

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОРАМЫ

Д. Р. Меркин

(Ленинград)

Рассматривается движение гироскопа (твердого тела, несущего гироскопы), точка подвеса которой перемещается относительно инерциальной системы отсчета по любому заданному закону. Применяя метод, изложенный в [1], составляются уравнения прецессионного движения всей системы. Показывается, что при некоторых условиях уравнения движения допускают первый интеграл, который может быть использован для построения функции Ляпунова и определения достаточных условий устойчивости движения. В качестве примера составляются уравнения прецессионного движения гироскопа и доказывается их эквивалентность уравнениям, полученным впервые А. Ю. Ишлинским [2].

Устанавливается условие устойчивости движения гироскопа (при постоянной скорости точки подвеса v и постоянной угловой скорости вращения ω).

1. Введем две системы координат: инерциальную с началом в точке O_1 и систему $Ox_1^*x_2^*x_3^*$, перемещающуюся поступательно относительно инерциальных осей. Будем рассматривать движение системы материальных точек как относительно инерциальных осей, так и относительно осей $Ox_1^*x_2^*x_3^*$. Обозначим через K главный вектор моментов количества первого движения системы материальных точек относительно начала инерциальных осей O_1 и через K_0' — главный вектор моментов количества второго движения той же системы относительно начала поступательно перемещающихся осей $Ox_1^*x_2^*x_3^*$.

Тогда закону моментов количества движения системы материальных точек $dK/dt = M^e$ легко придать следующую форму:

$$\frac{dK_0'}{dt} = M_0^e + M_0^u \quad (1.1)$$

Здесь M^e и M_0^e — главные моменты внешних сил, приложенных к системе, относительно точек O_1 и O соответственно; M_0^u — главный момент сил инерции переносного ускорения относительно точки O , причем силы инерции приводятся к одной равнодействующей, равной $-m\omega$ и приложенной к центру масс системы (m — масса всей системы, ω — ускорение точки O).

Выражение для кинетической энергии системы материальных точек можно представить в виде

$$T = T' + \frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_c' \quad (1.2)$$

В этом равенстве v — скорость точки O , v_c' — скорость центра масс системы материальных точек в его движении относительно поступательно перемещающихся осей $Ox_1^*x_2^*x_3^*$; T' — кинетическая энергия системы в том же движении.

3. Предположим, что силы, действующие на систему, потенциальны; тогда

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.1)$$

где Π — потенциальная энергия. Пусть, кроме того, выражения R_0 , T_1 , T_0 не зависят явным образом от времени. В этих предположениях уравнения (2.8) допускают первый интеграл

$$V = \Pi - T_0 - R_0 = \text{const} \quad (3.2)$$

который легко получается, если умножить каждое уравнение (2.8) на \dot{q}_j и просуммировать полученные произведения, учтя при этом, что R_1 и T_1 однородные линейные функции обобщенных скоростей, а Π , T_0 и R_0 от скоростей \dot{q}_i не зависят.

Будем считать, что движение координатных осей $Ox_1^{\circ}x_2^{\circ}x_3^{\circ}$ и силы, действующие на систему, заданы таким образом, что может быть осуществлено движение $q_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$). В этом случае уравнения (2.8) будут уравнениями возмущенного движения и если функция

$$W = V - V(0) \quad (3.3)$$

будет знакоопределенной, то невозмущенное прецессионное движение $q_j = 0$ устойчиво по Ляпунову.

4. В качестве примера рассмотрим вывод уравнений движения гироскопа и его устойчивость. Принципиальная схема системы приведена в работе [2], там же дан вывод уравнений движения, причем, как уже было замечено, А. Ю. Ишлинский пользовался уравнениями моментов. Дадим сейчас вывод уравнений движения, основанный на изложенной выше методе, и применим ее к определению условий устойчивости движения.

Будем считать, что Земля имеет форму правильного шара и точка подвеса гироскопа O движется по поверхности Земли. Введем поступательно перемещающуюся систему координат $Ox^*y^*z^*$, оси которой ориентированы на далекие звезды. Кроме того, введем систему осей $O\xi\eta\zeta$, ориентированных географически. Обозначим через U угловую скорость Земли, через φ — геоцентрическую широту места и через V_E и V_N соответственно восточную и северную составляющие скорости точки подвеса относительно Земли, причем будем считать, что V_E и V_N заданы. Угловые скорости изменения широты $\dot{\varphi}$ и долготы $\dot{\lambda}$ будут равны

$$\dot{\varphi} = \frac{V_N}{R}, \quad \dot{\lambda} = \frac{V_E}{R \cos \varphi} \quad (4.1)$$

где R — радиус Земли. Вектор угловой скорости изменения широты направлен на запад, а вектор угловой скорости изменения долготы $\dot{\lambda}$ направлен по оси вращения Земли.

Угловая скорость вращения трехгранника $O\xi\eta\zeta$ относительно осей, ориентированных на далекие звезды, складывается из угловой скорости вращения Земли и угловых скоростей изменения широты и долготы. Ее проекции на оси ξ , η , ζ , как известно, равны

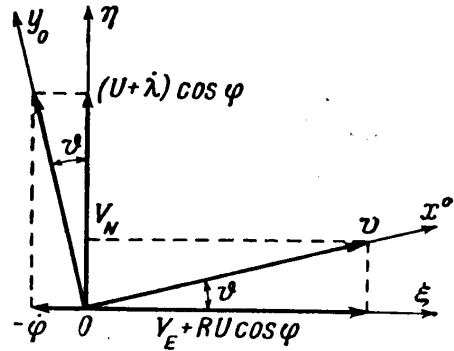
$$u_{\xi} = -\dot{\varphi}, \quad u_{\eta} = (U + \dot{\lambda}) \cos \varphi, \quad u_{\zeta} = (U + \dot{\lambda}) \sin \varphi \quad (4.2)$$

Скорость v точки подвеса O относительно инерциальной системы отсчета, начало которой совпадает с центром Земли (ускорением центра Земли пренебрегаем), складывается из переносной скорости, равной $RU \cos \varphi$ и направленной по касательной к меридиану на восток, и относительной скорости с составляющими $V_E, V_N, 0$. Скорость v , очевидно, будет равна (фиг. 1)

$$v = \sqrt{V_N^2 + (V_E + RU \cos \varphi)^2} \quad (4.3)$$

Следуя [2], введем новую систему координат $Ox^\circ y^\circ z^\circ$, в которой ось z° (фиг. 1) совпадает с осью ξ , а ось x° направлена по скорости v ; тогда ось y° , как легко видеть, будет направлена по равнодействующей горизонтальных составляющих u_ξ и u_η . Угол ϑ между осями ξ и x° определяется формулой

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\dot{\varphi}}{(U + \lambda) \cos \varphi} = \frac{V_N}{V_E + RU \cos \varphi} \quad (4.4)$$



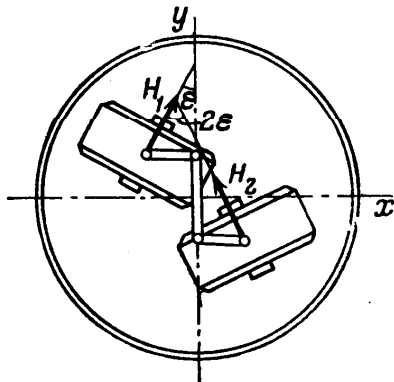
Фиг. 1

Пользуясь фиг. 1, а также формулами (4.1) — (4.4), найдем проекции на оси $x^\circ, y^\circ, z^\circ$ угловой скорости ω_e вращения трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ относительно осей $x^* y^* z^*$

$$\omega_{ex^\circ} = 0, \quad \omega_{ey^\circ} = \frac{v}{R}, \quad \omega_{ez^\circ} = \omega \quad (4.5)$$

где (4.6)

$$\omega = (U + \lambda) \sin \varphi + \dot{\vartheta} = \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi + U \sin \varphi + \dot{\vartheta}$$



Фиг. 2

Введем, наконец, систему координат xyz , жестко связанную с гирорамой, причем ось z направим параллельно осям вращения кожухов гироскопов, а ось y так, чтобы она составляла равные углы ϵ с осями гироскопов; направление оси x определится тем самым однозначно (фиг. 2)

(ограничиваемся изображением одной фиг. 2 без пояснений к ней (см., например, [2])). Положение гирорамы относительно осей $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ определяется тремя углами α, β и γ (фиг. 3). Таблица косинусов углов между системами координат $Oxyz$ и $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ имеет вид

(4.7)

	x°	y°	z°
x	$\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$-\cos \beta \sin \gamma$
y	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$	$\sin \beta$
z	$\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$	$\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$	$\cos \beta \cos \gamma$

Проекция вектора угловой скорости ω_e и вектора угловой скорости ω_r вращения гирорамы относительно трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ на оси x, y, z

равны

$$\begin{aligned}\omega_{ex} &= \frac{v}{R} (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) - \omega \cos \beta \sin \gamma \\ \omega_{ey} &= \frac{v}{R} \cos \alpha \cos \beta + \omega \sin \beta\end{aligned}\quad (4.8)$$

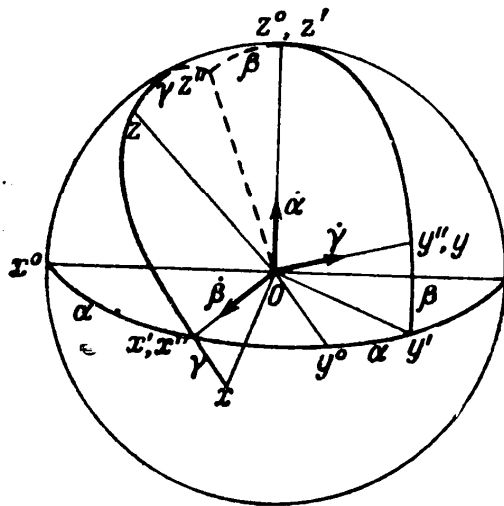
$$\begin{aligned}\omega_{ez} &= \frac{v}{R} (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + \omega \cos \beta \cos \gamma \\ \omega_{rx} &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma, \quad \omega_{ry} = \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \\ \omega_{rz} &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma\end{aligned}\quad (4.9)$$

Найдем также проекцию на ось y вектора угловой скорости вращения гироскопа относительно инерциальной системы отсчета (остальные проекции нам не понадобятся).

Имеем $\omega_y = \omega_{ry} + \omega_{ey}$, или, учитывая (4.8) и (4.9),

$$\omega_y = \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} + \frac{v}{R} \cos \alpha \cos \beta + \omega \sin \beta \quad (4.10)$$

Для того чтобы найти выражение $R_1 + R_0$ функции Рауса, нужно (см., например, [1], а также формулу (2.6)): 1) составить сумму проекций



Фиг. 3

всех угловых скоростей на ось каждого гироскопа (кроме скорости собственного вращения), 2) умножить полученные суммы на кинетические моменты соответствующих гироскопов и все произведения сложить. Применяя это правило к системе, изображенной на фиг. 2, найдем

$$\begin{aligned}R_1 + R_0 &= H_1 (\omega_x \sin \varepsilon + \omega_y \cos \varepsilon) + \\ &+ H_2 (-\omega_x \sin \varepsilon + \omega_y \cos \varepsilon)\end{aligned}$$

Считая кинетические моменты гироскопов одинаковыми ($H_1 = H_2 = H$; в работе [2] кинетический момент гироскопа обозначен буквой B) и

принимая во внимание равенство (4.10), получим

$$R_1 + R_0 = 2H \cos \varepsilon \left(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} + \frac{v}{R} \cos \alpha \cos \beta + \omega \sin \beta \right)$$

Отсюда

$$R_1 = 2H \cos \varepsilon (\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}), \quad R_0 = 2H \cos \varepsilon \left(\frac{v}{R} \cos \alpha \cos \beta + \omega \sin \beta \right) \quad (4.11)$$

Перейдем к вычислению T_1 и T_0 по формулам (2.3). Проекция вектора скорости точки подвеса v на оси $x^\circ, y^\circ, z^\circ$ равны

$$v_x^\circ = v, \quad v_y^\circ = 0, \quad v_z^\circ = 0$$

Пользуясь таблицей (4.7), найдем проекции этого вектора на оси x, y, z

$$\begin{aligned}v_x &= v (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma), \quad v_y = -v \sin \alpha \cos \beta \\ v_z &= v (\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma)\end{aligned}\quad (4.12)$$

Центр тяжести всей системы находится на оси z на расстоянии l ниже точки опоры. Поэтому проекции вектора \mathbf{r}_c' на оси x, y, z будут

$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = -l \quad (4.13)$$

Раскрывая произведения, стоящие в формулах (2.3), и пользуясь выражениями (4.8), (4.9), (4.12) и (4.13), получим

$$T_1 = mlv [(\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) \dot{\alpha} - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \dot{\beta} - (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) \dot{\gamma}] \quad (4.14)$$

$$T_0 = \frac{1}{2} mv^2 + ml\omega v (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) - ml \frac{v^2}{R} \cos \beta \cos \gamma$$

Перейдем к вычислению обобщенных сил. На гироскоп действует сила тяготения F , направленная по радиусу к центру Земли. Потенциальная энергия этой силы равна $\Pi_1 = F\zeta$, где ζ — координата центра тяжести гироскопа с находящимися на ней телами. Принимая во внимание равенства (4.13) и таблицу (4.7), найдем

$$\Pi_1 = -Fl \cos \beta \cos \gamma \quad (4.15)$$

Внутри гироскопа устанавливается приспособление, создающее момент $-N(\varepsilon)$ относительно осей вращения кожухов гироскопов. Если ограничиться рассматриваемыми силами, то обобщенные силы системы

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha} = 0, \quad Q_\beta = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial \beta} = -Fl \sin \beta \cos \gamma \quad (4.16)$$

$$Q_\gamma = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial \gamma} = -Fl \cos \beta \sin \gamma, \quad Q_\varepsilon = -N(\varepsilon)$$

Применяя схему (2.8) для углов α, β, γ , и ε и учитывая выражения 4.11), (4.14) и (4.16), получим уравнения движения рассматриваемой системы (правые части первых трех уравнений могут быть получены как сумма моментов силы тяготения F и равнодействующей сил инерции $-m\omega$ относительно осей z_0, x' и y (фиг. 3)

$$\frac{d}{dt} (2H \cos \varepsilon) \sin \beta + 2H \cos \varepsilon \cdot \cos \beta \dot{\beta} + 2H \cos \varepsilon \frac{v}{R} \sin \alpha \cos \beta =$$

$$= -ml \frac{dv}{dt} (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + ml\omega v (\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) - 2H \cos \varepsilon \left(\dot{\alpha} \cos \beta - \frac{v}{R} \cos \alpha \sin \beta + \omega \cos \beta \right) = ml \frac{dv}{dt} \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - ml\omega v \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \left(F - m \frac{v^2}{R} \right) l \sin \beta \cos \gamma$$

$$\frac{d}{dt} 2H \cos \varepsilon = ml \frac{dv}{dt} (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + ml\omega v (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) - \left(F - m \frac{v^2}{R} \right) l \cos \beta \sin \gamma$$

$$2H \sin \varepsilon \left(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} + \frac{v}{R} \cos \alpha \cos \beta + \omega \sin \beta \right) = -N(\varepsilon)$$

Уравнения (4.17) эквивалентны уравнениям (40), полученным в работе [2] другими методами. Действительно, второе и четвертое уравнения системы (40) работы [2] совпадают с третьим и четвертым уравнениями системы (4.17). Для того чтобы получить первое уравнение системы (40)

из [2], достаточно первое уравнение (4.17) привести при помощи третьего уравнения этой системы к виду

$$2H \cos \varepsilon \left(\dot{\beta} + \frac{v}{R} \sin \alpha \right) = - ml \frac{dv}{dt} \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \\ + ml \omega v \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \left(F - m \frac{v^2}{R} \right) l \sin \beta \sin \gamma$$

затем умножить это уравнение на $\sin \gamma$, а второе уравнение (4.17) на $-\cos \gamma$ и полученные произведения сложить. Другой линейной комбинацией легко получить третье уравнение системы (40) статьи [2].

5. Рассмотренная гирорама будет гиروهоризонткомпасом, если подобрать такой момент $N(\varepsilon)$, при котором может осуществляться движение $\alpha = \beta = \gamma = 0$, т. е. движение, когда экваториальная плоскость гирорама Oxy все время будет горизонтальной (гиروهоризонт), а ось y будет указывать с точностью до курсовой поправки, равной углу ϑ , на север (гиروهоризонткомпас). Внося эти значения углов α , β и γ в уравнения (4.17), получим

$$2H \cos \varepsilon \cdot \omega = ml \omega v, \quad 2H \sin \varepsilon \frac{v}{R} = -N(\varepsilon)$$

Отсюда (см. [2])

$$2H \cos \varepsilon = mlv = ml \sqrt{V_N^2 + (V_E + RU \cos \varphi)^2} \quad (5.1) \\ N(\varepsilon) = -\frac{4H^2}{mlR} \cos \varepsilon \sin \varepsilon$$

Если эти условия выполняются и в начальный момент времени $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то гирорама будет в равновесии по отношению к системе $Ox^0y^0z^0$, указывая все время вертикаль места и направление на север.

6. Перейдем к исследованию устойчивости движения в предположении, что функции R_0 , T_0 и T_1 не зависят явным образом от времени (это равносильно предположению, что v и ω постоянны). Обозначим через ε_0 значение угла ε , при котором первое условие (5.1) выполняется точно

$$2H \cos \varepsilon_0 = mlv \quad (6.1)$$

и при помощи равенства

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta$$

введем в рассмотрение новый угол δ . Обобщенная сила Q_ε , равная $-N(\varepsilon)$, будет консервативной с потенциальной энергией

$$\Pi_2 = \int N(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{H^2}{mlR} \cos 2\varepsilon \quad (6.2)$$

Пользуясь значением потенциальной энергии силы F (4.15), найдем потенциальную энергию Π всей системы

$$\Pi = -Fl \cos \beta \cos \gamma + \frac{H^2}{mlR} \cos 2\varepsilon \quad (6.3)$$

При сделанных предположениях имеет место первый интеграл (3.2), который в нашем случае имеет вид (см. (4.11), (4.14) и (6.3))

$$V = -l \left(F - m \frac{v^2}{R} \right) \cos \beta \cos \gamma + \frac{H^2}{mlR} \cos 2(\varepsilon_0 + \delta) - \frac{1}{2} mv^2 - \\ - ml \omega v - (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) - 2H \cos(\varepsilon_0 + \delta) \times \\ \times \left(\frac{v}{R} \cos \alpha \cos \beta + \omega \sin \beta \right) \quad (6.4)$$

Составим разность $V - V(0)$ и разложим ее в ряд по степеням α , β , γ и δ . Тогда, учитывая равенство (6.1), после преобразований найдем

$$V - V(0) = \frac{l}{2} \left[\frac{mv^2}{R} \alpha^2 + F\beta^2 + \left(F - \frac{mv^2}{R} \right) \gamma^2 + m \frac{v^2}{R} \operatorname{tg}^2 \varepsilon_0 \delta^2 - 2m\omega v \beta \gamma + 2m\omega v \operatorname{tg} \varepsilon_0 \beta \delta \right] + \dots \quad (6.5)$$

Здесь точками обозначены члены высшего порядка.

Применяя к квадратичной форме, стоящей в скобках, обычные критерии Сильвестра, легко получим, что при выполнении условия

$$F - m \frac{v^2}{R} - mR\omega^2 > 0 \quad (6.6)$$

функция $W = V - V(0)$ для достаточно малых значений α , β , γ и δ будет определено положительной. Так как ее производная в силу уравнений возмущенного движения равна нулю ($\dot{W} = \text{const}$), то на основании известной теоремы Ляпунова невозмущенное движение гироскопизма $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ будет устойчиво.

Остановимся кратко на условии (6.6). Если, следуя [2], положить приближенно

$$F - m \frac{v^2}{R} = mg$$

то это неравенство принимает вид

$$\omega < \nu \left(\nu = \sqrt{\frac{g}{R}} \right) \quad (6.7)$$

где ν — частота, соответствующая периоду Шулера [6].

7. Учет сил сопротивления; тогда вместо интеграла (6.5) будем иметь

$$\frac{d}{dt} (V - V_0) = - (a\dot{\alpha}^2 + b\dot{\beta}^2 + c\dot{\gamma}^2 + d\dot{\delta}^2)$$

где a , b , c и d — сколь угодно малые положительные постоянные, характеризующие силы диссипации.

Если $\omega < \nu$, то невозмущенное движение $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ будет асимптотически устойчиво, если же $\omega > \nu$, то функция $V - V_0$ может принимать отрицательные значения и, следовательно, движение будет неустойчиво. Учитывая, что силы сопротивления имеются в каждой системе, можно считать, что в сделанных предположениях неравенство $\omega < \nu$ является не только достаточным, но и необходимым, условием устойчивости движения гироскопизма.

Поступила 27 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. ГИТТЛ, 1956.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопизма. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
3. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического маятника. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.
4. Ишлинский А. Ю. Теория дву гироскопической вертикали. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
5. Ишлинский А. Ю. К теории сложных систем гироскопической стабилизации. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
6. Жбанов Ю. К. Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.