Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО СЛОЯ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩЕЙ ПЛОТНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. А. Варданян, Р. С. Оганесян
(Ереван)

Рассматривается устойчивость плоского слоя гравитирующей жидкости с экспоненциально убывающей плотностью при наличии магнитного поля по отношению к поверхностным возмущениям периодического характера.

Пусть слой гравитирующей жидкости толщиной $2h$ и с плотностью

$$\rho = \rho_0 \exp\{-\beta y\} \qquad (\beta > 0) \tag{1}$$

находится в равновесном состоянии в собственном поле гравитационных сил при наличии внутреннего однородного магнитного поля, направленного вдоль оси x. Предположим, что плоскость xz совпадает с плоскостью симметрии слоя, а ось y направлена вертикально вверх. В выражении (1) под y следует подразумевать абсолютные значения y.

В выбранной системе координат уравнение возмущенной поверхности слоя будет иметь вид

$$y = h + \delta y = h + a\cos kx \tag{2}$$

Исследование устойчивости рассматриваемой системы по отношению к возмущениям типа (2) проводится по энергетическому принципу при помощи следующей системы уравнений:

$$\nabla^2 U = 0, \qquad \nabla^2 V = 4\pi G\rho \tag{3}$$

$$\partial H / \partial t = \frac{1}{4\pi\sigma}\nabla^2 \mathbf{H} + \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}), \qquad \nabla\mathbf{H} = 0 \tag{4}$$

$$\partial\rho / \partial t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho = 0, \qquad \nabla\mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

Здесь V и U — потенциалы внутри и вне среды соответственно, G — гравитационная постоянная, v — скорость, σ — электропроводность среды; уравнения (5) получаются из уравнения непрерывности, в силу предлагаемой модели гравитирующей жидкости [1]. Граничные условия для уравнений (3) — (5) будут

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \qquad (V)_{y=h} - (U)_{y=h} = 0, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=h} - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=h} = 0 \tag{6}$$

$$(v_y)_{y=0} = 0, \qquad (v_y)_{y=h} = \frac{da}{dt}\cos kx \tag{7}$$

При невозмущенном состоянии $\delta y = 0$, $v = 0$ и уравнения (4), (5) удовлетворяются, а решения (3) с учетом (1), (6) примут вид

$$V_0 = \frac{4\pi G\rho_0}{\beta^2}(e^{-\beta y} + \beta y - 1), \qquad U_0 = \frac{4\pi G\rho_0}{\beta}(1 - e^{-\beta h})\,y + C_0 \tag{8}$$

Здесь

$$C_0 = \frac{4\pi G\rho_0}{\beta^2} e^{-\beta h}(1 + \beta h - e^{\beta h}) \tag{9}$$

В предельном случае, когда $\beta \to 0$, из (8) получается [2, 3] выражение потенциала плоского слоя с постоянной плотностью ρ_0.

Исходная система уравнений (3) — (5) имеет решения для равновесного состояния, поэтому решение, описывающее состояние малого возмущения, можно представить в виде:

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta y} + \delta\rho_\beta, \qquad V = V_0 + \delta V, \qquad U = U_0 + \delta U_0, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}$$

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\varphi(x, y) \tag{10}$$

Здесь $\delta\rho_\beta$ — изменение плотности внутри среды и обусловлено перераспределением массы вследствие деформации свободной поверхности слоя; это изменение своим появлением обязано градиенту плотности невозмущенного слоя, так что $\delta\rho_\beta \to 0$ при $\beta \to 0$ функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Решение для $\varphi(x, y)$, удовлетворяющее условиям (7), имеет вид

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{k}\frac{da}{dt}\frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kh}\cos kx \tag{11}$$

Поле скоростей при этом примет вид:

$$v_x = -\frac{da}{dt}\frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kh}\sin kx, \qquad v_y = \frac{da}{dt}\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh}\cos kx \tag{12}$$

Будем пренебрегать произведениями вида $v_x \partial\delta\rho_\beta / \partial x$ и $v_y \partial\delta\rho_\beta / \partial y$. Тогда, используя (12), первое уравнение (5) можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho_\beta = \frac{da}{dt}\rho_0\beta e^{-\beta y}\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh}\cos kx$$

Отсюда, учитывая, что $a = 0$ при $t = 0$, найдем

$$\delta\rho_\beta = a\beta\rho_0 e^{-\beta y}\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh}\cos kx \tag{13}$$

В зависимости от $\cos kx$ величина $\delta\rho_\beta$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, в рамках линейной теории должно выполняться условие $\delta\rho_\beta \ll \rho$, которое приводится к виду $a\beta \ll 1$, после подстановки в исходное неравенство соответствующих выражений из (1) и (13).

Изменение потенциала внутри и вне рассматриваемой среды будет удовлетворять соответственно следующцмм уравнениям:

$$\frac{\partial^2\delta V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\delta V}{\partial y^2} = 4\pi G\beta\rho_0 a e^{-\beta y}\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh}\cos kx, \qquad \frac{\partial^2\delta U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\delta U}{\partial y^2} = 0 \tag{14}$$

Заметим, что

$$\delta\rho_\beta = \begin{cases} a\beta\rho_0 e^{-\beta y}\dfrac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh}\cos kx & \text{при } -Y \leqslant y \leqslant Y \\ 0 & \text{при } \quad Y > y > Y \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta\rho_\beta|\, dy = \int_{-Y}^{+Y} |\delta\rho_\beta|\, dy < \infty \qquad (Y = h + a\cos kx)$$

Поэтому частное решение уравнения (14) представим при помощи интеграла Фурье. Положим

$$\delta\rho_\beta = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta\rho_\beta(\tau)\cos\alpha(\tau - y)\,d\tau\right)\cos kx$$

$$\delta V = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta V(\tau)\cos\alpha(\tau - y)\,d\tau\right)\cos kx \tag{15}$$

Тогда, подставляя (15) в (14), получим следующую зависимость между компонентами Фурье:

$$\delta V(\tau) = -\frac{4\pi G}{k^2+\alpha^2}\delta\rho_\beta(\tau) \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует

$$\delta V(x, y) = R\int\limits_0^\infty \frac{d\alpha}{k^2+\alpha^2}\int\limits_{-Y}^{+Y}[e^{k_1\tau} - e^{k_2\tau}]\cos(\tau - y)\,d\tau \tag{17}$$

Здесь

$$R = -\frac{2G\rho_0 aB}{\operatorname{sh} kh}\cos x, \qquad k_1 = k - \beta, \qquad k_2 = -k - \beta$$

Ввиду симметрии задачи относительно плоскости $y = 0$, функцию $\delta\rho_\beta$ можно считать четной функцией, взяв в выражении (17) абсолютное значение переменной τ.

Следовательно,

$$\delta V(x, y) = 2R\int\limits_0^\infty \frac{d\alpha}{k^2+\alpha^2}\int\limits_0^{+Y}[e^{k_1\tau} - e^{k_2\tau}]\cos\alpha(\tau - y)\,d\tau$$

Интегрирование по τ с точностью до величины первого порядка относительно амплитуды дает

$$\delta V(x, y) = 2R\left(\int\limits_0^\infty\left[\frac{\alpha\cos\alpha y\sin\alpha h\,d\alpha}{(k^2+\alpha^2)(k_1^2+\alpha^2)} + \frac{k_1\cos\alpha y\cos\alpha h\,d\alpha}{(k^2+\alpha^2)(k_1^2+\alpha^2)}\right]e^{k_1h} -\right.$$

$$-\int\limits_0^\infty\frac{k_1\cos\alpha y\,dy}{(k^2+\alpha^2)(k_1^2+\alpha^2)} - \int\limits_0^\infty\left[\frac{\alpha\cos\alpha y\sin\alpha h\,d\alpha}{(k^2+\alpha^2)(k_2^2+\alpha^2)} + \frac{k_2^2\cos\alpha y\cos\alpha h\,d\alpha}{(k^2+\alpha^2)(k_2^2+\alpha^2)}\right]e^{k_2h} +$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty\frac{k_2\cos\alpha y\,d\alpha}{(k^2+\alpha^2)(k_2^2-\alpha^2)}\right)$$

Полученные здесь интегралы легко привести к виду интегралов Лапласа, после интегрирования которых получим частное решение уравнения (14) в виде

$$\delta V_1 = \frac{2\pi G\rho_0 a}{\operatorname{sh} kh}\left[\left(1 - \frac{\beta e^{-2kh}}{\beta+2k}\right)\frac{e^{-\beta h}}{k}\operatorname{ch} ky - \frac{2\beta e^{-ky}}{\beta^2 - 4k^2} + \frac{e^{(k-\beta)y}}{\beta - 2k} - \frac{e^{-(k+\beta)y}}{\beta+2k}\right]\cos kx$$

Очевидно, что общее решение уравнения (14), удовлетворяющее первому граничному условию (6), будет

$$\delta V = \delta V_1 + B\operatorname{ch} ky\cos kx$$

Решение для δU возьмем в виде

$$\delta U = B_1 e^{-k(y-h)} \cos kx$$

При помощи второго и третьего граничных условий (6) вычисляются значения неизвестных констант B и B_1.

В дальнейшем для вычисления изменения потенциальной энергии воспользуемся выражением потенциала внутри среды

$$V = \frac{4\pi G\rho_0}{\beta^2}\left(e^{-\beta y} + \beta y - 1\right) - \frac{4\pi G a\rho_0 e^{-\beta h}\operatorname{ch} kky}{k\,(1+\operatorname{th} kh)\operatorname{ch} kh}\cos kx +$$

$$+\frac{2\pi G a\rho_0}{\operatorname{sh} kh}\left[\frac{e^{-\beta h}}{k}\left(1-\frac{\beta e^{-2kh}}{\beta+2k}\right)\operatorname{ch} ky - \frac{2\beta e^{-ky}}{\beta^2-4k^2} + \frac{e^{(k-\beta)y}}{\beta-2k} - \frac{e^{-(k+\beta)y}}{\beta+2k}\right]\cos kx \qquad (18)$$

Изменение потенциальной энергии единицы длины можно вычислить по формуле [2]

$$\delta\Omega = \frac{1}{2\lambda}\int_0^{\lambda}[V]_{y=Y}\sigma\,dx \qquad \left(\begin{matrix}\sigma = a\rho_0 \exp\left[-\beta Y\right]\cos kx \\ Y = h + a\cos kx, \ \lambda = 2\pi / k\end{matrix}\right)$$

Подставляя сюда выражение (18) для V и интегрируя с точностью до величины второго порядка относительно амплитуды, найдем

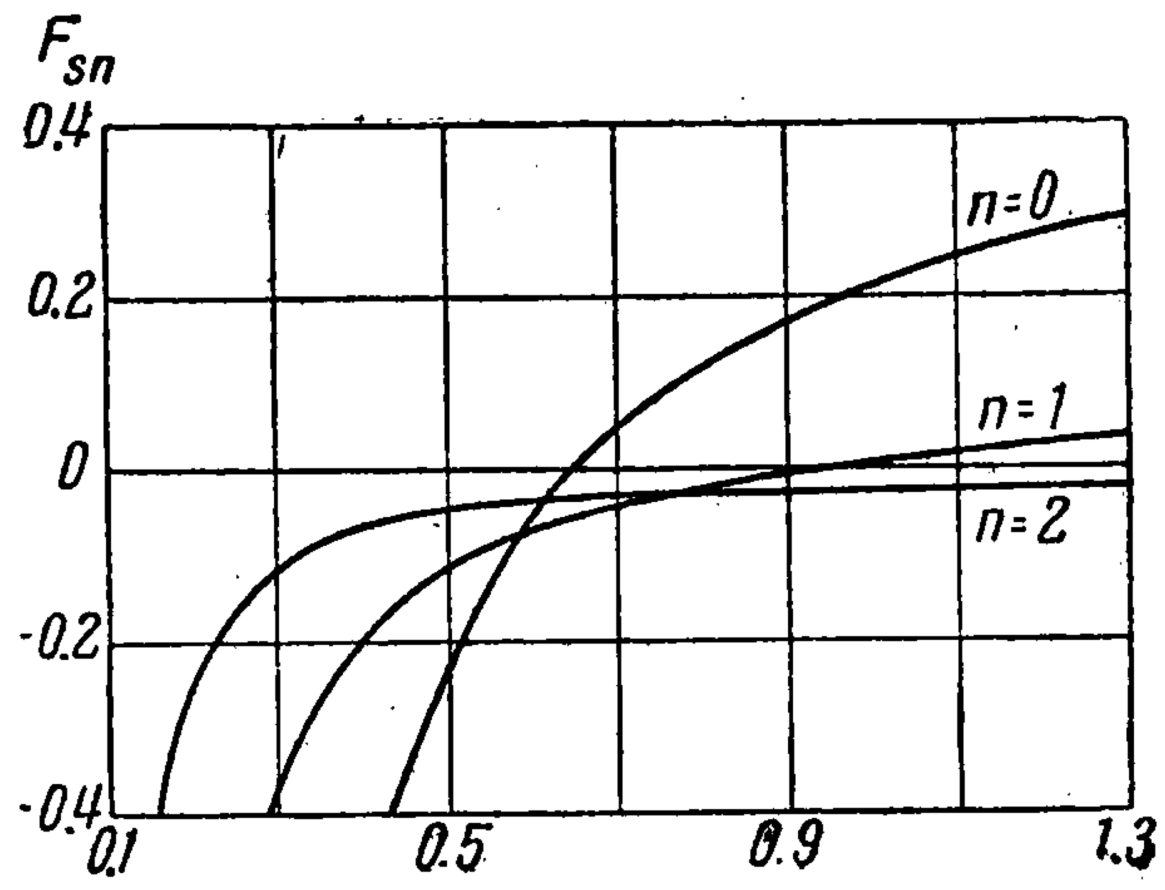
$$\delta\Omega = \pi G a^2 h {\rho_0}^2 e^{-2n}\left\{\frac{e^n(2-n)-2}{n} - \frac{1}{z\,(1+\operatorname{th} z)} + \right.$$

$$\left. + \frac{n+2z-ne^{-2z}}{2z\,(n+2t)\operatorname{th} z} + \frac{2z\operatorname{ch} + n\operatorname{sh} z - ne^{n-z}}{(n^2-4z^2)\operatorname{th} z}\right\} \qquad \left(\begin{matrix} z = kh \\ n = \beta h\end{matrix}\right) \qquad (19)$$

Далее, интегрируя первое уравнение (4) (в предположении бесконечной электропроводности среды), и имея в виду поле скоростей (12), получаем для напряженности магнитного поля

$$h_x = -kH_0 a\frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kh}\cos kx$$

$$h_y = -kH_0 a\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh}\sin kx$$



Фиг. 1

Следовательно, изменение магнитной энергии, проходящей единицы длины возмущенного слоя, будет:

$$\delta M = \frac{a^2 {H_0}^2 z \operatorname{ch} z}{16\pi h \operatorname{sh} z} \qquad (20)$$

Складывая (19) и (20), получим общее изменение энергии в виде

$$\delta E = \delta\Omega + \delta M = \pi G h {\rho_0}^2 a^2 F_{sn}(z) \qquad (21)$$

Здесь

$$F_{sn}(z) = e^{-2n}\left\{\frac{e^n(2-n)-2}{n} - \frac{1}{z\,(1+\operatorname{th} z)} + \frac{n+2z-ne^{-2z}}{2z\,(n+2z)\operatorname{th} z} + \right.$$

$$\left. + \frac{2z\operatorname{ch} z + n\operatorname{sh} z - ne^{n-z}}{(n^2-4z^2)\operatorname{sh} z} + \left(\frac{H_0}{H_s}\right)^2 z\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\right\} \qquad (H_s = 4\pi\rho_0 h\sqrt{G})$$

Таким образом, общее изменение энергии зависит от z, n, H_0. Существенно отметить, что изменение только гравитационной энергии резко зависит от n. На фиг. 1 приведена согласно (21) зависимость $F_{sn}(z) = \delta E / \pi G h {\rho_0}^2 a^2$ от z при разных n, когда магнитное поле $H_0 = 0$.

В том случае, когда магнитное поле отсутствует, при $n=0$ $(\rho=\rho_0)$ и при $n=1$ $(\rho=\rho_0 \exp[-y/h])$ функция $F_{sn}(z)$, следовательно и $\delta\Omega$, принимает как положительные, так и отрицательные значения. При определенном значении $z=z_*$ $(\lambda=\lambda_*=2\pi h/z_*)$ изменение гравитационной энергии становится равным нулю $(\delta\Omega=0)$. Это значение z_* отделяет область устойчивых гармоник от неустойчивых, так как $\delta\Omega<0$ при $\lambda<\lambda_*$ и $\delta\Omega>0$ при $\lambda>\lambda_*$.

Когда $n\geqslant 2$, то $\delta\Omega<0$ для всех z или λ. Следовательно, конфигурация типа плоского слоя, плотность которого изменяется по закону $\rho=\rho_0 \exp(-ny/h)$, где $n\geqslant 2$, крайне неустойчива и в природе не должна существовать.

Изменение магнитной энергии при всех λ положительно; поэтому наличие магнитного поля оказывает стабилизирующее воздействие. С увеличением напряженности магнитного поля уменьшается значение z, при котором изменение общей энергии равно нулю $(\delta E=0)$, и тем самым сокращается область неустойчивых гармоник. Крайне неустойчивое образование с $n\geqslant 2$ в присутствии магнитного поля в определенной области частот может оказаться устойчивым.

Таким образом, равновесное состояние рассматриваемой системы в зависимости от n, H_0, λ может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым. Однако может существовать такое магнитное поле, которое полностью устранит появление неустойчивых гармоник. Напряженность такого магнитного поля определяется из условия $\delta E=0$ и зависит от z и n

$$H_0^2 \geqslant H_s^2 \operatorname{th} z e^{-2n}\left\{\frac{1}{z(1+\operatorname{th} z)}-\frac{e^n(2-n)-2}{n}+\frac{n+2t-ne^{-2z}}{2z(n+2z)\operatorname{th} z}-\right.$$
$$\left.-\frac{2z\operatorname{ch} z+n\operatorname{sh} z-ne^{n-z}}{\operatorname{sh} z\,(n^2-4z^2)}\right\}$$

Как правило, неустойчивость неодинакова при всех длинах λ, принадлежащих области неустойчивых гармоник.

При определенном λ_m неустойчивость системы максимальна, и при этом амплитуда нарастает быстрее всего. Для нахождения максимально неустойчивой гармоники необходимо получить уравнение движения при помощи функции Лагранжа.

Кинетическая энергия равна

$$\delta T=\frac{1}{2\lambda}\int_0^\lambda\int_0^Y \rho\,(v_x^2+v_y^2)\,dx\,dy \qquad (Y=h+\cos kx)$$

Подставляя в эту формулу выражение v_x и v_y, согласно (12) после интегрирования получим

$$\delta T=\rho_0 h\dot{a}\,\frac{e^{-n}(2z\operatorname{sh}2z+n\operatorname{ch}2z)-n}{4(4z^2-n^2)\operatorname{sh}^2 z} \tag{22}$$

Составляя функцию Лагранжа при помощи (21), (22) и выводя уравнение движения, получим

$$\ddot{a}+4\pi G\rho_0\,\frac{\operatorname{sh}^2 z\,(4z^2-n^2)\,F_{sh}(z)}{e^{-n}[2z\operatorname{sh}2z+n\operatorname{ch}2z]-n}\,a=0$$

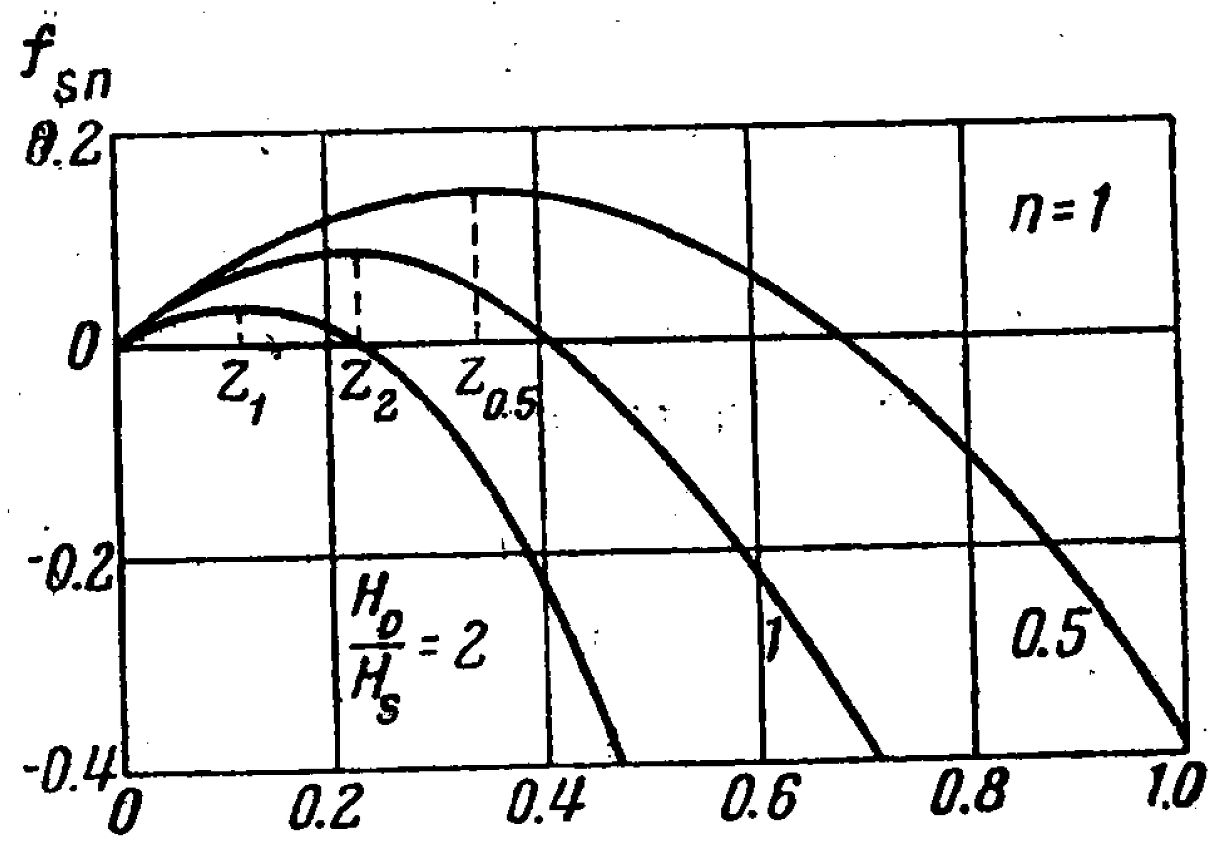
Решение этого уравнения есть

$$a = C \exp \{\pm P_{sn}(z)\, t\}$$

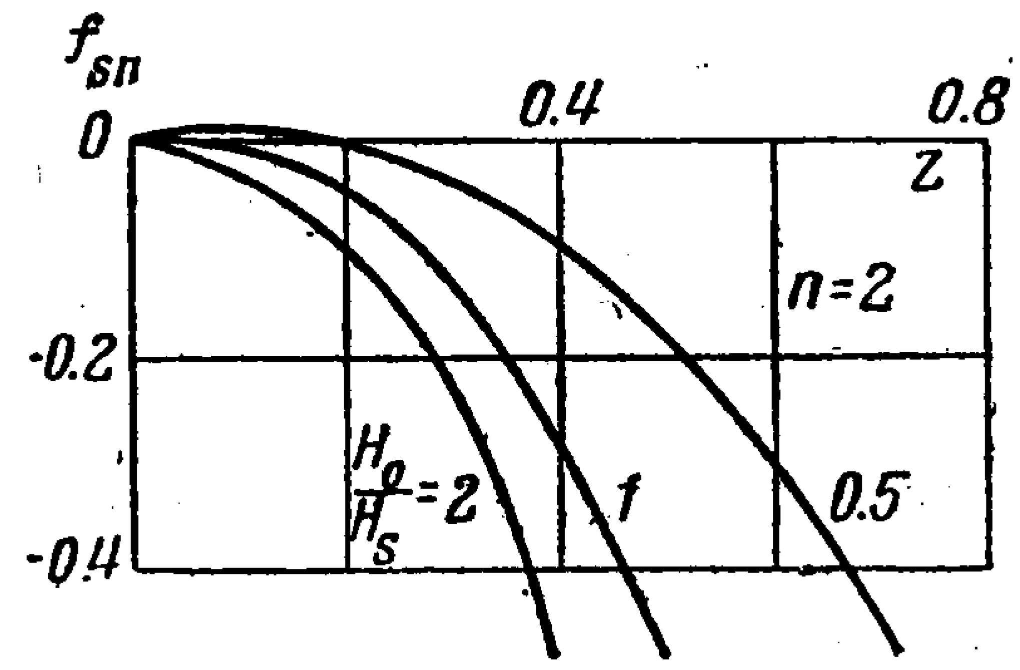
где

$$P_{sn}^2(z) = -4\pi G \rho_0 e^n \frac{\operatorname{sh}^2 z\,(4z^2 - h^2)\, F_{sn}(z)}{2z \operatorname{sh} 2z + n \operatorname{ch} 2z - ne^n} \qquad (c = \text{const})$$

Графики функции $f_{sn} = P_{sn}^2(z) / 4\pi G\rho_0$ в зависимости от z при некоторых конкретных значениях n и H_0 / H_s приведены на фиг. 2 и 3. При $P_{sn}^2(z) / 4\pi G\rho_0 < 0$ имеем устойчивое состояние, так как это приводит к периодическому изменению амплитуды со временем. В противном случае амплитуда экспоненциально возрастает и система распадается на отдельные части. Размер этих частей по направлению x — порядка $\lambda_m = 2\pi h / z_m$, где $z_m(z_{0.5}, z_1, z_2)$ — значение z, при котором $P_{sn}(z)$ имеет максимальное значение, и амплитуда нарастает быстрее всего [4,2].



Фиг. 2



Фиг. 3

Под величиной $\tau^* = P_{sn}^{-1}(z_m)$ обычно подразумевается время релаксации, необходимое для проявления неустойчивого состояния.

Результаты данной работы являются более общими. Из них при $\beta \to 0$ можно получить результаты, опубликованные в работах [2,3], относящиеся к вопросам устойчивости плоского слоя с постоянной плотностью.

Авторы благодарят А. Власова за обсуждение полученных результатов.

Поступила 24 X 1961

Ереванский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Х а й д Р. Волны в тяжелой, вязкой, несжимаемой жидкости, проводящей электричество при наличии магнитного поля, ПСФ, № 7, 1957.
2. О г а н е с я н Р. С. О гравитационной неустойчивости плоско-параллельного слоя проводящей жидкости. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. наук, 1958, т. II, № 4, стр. 39.
3. О г а н е с я н Р. С. О гравитационной неустойчивости слоя с внутренним магнитным полем, направленным вдоль слоя. Изв. АН АрмССР, сер. физ-матем. наук, 1959, т. XXII, № 3, стр. 41.
4. Ч а н д р а с е к а р С., Ф е р м и Е. Проблемы гравитационной устойчивости при наличии магнитного поля. 1954, ПСФ, № 2, стр. 108.