расчета, пришла в точку b . В выбранной точке d области cad известны величины α_0 и ϑ_0 . Определяются α_4 и ϑ_4 , удовлетворяющие уравнениям (5.6)—(5.8). Далее следует убедиться в том, что найденные α_4 и ϑ_4 принадлежат области Ω , а течение в окрестности точки d соответствует типу, рассмотренному в п. 2. Последнее достигается расчетом течения в окрестности точки d по формулам (2.1), (2.3)—(2.5) и проверкой выполнения неравенств (2.7).

Найденные $\alpha = \alpha_4$ и $\vartheta = \vartheta_4$, а также известное r в точке d , позволяют вычислить λ и μ по формулам (3.6). По формулам (3.7) и (3.8) строится экстремаль db до $r = r_b$. Правильность выбора координат точки d подтверждается выполнением изопериметрических условий (1.5).

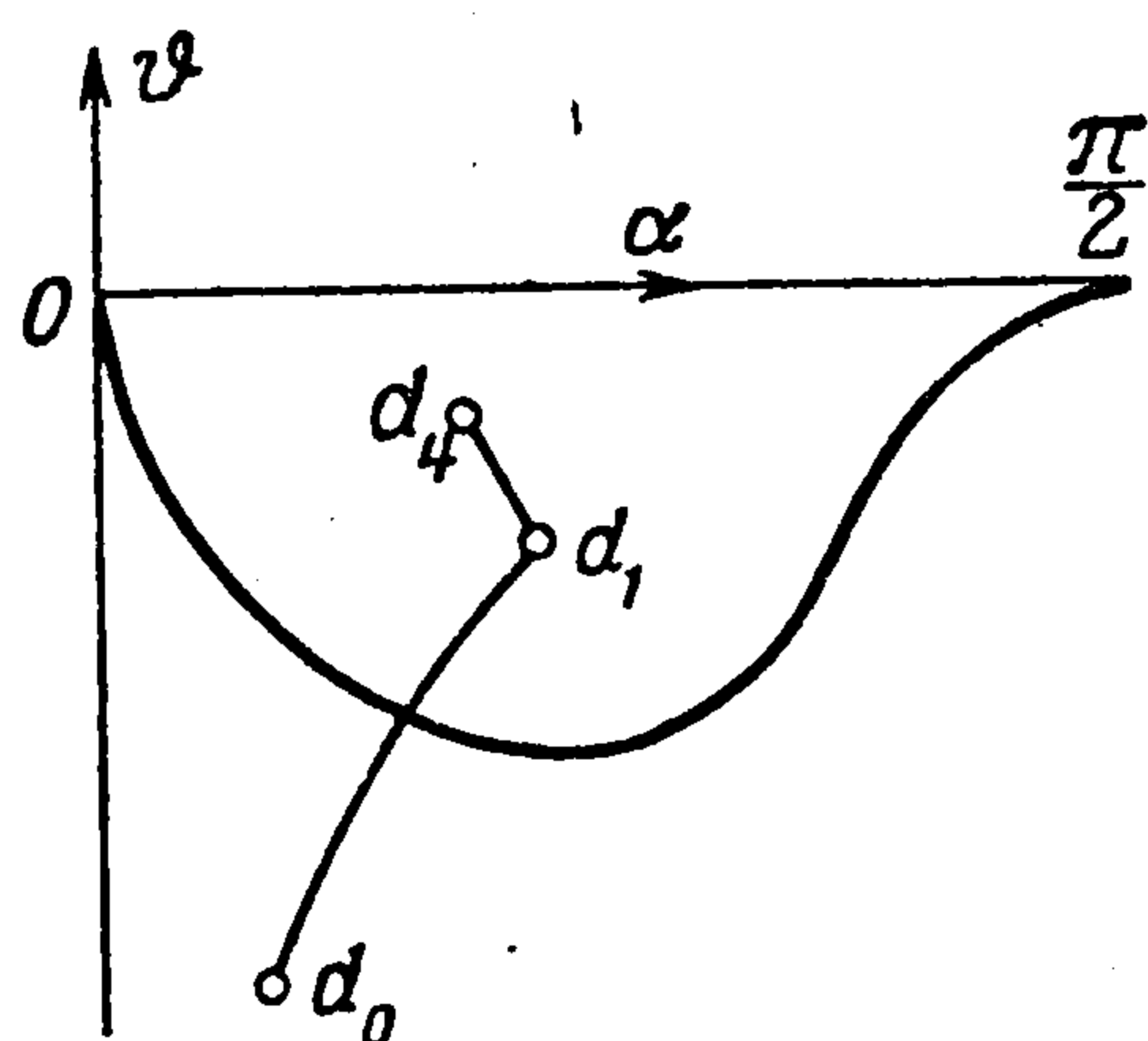
Полученное решение должно давать минимум χ . В получении минимума можно убедиться, проверив, действительно ли все допустимые вариации ведут к увеличению χ . Пусть, например, характеристика cd изображается в плоскости $R\alpha$ кривой cd , а экстремаль db — кривой $d'b$ (фиг. 7). Условие $V < 0$ на отрезке cd проверяется непосредственным вычислением по формулам (3.3) и (4.2). Допустимые вариации α на cd положительны и ведут к увеличению χ (краевой экстремум). Отрезок $d'b$ обеспечивает двусторонний минимум χ , так как выше $d'b$ имеем $V < 0$, а ниже $d'b$ имеем $V > 0$. Формула (1.4) позволяет найти величину волнового сопротивления искомого тела.

$$\sqrt{2(\kappa + 1)\pi} \rho_0 \chi$$

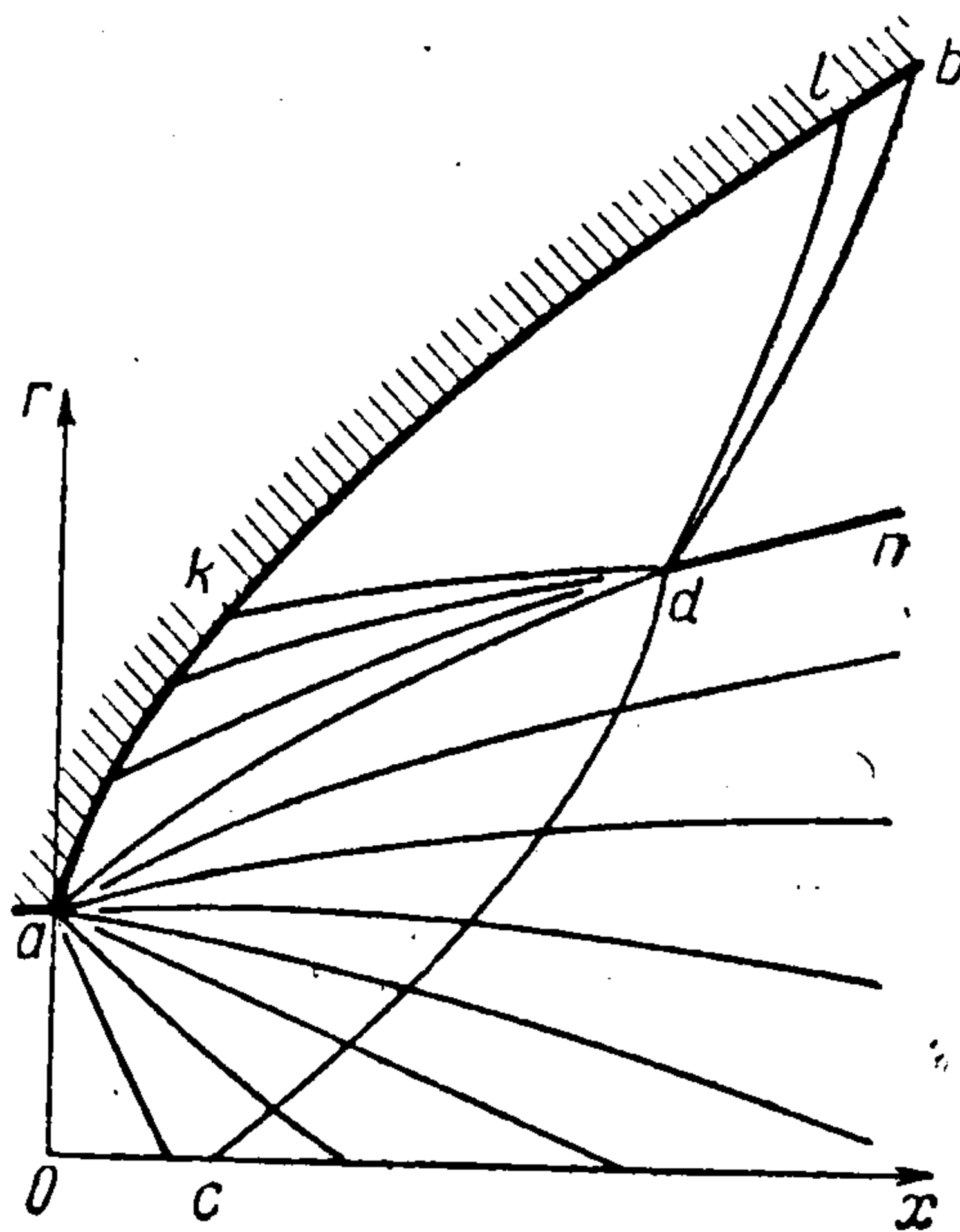
Для построения образующей ab тела вращения необходимо найти x на характеристике db по формуле

$$x = x_d + \int_{r=r_d}^r \operatorname{ctg}(\vartheta - \alpha) dr \quad (7.1)$$

Далее решение задачи Гурса для уравнений (1.1) при известной характеристике ad и характеристике второго семейства, выродившейся в точку d (кривая d_0d_1 на фиг. 9), позволяет построить течение в области adk . Решением задачи Гурса при известной характеристике db и характеристике первого семейства, выродившейся в точку d (кривая d_1d_4 на фиг. 9), строится течение в области bdl . Наконец, решение задачи Гурса по найденным характеристикам kd и dl дает течение в области kdl . Эти расчеты также могут быть проведены методом характеристик. Линия тока ab найденного течения представляет собой искомый контур.



Фиг. 9



Фиг. 10

8. Оптимальные сопла Лавала. Так будем называть сопла, которые при заданном течении на входе $a0$ (фиг. 10) и фиксированных точках a и b обладают максимальной тягой (минимумом χ).

Решение задачи о построении оптимального сопла может быть получено аналогично решению рассмотренной задачи о внешнем обтекании тела вращения. При этом следует учесть, что характеристики первого и второго семейств меняются ролями. Формально это приводит к тому, что в расчетных формулах (1.4), (1.5), (2.1), (2.3) — (2.5), (3.6) — (3.8), (5.6) — (5.8) и (7.1) величины α с любыми индексами должны быть заменены на величины $-\alpha$ с теми же индексами. Знаки величин α в (2.7) должны быть сохранены. Рабочими графиками при $\kappa = 1.4$ остаются фиг. 3—6, но на фиг. 5 и 6 величина ϑ должна быть заменена на $-\vartheta$. Дальнейшие рассуждения в этом пункте будут проведены в предположении, что все эти замены в упомянутых формулах и фигурах уже произведены.

Необходимо отметить следующие особенности течений в соплах.

Области Ω соответствует неравенство $\vartheta + \alpha > 0$, показывающее, что при движении по экстремальной характеристике db от точки d к точке b величина r увеличивается (фиг. 10). При этом в плоскости $R\alpha$ (фиг. 4) происходит движение в сторону больших R , а в плоскости $\alpha\vartheta$ (фиг. 5) — движение от ломаной $VPWQU$ к прямой VU . Следовательно, если точка d принадлежит области Ω , то этой точке соответствует экстремаль db при сколь угодно больших r_b .

Если поверхность перехода осесимметричного сопла является плоской и $\kappa = 1.4$, то течение в области свободного расширения ограничено в плоскости $\alpha\delta$ (фиг. 5) прямыми $\vartheta = 0$, $\alpha = 0$ и кривой UT , представляющей характеристику течения Прандтля — Майера. Из фиг. 5 следует, что большая часть этой области приводит к изэнтропическим экстремальным решениям и только небольшая подобласть в окрестности точки P связана с появлением ударных волн. Последний случай имеет место, если точка d в плоскости $\alpha\delta$ достаточно близка к кривой UT , т. е. если точка b в плоскости x, r достаточно близка к точке a .

Поступила 18 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Н и к о л ь с к и й А. А. О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке, Сб. теорет. работ по аэродинамике. Оборонгиз, 1957, стр. 56—63.
2. О х о ц и м с к и й Д. Е. К теории движения ракет. ПММ, 1946, т. X, вып. 2, стр. 251—272.
3. G u d e r l e y G., H a n t s c h E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. Zeitschrift für Flugwissenschaften, September 1955, H. 9, 3, 305—313.
4. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2, стр. 195—206.
5. R a o G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. Jet Propulsion, 1958, v. 28, No 6, 377—382.
6. G u d e r l e y G. On Rao's method for the computation of exhaust nozzles. Zeitschrift für Flugwissenschaften, Dezember 1959, H. 12, 7, 345—350.
7. F a n s e l a u R. W. Comments on Exhaust nozzle contour for maximum thrust. Journ. ARS. 1959, v. 29, № 6, 456—457.
8. С т е р н и н Л. Е. О границе области существования безударных оптимальных сопел. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2, стр. 335—336.
9. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. О некоторых свойствах осесимметричных сверхзвуковых течений газа. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 5, стр. 782—784.
10. Д о р о д н и ц ы н А. А. Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа. Сб. теорет. работ по аэродинамике. Оборонгиз, 1957, стр. 77—88.
11. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Расчет осесимметричных сверхзвуковых потоков газа в окрестности излома образующей тела вращения. Сб. теор. работ по аэродинамике. Оборонгиз, 1957, стр. 89—115.
12. К а ц к о в а О. Н., Н а у м о в а И. Н., Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д., Ш у л и ш н и н а Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М., Изд-во Вычислительного центра АН СССР, 1961.