Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

Излагается метод подсчета характеристических показателей для систем линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием по времени и с периодическими коэффициентами, близкими к постоянным. Формулируется критерий устойчивости невозмущенного движения для указанных систем.

§ 1. Постановка задачи. Будем исследовать на устойчивость движение $x = 0$ квазигармонической системы с запаздыванием вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = (a + \mu g(t, \mu))\, x(t) + (b + \mu h(t, \mu))\, x(t - \tau) \qquad (1.1)$$

Здесь $x(t)$ — n-мерный вектор; $a = \| a_{sk} \|$, $b = \| b_{sk} \|$ — n-мерные квадратные постоянные матрицы; $g(t, \mu) = \| g_{sk}(t, \mu) \|$, $h(t, \mu) = \| h_{sk}(t, \mu) \|$ — n-мерные квадратные матрицы, элементы которых являются аналитическими функциями параметра μ в области $|\mu| \leqslant \mu^*$ (μ^* — положительное число) и непрерывными функциями времени t с периодом 2π; τ — постоянное время запаздывания.

К задаче такого рода приводится вопрос исследования на устойчивость по первому приближению периодических колебаний квазилинейных систем с запаздыванием.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv | a + be^{-\lambda\tau} - E\lambda | = 0 \qquad (1.2)$$

где E — единичная матрица.

При достаточно малом $|\mu|$ независимо от вида коэффициентов g и h для системы (1.1) имеют место следующие предложения. Если все корни характеристического уравнения (1.2) имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) будет асимптотически устойчиво и всякое решение (1.1) будет убывать по экспоненте [1,2]. Если среди корней уравнения (1.2) найдется по крайней мере один с положительной вещественной частью, то $x = 0$ неустойчиво [3].

В том случае, когда среди корней уравнения (1.2) имеется несколько с нулевыми вещественными частями (остальные имеют отрицательные вещественные части), на устойчивость движения будут существенно влиять функции $g(t, \mu)$ и $h(t, \mu)$.

В предлагаемой статье дается способ решения вопроса об устойчивости движения $x = 0$ системы (1.1) в указанном случае.

Оказывается, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, для каждого корня λ_1 уравнения

(1.2) всегда можно построить частное решение системы (1.1) вида

$$x_s(t) = e^{\alpha t} u_s(t) \qquad (\alpha(0) = \lambda_1) \tag{1.3}$$

где $\alpha(\mu)$ — постоянная относительно t, а $u_s(t, \mu)$ — периодические функции t периода 2π. Постоянную $\alpha(\mu)$ будем называть характеристическим показателем.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений система (1.1) имеет счетное число характеристических показателей: столько же, сколько корней имеет характеристическое уравнение (1.2). Однако, так же как и в случае обыкновенных уравнений с периодическими коэффициентами, близкими к постоянным, для выяснения вопроса устойчивости или неустойчивости движения $x = 0$ системы (1.1) нет нужды подсчитывать все характеристические показатели. Достаточно подсчитать лишь те, которые соответствуют корням уравнениям (1.2) с нулевыми вещественными частями. А именно, допустим, что подсчитаны все характеристические показатели, которые соответствуют чисто мнимым корням уравнения (1.2), и пусть они оказались с отрицательными вещественными частями. Тогда движение $x = 0$ системы (1.1) при достаточно малом $|\mu|$ будет асимптотически устойчиво и всякое решение системы (1.1) будет убывать по экспоненте. Если среди подсчитанных характеристических показателей будет по крайней мере один с положительной вещественной частью, то движение $x = 0$ будет неустойчиво, так как среди решений системы (1.1) найдется одно частное решение вида (1.3), возрастающее по экспоненте.

Обоснованию этого последнего положения и вопросу подсчета характеристических показателей и посвящена статья.

Ниже приводится способ подсчета характеристических показателей и частных решений вида (1.3) для системы (1.1). Этот способ является обобщением для системы (1.1) известного метода посчета характеристических показателей для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, близкими к постоянным [5,6,7].

§ 2. Способ подсчета характеристических показателей. Возьмем произвольный корень λ_1 уравнения (1.2). Корень λ_1 простой по модулю $i = \sqrt{-1}$, если все разности $\lambda_1 - \lambda_j$ ($j = 2, 3, \ldots$) отличны от нуля и чисел вида $\pm Ni$, N — целое положительное число. Кратко это обстоятельство обозначим следующим образом: $\lambda_1 \not\equiv \lambda_j \pmod{i}$ ($j = 2, 3, \ldots$).

Корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ равны между собой по модулю i и отличны по модулю i от остальных корней $\lambda_{m+1}, \ldots$ характеристического уравнения (1.2), если $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \ldots \equiv \lambda_m$, $\lambda_k \not\equiv \lambda_j \pmod{i}$ при $k \leqslant m, j \geqslant m + 1$, где k, j — целые числа.

При подсчете характеристического показателя $\alpha_1(\mu)$, соответствующего корню λ_1, могут представиться два случая в зависимости от того, будет ли λ_1 простым по модулю i корнем или кратным по модулю i корнем некоторой кратности m (для систем с запаздыванием m — конечно).

Допустим, что λ_1 простой по модулю i корень характеристического уравнения (1.2). Соответствующий характеристический показатель $\alpha_1(\mu)$ будет аналитической функцией параметра μ в некоторой достаточно малой окрестности точки $\mu = 0$. Для подсчета характеристического показателя $\alpha_1(\mu)$ будем искать частное решение в виде (1.3), где

$$\alpha_1(\mu) = \lambda_1 + \mu a_1 + \mu^2 a_2 + \ldots, \qquad v_s(t, \mu) = u_s^0(t) + \mu u_s^{(1)}(t) + \ldots \tag{2.1}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — неизвестные постоянные, $u_s^{(0)}, u_s^{(1)}, \ldots$ — неизвестные периодические коэффициенты. Подставив (1.3) в уравнения (1.1) и учитывая (2.1), получим уравнения

$$\frac{du^{(0)}}{dt} = au^{(0)}(t) + bu^{(0)}(t-\tau)\, e^{-\lambda_1\tau} - \lambda_1 u^{(0)}(t) \tag{2.2}$$

$$\frac{du^{(1)}(t)}{dt} = au^{(1)}(t) + bu^{(1)}(t-\tau)\, e^{-\lambda_1\tau} - \lambda_1 u^{(1)}(t) + g(t, 0)\, u^{(0)}(t) +$$
$$+ h(t, 0)\, e^{-\lambda_1\tau} u^{(0)}(t-\tau) - \alpha_1 u^{(0)}(t) - bu^{(0)}(t-\tau)\, e^{-\lambda_1\tau}\tau\alpha_1 \tag{2.3}$$

Рассмотрим систему уравнений (2.2). Так как характеристическое уравнение этой системы имеет один корень, равный нулю, а остальные корни $\lambda_j - \lambda_1$ ($j = 2, 3, \ldots$) отличны от нуля и чисел вида $\pm Ni$, $N = 1, 2, 3, \ldots$, то единственным периодическим решением периода 2π будет постоянный вектор $x = \varphi_1 = \{\varphi_{s1}\} = \mathrm{const}$. Обозначим через $\Delta_{kj}(\lambda_1)$ алгебраическое дополнение к элементу определителя $\Delta(\lambda_1)$ (1.2), стоящему в пересечении k-строки и j-колонки. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Delta_{11}(\lambda_1)$ отлично от нуля. Тогда положим

$$\varphi_1 = \{c\Delta_{11}(\lambda_1), \ldots, c\Delta_{1n}(\lambda_1)\} \tag{2.4}$$

где c — произвольная постоянная.

Рассмотрим далее систему, сопряженную (2.2)

$$\frac{dy(t)}{dt} = -a'y(t) - b'e^{-\lambda_1\tau} y(t+\tau) + \lambda_1 y(t) \tag{2.5}$$

Здесь a', b' — транспонированные матрицы для матриц a и b. Характеристическое уравнение системы (2.5)

$$D(\lambda) \equiv |-a' - b'e^{-\lambda_1\tau + \lambda\tau} - E(\lambda - \lambda_1)| = 0 \tag{2.6}$$

имеет один нулевой корень, а остальные ее корни — $\lambda_j + \lambda_1$ ($j = 2, 3, \ldots$) не равны по модулю i нулю. Единственное периодическое решение системы (2.5) будет

$$\psi_1 = \{\Delta_{11}(\lambda_1), \ldots, \Delta_{n1}(\lambda_1)\} \quad \Delta_{11}(\lambda_1) \neq 0 \tag{2.7}$$

Подставим $u^{(0)} = \varphi_1$ в систему (2.3) и будем искать периодическое ее решение $u^{(1)}(t)$ периода 2π. Чтобы такое решение существовало, должно выполняться условие

$$-\alpha_1 \int_0^{2\pi} (\varphi_1 c + bc\varphi_1(t-\tau)\, e^{-\lambda_1\tau}\tau)\, \varphi_1\, dt +$$
$$+ \int_0^{2\pi} [g(t, 0)\, c\varphi_1 + h(t, 0)\, c\varphi_1 e^{-\lambda_1\tau}]\, \varphi_1(t)\, dt = 0 \tag{2.8}$$

Нетрудно показать, что

$$\int_0^{2\pi} (\varphi_1 + b\varphi_1 e^{-\lambda_1\tau}\tau)\, \psi_1\, dt = -2\pi c \Delta_{11}(\lambda_1) \left.\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_1} \neq 0 \tag{2.9}$$

Поэтому в уравнении (2.8) коэффициент при α_1 отличен от нуля. Учитывая (2.9), находим

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{c\Delta_{11}(\lambda_1)\, \Delta'(\lambda_1)} \int_0^{2\pi} [g(t, 0)\, \varphi_1 + h(t, 0)\, \varphi_1]\, \psi_1 dt \tag{2.10}$$

Методом неопределенных коэффициентов найдем периодическое решение $u^{(1)}(t)$ системы (2.3) в виде

$$u^{(1)}(t) = c_1\varphi_1 + U^{(1)}(t)\, c \tag{2.11}$$

Периодический вектор будет вполне определен, если потребовать, чтобы было выполнено условие $v_1^{(1)}(0) = 0$. Все следующие неизвестные коэффициенты $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, u^{(2)}, u^{(3)}, \ldots$ находим в том же порядке, что и α_1, $u^{(1)}$. Все $u^{(k)}$ будут вполне определены, если добавить условие $u_1^{(k)}(0) = 0$ $(\Delta_{11}(0) \neq 0)$.

При таком дополнительном условии на начальные значения функций $u_1^{(k)}(0)$ ряды $u_s(t, \mu)$ будут сходиться при $|\mu|$ достаточно малом, ряд для характеристического показателя всегда сходится при достаточно малом $|\mu|$.

Рассмотрим теперь случай кратного по модулю i корня λ_1 уравнения (1.2). Будем искать снова решение системы (1.1) в виде (1.3), где $\alpha_1(\mu)$ и $u(t, \mu)$ представлены в виде рядов с неизвестными коэффициентами (2.1). Подставив (1.3) в систему (1.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим уравнения (2.2), (2.3), ...

Рассмотрим систему уравнений (2.2). Характеристическое уравнение этой системы имеет m корней, по модулю i равных нулю. Допустим, что им будет соответствовать m периодических решений φ_j $(j = 1, \ldots, m)$ периода 2π. Тогда и сопряженная система (2.5) будет допускать m периодических решений φ_j $(j = 1, \ldots m)$ периода 2π.

Положим

$$U^{(0)} = M_1^{(0)}\varphi_1(t) + \ldots + M_m^{(0)}\varphi_m(t) \tag{2.12}$$

где $M_1^{(0)}, \ldots, M_m^{(0)}$ — произвольные постоянные.

Подставив $u^{(0)}$ в уравнения (2.3), получим уравнения для определения периодической вектор-функции $v^{(1)}$ периода 2π. Чтобы последняя система допускала периодическое решение периода 2π, должны быть выполнены m условий

$$\begin{gathered}
-\alpha_1\int_0^{2\pi}[M_1\varphi_1 + \ldots + M_m\varphi_m + b\,(M_1\varphi_1(t-\tau) + \ldots \\
\ldots + M_m\varphi_m(t-\tau)\, e^{-\lambda_1\tau}]\,\psi_j dt + \\
+\int_0^{2\pi}[g(t, 0)\,(M_1^{(0)}\varphi_1(t) + \ldots + M_m^{(0)}\varphi_m(t)) + \\
+ h(t, 0)\,(M_1^{(0)}\varphi_1(t-\tau) + \ldots + M_m^{(0)}\varphi_m(t-\tau))\, e^{-\lambda_1\tau}]\,\varphi_j(t)\, dt
\end{gathered}$$

или (2,13)

$$-\alpha_1(d_{j1}M_1^{(0)} + \ldots + d_{jm}M_m^{(0)}) + Q_{1j}M_1^{(0)} + \ldots + Q_{mj}M_m^{(0)} = 0$$

Чтобы система (2.13) допускала нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю

$$|-\alpha_1 d_{jk} + Q_{kj}| = 0 \tag{2.14}$$

Покажем, прежде всего, что (2.14) является уравнением степени m по α_1, так как $|d_{jk}| \neq 0$.

В самом деле, допустим, что $|d_{jk}| = 0$. Тогда найдутся постоянные $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ такие, что

$$\Lambda_1 d_{j1} + \ldots + \Lambda_m d_{jm} = 0 \qquad (j = 1 \ldots, m)$$

Но тогда система (2.1) будет допускать решение с вековым членом $(\Lambda_1\varphi_1 + \ldots + \Lambda_m\varphi_m)\, t + \varphi(t)$. Последнее исключено по предположению, так как m корням, по модулю равным i, соответствует m независимых периодических решений (2.1); в частности, если корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ равны по модулю i, но сами различны, то

$$d_{jj} = -2\pi\Delta_{11}(\lambda_j)\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_j}, \qquad \Delta_{11}(\lambda_j) \neq 0$$

Таким образом, уравнение (2.14) имеет степень m и допускает m корней $\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(m)}$. В том случае, когда $\alpha_1^{(k)}$ различны, им будет соответствовать m характеристических показателей

$$\lambda_j + \mu\alpha_1^{(j)} + \mu^2(\ldots) + \ldots \tag{2.15}$$

В том случае, когда среди корней $\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(m)}$ будут кратные, величины $\lambda_j + \alpha_1^{(j)}\mu$ $(j = 1, \ldots, m)$ представляют собой первые приближения характеристических показателей, соответствующих m корням $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, равным по модулю i.

Остановимся подробнее на подсчете характеристических показателей, соответствующих простым корням α_1 уравнения (2.14). Обозначим через $D_{kj}(\alpha_1)$ алгебраическое дополнение к элементу определителя (2.14), расположенному в пересечении k-строки и j-колонки. Так как

$$\frac{dD(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_1} \neq 0, \qquad \text{при } \alpha = \alpha_1$$

то, не ограничивая общности, можем считать, что

$$D_{mm}(\alpha_1) \neq 0$$

Разрешая систему (2.12) относительно $M_j^{(0)}$, находим

$$M_j^{(0)} = \frac{D_{mj}(\alpha_1)}{D_{mm}(\alpha_1)}\, c \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

где c — произвольная постоянная.

Так как при этом будут выполнены условия существования периодического решения для системы (2.3), то периодическое решение периода 2π существует и его можно найти используя метод неопределенных коэффициентов

$$u^{(1)} = M_1^{(1)}\varphi_1(t) + \ldots + M_m^{(1)}\varphi_m(t) + c\Phi^{(1)}(t) \tag{2.16}$$

где $\Phi(t) = \{\Phi_s(t)\}$ — периодические функции, $M_1^{(j)}$ — произвольные постоянные. Подставив $u^{(1)}(t)$ в уравнения относительно $u^{(2)}$, получим условия существования периодического решения в виде

$$-\alpha_2(d_{j1}M_1^{(0)} + \ldots + d_{jm}M_m^{(0)}) + Q_{1j}M_1^{(1)} + \ldots + Q_{mj}M_m^{(1)} - \tag{2.17}$$

$$-\alpha_1(d_{j1}M_1^{(1)} + \ldots + d_{jm}M_m^{(1)}) + cA_j^{(1)} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Здесь $A_j^{(1)}$ — определенные постоянные; Q_{ij} определены в (2.13).

Система (2.17) представляет собой m уравнений относительно $m + 1$ неизвестных. Запишем определитель системы (2.17) по неизвестным $M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}, \alpha_2$

$$\begin{vmatrix} Q_{11} - d_{11}\alpha & \ldots & Q_{1m-1} - d_{1m-1}\alpha, & d_{11}M_1^{(0)} + \ldots + d_{1m}M_1^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{m1} - d_{m1}\alpha & \ldots & Q_{mm-1} - d_{mm-1}\alpha, & d_{m1}M_1^{(0)} + \ldots + d_{mm}M_m^{(0)} \end{vmatrix} = cD'(\alpha_1) \neq 0$$

Поэтому систему (2.17) можно разрешить относительно $M_1^{(1)}, \ldots M_{m-1}^{(1)}$ α_2, выразив их через параметр c и постоянную $M_m^{(1)}$. При этом оказывается, что α_2 не зависит от $M_m^{(1)}$, c и определяется формулой

$$\alpha_2 = \frac{1}{D'(\alpha_1)} \begin{vmatrix} Q_{11} - \alpha_1 d_{11} & \ldots & Q_{1m-1} - \alpha_1 d_{1m-1} & A_m^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{m1} - \alpha_1 d_{m1} & \ldots & Q_{mm-1} - \alpha_1 d_{mm-1} & A_m^{(1)} \end{vmatrix} \tag{2.18}$$

Аналогично тому, как находится $u^{(1)}$, найдем $u^{(2)}, u^{(3)}, \ldots$ При этом постоянные $M_1^{(k)}, \ldots, M_{m-1}^{(k)}, \alpha_{k+1}$ удовлетворяют системе, которая отличается лишь свободными членами от системы (2.17). Далее в § 3 будет показана аналитичность характеристического показателя $\alpha_1(\mu)$ в окрестности точки $\mu = 0$ для всякого простого корня α_1 уравнения (2.14). Поэтому из единственности разложения в ряд для $\alpha(\mu) = \lambda_1 + \mu\alpha_1 + \ldots$ следует, что ряд для характеристического показателя сходится при достаточно малом $|\mu|$ и представляет искомый характеристический показатель.

Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что, например,

$$\sum_{j=1}^{m} M_j^{(0)} \varphi_{ej}(0) \neq 0 \quad \text{при } s = l$$

Тогда произвольность в выборе постоянных $M_m^{(k)}$ будет устранена, если потребовать, чтобы выполнялось следующее условие в начальный момент времени $u_e(0, \mu) = 1$.

Последнее имеет место, если выполняются условия

$$u_e^{(0)}(0) = 1, \qquad u_e^{(j)}(0) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

Первое условие выполняется, если положить

$$c = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{D_{mj}(\alpha_1)}{D_{mm}(\alpha_1)} \varphi_{ej}^{(0)} \right)^{-1}$$

Следующие условия выполняются, если подобрать соответствующим образом постоянные $M_m^{(k)}$, используя условие $u_e^{(j)}(0) = 0$.

При таком выборе постоянных c, $M_m^{(1)}$, $M_m^{(2)}, \ldots$ ряды для частного решения (1.3), соответствующего корням λ_1 и α_1, будут сходиться при достаточно малом $|\mu|$.

§ 3. О построении частных решений вида (1.3) в общем случае. Будем искать частное решение системы (1.1) в виде (1.3). Для этого сделаем замену переменного вектора x в системе (1.1) на вектор u по формуле

$$x = e^{(\lambda_1 + \alpha)} u \tag{3.1}$$

Система (1.1) в новых переменных u имеет вид

$$\frac{du(t)}{dt} = au(t) + bu(t-\tau)e^{-\lambda_1\tau} - \lambda_1 u(t) + \mu g(t,\mu)u(t) +$$
$$+ \mu h(t,\mu)u(t-\tau)e^{-\lambda_1\tau} + e^{-\lambda_1\tau}bu(t-\tau)(e^{-\alpha\tau}-1) +$$
$$+ \mu h(t,\mu)u(t-\tau)e^{-\lambda_1\tau}(e^{-\alpha\tau}-1) - \alpha u(t) \qquad (3.2)$$

где α — неопределенная постоянная.

Вместо того чтобы искать частное решение (1.3) для системы (1.1), будем искать периодическое решение периода 2π системы (3.2). При этом α найдется из условия существования периодического решения системы (3.2), которое при $\mu = 0$ и $\alpha = 0$ обращается в периодическое решение (2.12) системы (2.2).

Рассмотрим систему интегродифференциальных уравнений

$$\frac{du(t)}{dt} = au(t) + bu(t-\tau)e^{-\lambda_1\tau} - \lambda_1 u(t) + g(t,\mu)\mu u(t) + \qquad (3.3)$$
$$+ \mu h(t,\mu)u(t-\tau)e^{-\lambda_1\tau} + be^{-\lambda_1\tau}u(t-\tau)(e^{-\alpha\tau}-1) +$$
$$+ \mu h(t,\mu)u(t-\tau)e^{-\lambda_1\tau}(e^{-\alpha\tau}-1) + \sum_{j=1}^{m}(\varphi_j(t) + be^{-\lambda_j\tau}\tau\varphi_j(t-\tau))W_j$$

$$\int_0^{2\pi}[\mu g(t,\mu)u(t) + \mu h(t,\mu)u(t-\tau)e^{-\lambda_1\tau} + bu(t-\tau)e^{-\lambda_1\tau}(e^{-\alpha\tau}-1) -$$
$$-\alpha u(t) + \mu h(t,\mu)u(t-\tau)e^{-\lambda_1\tau}(e^{-\alpha\tau}-1)]\,\psi_j(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m}d_{jk}W_k = 0$$
$$(3.4)$$

При рассмотрении последней системы делаются такие же предположения о корне λ_1, что и во втором случае, рассмотренном во втором параграфе. Обозначения для $\psi_j(t)$, d_{jk} даны во втором параграфе. Постоянные W_j определяются из уравнений (3.4). Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Система интегродифференциальных уравнений (3.3), (3.4) допускает периодическое решение периода 2π, зависящее от произвольных постоянных $M_1,\ldots, M_m$ и параметров μ, α в окрестности точки $\mu = \alpha = 0$, которое при $\mu = \alpha = 0$ обращается в периодическое решение (2.12) системы (2.2). Это решение будет линейным и однородным относительно произвольных постоянных $M_1,\ldots, M_m$, с коэффициентами аналитическими относительно α и μ в окрестности точки $\mu = \alpha = 0$.

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений. Допустим, что найдено периодическое решение вспомогательной системы. Оно имеет вид

$$x^*(t, M,\ldots, M_m, \mu, a) = v_1(t,\mu,a)M_1 + \ldots + v_m(t,\mu,a)M_m \quad (3.5)$$

где $v_1,\ldots, v_m$ — аналитические относительно μ, a. Постоянные W_j^* при этом находятся однозначно из уравнений (3.4).

Рассмотрим систему уравнений

$$W_j^*(M_1,\ldots, M_m, \mu, a) \equiv P_{j1}(\mu,a)M_1 + \ldots + P_{jm}(\mu,a)M_m = 0$$
$$(j = 1,\ldots, m) \qquad (3.6)$$

Лемма 2. Для того чтобы система (3.2) допускала периодическое решение периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (3.6) имела нетривиальное решение относительно $M_1, \ldots, M_m$.

Доказательство. Если $M_1^*, \ldots, M_m^*$ удовлетворяют системе уравнений (3.6), то при подстановке их в (3.5) получим периодическое решение системы (3.2). Отсюда вытекает достаточность условия леммы. Для доказательства необходимости леммы заметим, что всякое периодическое решение периода 2π вспомогательной системы содержится в формуле (3.5). Допустим, что система (3.2) имеет периодическое решение $\varphi(t, \mu, \alpha)$ периода 2π при некоторых фиксированных значениях α и μ. Так как это решение вместе с тем будет периодическим решением вспомогательной системы интегродифференциальных уравнений (3.3) и (3.4), то найдутся постоянные $M_1, \ldots, M_m \mid \alpha, \mu$ такие, что при подстановке их в (3.5) имеют место тождества

$$\varphi(t, \mu, \alpha) \equiv v_1(t, \mu, \alpha) M_1(\mu, \alpha) + \ldots + v_m(t, \mu, \alpha) M_m(\mu, \alpha)$$

и поэтому $M_1(\mu, \alpha), \ldots, M_m(\mu, \alpha)$ удовлетворяют системе уравнений (3.6).

Для того чтобы система уравнений (3.6) допускала нетривиальное решение, определитель ее должен быть равен нулю:

$$| P_{ij}(\mu, \alpha) | = 0 \tag{3.7}$$

Последнее уравнение в окрестности точки $\mu = 0$ допускает m решений $\alpha_1(\mu), \ldots, \alpha_m(\mu)$, удовлетворяющих условиям $\alpha_j(0) = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Добавив к $\alpha_j(\mu)$ $(j = 1, \ldots, m)$ корень λ_1, получим m характеристических показателей, соответствующих корням $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, равным по модулю i между собой. Заметим, что характеристические показатели системы (1.1) определяются с точностью до постоянного слагаемого $\pm Ni$ (N — целое число или нуль).

Проделав необходимые выкладки, найдем, что

$$| P_{kj}(\mu, \alpha\mu) | \equiv \mu^m | Q_{kj} - d_{kj} a | + \mu^{m+1} \Phi^*(\mu, \mu a) = 0 \qquad (\alpha = \mu a) \tag{3.8}$$

Здесь $\Phi^*(\mu, \mu)$ — аналитическая функция аргументов μ и a в окрестности точки $\mu = 0$. Отсюда в силу теоремы о неявных функциях следует, что всякому простому корню уравнения (2.14) соответствует аналитический в окрестности точки $\mu = 0$ характеристический показатель. Из вида (3.8) также следует, что величины $\lambda_j + \mu\alpha_j^{(1)}$ $(j = 1, \ldots, m)$ будут приближенными выражениями для искомых характеристических показателей. Если подсчитано уравнение (3.7), то задача отыскания характеристических показателей, соответствующих корню λ_1, сводится к разрешению уравнения (3.7) в окрестности точки $\mu = \alpha = 0$.

§ 4. Об устойчивости невозмущенного движения $x = 0$ системы (1.1). Допустим, что среди корней характеристического уравнения (1.2) имеется m с вещественными частями, равными нулю, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Подсчитаем соответствующие им характеристические показатели изложенным способом. Если среди характеристических показателей найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то имеет место неустойчивость движения, так как система (1.1) допускает частное решение вида (1.3), растущее по экспоненте. Если все m характеристических показателей имеют отрицательные вещественные части, то имеет место асимптотическая устойчивость движения $x = 0$ системы (1.1), так как всякое решение системы (1.1) будет убывать по экспоненте, показатель которой будет равен наибольшей вещественной части характеристических показателей. Обоснованию последнего предложения посвящен настоящий параграф.

Пусть $x(t)$ — решение системы (1.1). В качестве элемента решения будем рассматривать отрезки траекторий системы (1.1) на интервале $[t,\ t-\tau]$. В функиональном пространстве непрерывных функций движение системы (1.1) определяют вектор-функции времени $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$. В функциональном пространстве $x(\vartheta)$ линейной системе (1.1) соответствует линейная система «обыкновенных» дифференциальных уравнений с операторной правой частью [1]

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta) + \mu R(x_t(\vartheta)) \tag{4.1}$$

где

$$Ax(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx(\vartheta)}{d\theta} & (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ ax(0) + bx(-\tau) & (\vartheta = 0) \end{cases} \tag{4.2}$$

$$R(x, (\vartheta)) = \begin{cases} 0 & (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ g(t, \mu)\, x(0) + h(t, \mu)\, x(-\tau) & (\vartheta = 0) \end{cases} \tag{4.3}$$

Допустим, что каждому из m корней уравнения (1.2) с нулевой вещественной частью соответствует периодическое решение $\varphi_j(t)$ периода $2\pi/\omega_j$, где $\omega_j i = \lambda_j$ $(j = 1, \ldots m)$.

Рассмотрим сопряженную систему

$$\frac{dy_t(\vartheta)}{dt} = A^* y_t(\vartheta) \tag{4.4}$$

где

$$A^* y(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dy(\vartheta)}{d\vartheta} & (0 < \vartheta \leqslant \tau) \\ -a^*y(0) - b^*y(\tau) & (\vartheta = 0) \end{cases} \tag{4.5}$$

a^*, b^* — матрицы, транспонированные для a и b. Система (4.4) будет также иметь m периодических решений $\psi_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Для любых двух решений $x_t(\vartheta)$ системы (4.1) при $y_t(\vartheta)$ системы (4.4) имеет место условие

$$(x_t(\vartheta)\, y_t(\vartheta)) \equiv \sum_{j=1}^{n} x_{jt}(0)\, y_{jt}(0) - \sum_{j=1,\, l=1}^{n} \times \int_0^{-\tau} x_{et}(\xi)\, y_{jt}(\tau+\xi)\, b_{je}\, d\xi = \text{const} \tag{4.6}$$

Пусть $d_{ij} = (\varphi_i(t+\vartheta)\, \psi_j(t+\vartheta))$. При сделанных предположениях о корнях λ_j $(j = 1, \ldots, m)$ характеристического уравнения (1.2) $|d_{ij}| \neq 0$.

Пространство $x(\vartheta)$ расщепляем на m-мерное подпространство l: $\{y_j\}$ и подпространство L — функциональное с индексом m, полагая

$$\begin{gathered} x(\vartheta) = z(\vartheta) + \varphi_1(t+\vartheta_1)\, y + \ldots + \varphi_m(t+\vartheta)\, y_m \\ (z(\vartheta)\, \psi_j(t+\vartheta)) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{4.7}$$

При этом переменные $y_1, \ldots, y_m$ однозначно определяются из системы уравнений

$$(x(\vartheta)\, \psi_j(t+\vartheta)) = d_{j1} y_1 + \ldots + d_{jm} y_m \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{4.8}$$

Так как l и L не имеют общих элементов, за исключением точки $x(\vartheta) = 0$, то (4.7), (4.8) обеспечивают единственность представления (4.7).

В переменных $y_1, \ldots, y_m, z(\vartheta)$ система уравнений (4.1) имеет вид

$$\frac{dy_k}{dt} = \mu \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} (R(x_j(\vartheta)), \psi_i(t+\vartheta)) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.9}$$

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = Az_t(\vartheta) + \mu R(x_t(\vartheta)) - \mu \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t+\vartheta) \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} (R, \psi_j(t+\vartheta)) \tag{4.10}$$

где $\Delta = |d_{kj}|$; Δ_{kj} — алгебраическое дополнение элемента d_{kj}, расположенного в пересечении k-строки и j-колонки; в правых частях (4.9) и (4.10) $x_t(\vartheta)$ следует полагать определенными формулами (4.7).

Допустим теперь, что корням $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ уравнения (1.2) соответствуют различные характеристические показатели $\alpha_j(\mu)$ и частные решения системы (1.1) вида (1.3) ($j = 1, \ldots, m$). Тогда система (4.9), (4.10) допускает m частных независимых решений

$$y_j^{(e)}(t) = e^{\alpha_e(\mu)t} v_j^{(e)}(t, \mu), \qquad Z_t^{(e)}(\vartheta) = e^{\alpha_e(\mu)(t+\vartheta)} w_t^{(e)}(\vartheta, \mu)$$

$$(e = 1, \ldots, m) \ (j = 1, \ldots, m) \tag{4.11}$$

Рассмотрим теперь произвольное частное решение системы (1.1) или (4.1). Ему соответствует частное решение системы (4.9), (4.10); $\{y_j(t), z_t(\vartheta)\}$. Функции $y_j(t)$ могут быть представлены в виде линейной комбинации m функций $y_j^{(e)}(t)$, входящих в m частных решений (4.11)

$$y_j(t) = c_1 y_j^{(1)}(t) + \ldots + c_m y_j^{(m)}(t) \tag{4.12}$$

где $c_1, \ldots, c_m$ — некоторые постоянные. Поэтому функции $y_j(t)$ в любом частном решении системы (4.9), (4.10) будут убывать по закону экспоненты с показателем, равным одной из вещественных частей характеристических показателей $\alpha_j(\mu)$. Подставив найденное $y(t)$ в систему (4.10), получим уравнения, определяющие $z_t(\vartheta)$.

Частное решение неоднородной системы

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = Az_t(\vartheta) + F(t, \vartheta) \tag{4.13}$$

где $F(t, \vartheta)$ — кусочно-непрерывная функция ϑ с разрывами первого рода, $F(t, \vartheta) \in L$ при любом $t > 0$, определяется формулой Коши

$$Z_t^*(\vartheta) = \int_0^t T(t - t_1) F(t_1, \vartheta)\, dt_1 \tag{4.14}$$

Здесь $T(t)$ — полугрупповой оператор, определяющий решение $z_t(\vartheta) = T(t) Z_0(\vartheta)$ однородной системы (4.13) при $F = 0$. Если $z_0(\vartheta) \in L$, то $T(t) z_0(\vartheta)$ убывает по закону экспоненты,

$$T(0) z_0(\vartheta) = Z_0(\vartheta)$$

Дифференциально операторное уравнение (4.10) заменим интегральным уравнением

$$z_t(\vartheta) = T(t) Z_0(\vartheta) + \mu \int_0^t T(t - t_1) R_1(y(t_1), Z_{t_1}(\vartheta)\, dt_1 \tag{4.15}$$

в котором $R_1(yz)$ известна и $y(t)$, убывает по закону экспоненты при $t \to \to +\infty$. Применяя метод последовательных приближений, найдем, что при достаточно малом $|\mu|$ $Z_t(\vartheta)$ тоже убывает по экспоненциальному закону. Таким образом, всякое решение $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$ системы (1.1) будет убывать по закону экспоненты при достаточно малом $|\mu|$ ($\mu \neq 0$). Что и требовалось доказать.

Замечание. Допустим, что система (1.1) является системой первого приближения для системы нелинейных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t-\tau) + \mu g(t,\mu)\,x(t) + \mu h(t,\mu)\,x(t-\tau) + X(t, x(t), x(t-\tau))$$

где $X(t, x(t), x(t-\tau))$ — нелинейная функция переменных $x(t), x(t-\tau)$, разложение которой в ряд начинается с членов не ниже второго порядка с коэффициентами равномерно ограниченными функциями времени t. Если все характеристические показатели системы (1.1) имеют отрицательные вещественные части, то при достаточно малом $|\mu|$ ($\mu \neq 0$) невозмущенное движение системы (4.16) асимптотически устойчиво. Если среди характеристических показателей системы (1.1) найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение системы (4.6) будет неустойчиво [3].

Поступила 5 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1959.
2. Bellman R. On the existence and boundedness of solutions of nonlinear differential — difference equations. Annals of Mathematics, 1949, 50 : 2, 347—355.
3. Шиманов С. Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием. ПММ, 1960, том XXIV, вып. 1, стр. 57—64.
4. Moulton F. R. Periodic orbits. Washington. Chap. I, 1920.
5. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
6. Шиманов С. Н. К вопросу об отыскании характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, 1956, т. 109, № 6.
7. Шиманов С. Н. Об отыскании характеристических показателей линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.