Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ РАКЕТЫ

Г. Лейтманн

(Калифорния, США)

В работе [1] вариационным методом рассматривается задача определения оптимальной величины и направления тяги для получения минимального времени или минимального расхода горючего при полете ракеты с заданными начальной и конечной скоростями соответственно в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

В работе [1] приняты и сохраняются следующие допущения.

(a) Ракета рассматривается как точка переменной массы, т. е. ее моменты инерции считаются пренебрежимо малыми.

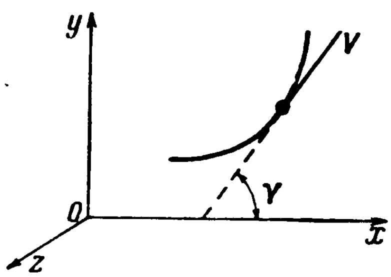
(b) Направление тяги идеально регулируемо, т. е. может быть изменено мгновенно.

(c) Ускорение силы тяжести считается постоянным.

(d) Аэродинамические силы пренебрежимо малы.

(e) Тяга пропорциональна массовой скорости потока [2].

Результаты, полученные в работе [1], расходятся с ранее опубликованным результатом, полученным при решении одной из задач (полет в вертикальной плоскости), поэтому здесь предлагается другое решение этой задачи. Метод решения основан на классическом вариационном исчислении [3] с применением связей в форме неравенств для регулируемых переменных, установленных в работе [4].



Фиг. 1

Обозначения: c — эффективная скорость струи, g — ускорение силы тяжести, m — масса ракеты, t — время, C — первый интеграл, T — тяга, V — скорость ракеты, β — расход массы, γ — угол направления скорости, λ — неопределенный множитель, θ — угол направления тяги в вертикальной плоскости, φ—угол направления тяги в горизонтальной плоскости.

Индексы: i — начальной, f — конечной величин; минус означает предшествующий угол; плюс — последующий угол.

Полет в горизонтальной плоскости. Постановка задачи и уравнения движения. На фиг. 1 и 2 изображены соответственно траектория полета и система сил в случае полета ракеты в горизонтальной плоскости; траектория полета рассматривается относительно некоторой инерционной системы координат $Oxyz$; при этом оси x и y расположены в горизонтальной плоскости, а ось z направлена вверх.

Разлагая силы соответственно по направлениям касательной, нормали и бинормали, имеем

$$m\dot{V} = T\cos\theta\cos\varphi, \qquad mV\dot{\gamma} = T\cos\theta\sin\varphi, \qquad 0 = T\sin\theta - mg \tag{1}$$

Здесь

$$T = c\beta, \qquad c = \mathrm{const}, \qquad \beta = -\dot{m} \tag{2}$$

Регулирование направления тяги можно осуществить в пределах

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

Следовательно, из третьего уравнения (1) имеем

$$\cos\theta = \left[1 - \left(\frac{mg}{T}\right)^2\right]^{1/2} \tag{4}$$

Далее, чтобы решение имело физический смысл, нужно потребовать

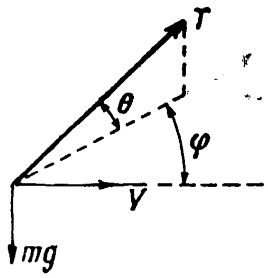
$$\frac{mg}{c} \leqslant \beta \leqslant \beta_{\max} \tag{5}$$

Здесь значения $\beta_{\max}$ предполагается заданным. Требуется найти минимум функционала

$$G = G(m_i, V_i, \gamma_i, t_i, m_f, V_f, \gamma_f, t_f) \tag{6}$$

При условиях

$$\begin{gathered} \dot V - [(c\beta / m)^2 - g^2]^{1/2}\cos\varphi = 0 \\ \dot\gamma - [(c\beta / m)^2 - g^2]^{1/2} V^{-1}\sin\varphi = 0 \\ \dot m + \beta = 0 \\ (\beta_{\max} - \beta)(\beta - mg / c) - \eta^2 = 0 \end{gathered} \tag{7}$$



Фиг. 2

При этом должны удовлетворяться также соответствующие краевые условия. Четвертое уравнение (7) вытекает из неравенств (5), где η — некоторая действительная переменная [1].

Если в функционале (6) одна из величин V_i или V_f равна нулю, то следует провести предельный переход так, как это описано в работе [5].

Уравнения (7) содержат шесть зависимых переменных V, γ, m, β, φ, η. Так как имеются четыре условия (7), то можно свободно варьировать две переменные, за которые возьмем регулируемые переменные β и φ.

Первая вариация. Обращение в нуль первой вариации дает необходимые условия для существования экстремального значения в виде уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\dot\lambda_V - \lambda_\gamma\left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{1/2}\frac{1}{V^2}\sin\varphi = 0 \tag{8}$$

$$\dot\lambda_\gamma = 0$$

$$\dot\lambda_m - \frac{c^2\beta^2}{m^3}\left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{-1/2}\left(\lambda_V\cos\varphi + \lambda_\gamma\frac{1}{V}\sin\varphi\right) + \lambda_\eta(\beta_{\max} - \beta)\frac{g}{c} = 0$$

$$\left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{1/2}\left(\lambda_V\sin\varphi - \lambda_\gamma\frac{1}{V}\cos\varphi\right) = 0$$

$$\frac{c^2\beta}{m^2}\left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{-1/2}\left(\lambda_V\cos\varphi + \lambda_\gamma\frac{1}{V}\sin\varphi\right) - \lambda_m + \lambda_\eta\left(2\beta - \beta_{\max} - \frac{mg}{c}\right) = 0$$

$$\lambda_\eta\eta = 0$$

$$dG + [\lambda_V\,dV + \lambda_\gamma\,d\gamma + \lambda_m\,dm - C\,dt]_{t_i}^{t_f} = 0 \tag{9}$$

Здесь λ_V, λ_γ, λ_m, λ_η — неопределенные множители и уравннние (9) условия трансверсальности, а первый интеграл C имеет вид

$$C = \lambda_V\dot V + \lambda_\gamma\dot\gamma + \lambda_m\dot m = \text{const} \tag{10}$$

---

[1] См. диссертацию F. A. Valentine. The Problem of Lagrange with Differential Inequalities as Added Side Conditions. Dissertation. Department of Mathematics. University of Chicago 1937.

Условия в угловых точках. Регулируемые переменные β и φ могут иметь конечные разрывы в изолированных точках интервала $t_i \leqslant t \leqslant t_f$; поэтому экстремальная кривая может иметь угловые точки; в таких точках должны выполняться условия Вейерштрасса-Эрдмана, которые для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\lambda_{V_-} = \lambda_{V_+}, \qquad \lambda_{\gamma_-} = \lambda_{\gamma_+}, \qquad \lambda_{m_-} = \lambda_{m_+} \tag{11}$$

$$C_- = C_+ \tag{12}$$

Построение экстремальной кривой. Так как регулируемые переменные могут быть разрывными, то возникает задача построения экстремальной кривой из отдельных участков.

Из последнего уравнения (7) и последнего уравнения (8) имеем

$$\frac{mg}{c} < \beta < \beta_{\max} \quad \text{для} \quad \lambda_\eta = 0, \quad \eta \neq 0$$

$$\beta = \frac{mg}{c} \quad \text{или} \quad \beta = \beta_{\max} \quad \text{для} \quad \begin{cases} \lambda_\eta = 0, & \eta = 0 \\ \lambda_\eta \neq 0, & \eta = 0 \end{cases} \tag{13}$$

в предположении, что величина тяги ограничена. Однако условия (13) не позволяют установить оптимальный режим для тяги.

Аналогичная дилемма возникает в отношении оптимального выбора угла φ, определяющего направление тяги, так как четвертое уравнение (8) удовлетворяется, если положить

$$mg = c\beta \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin\varphi = \pm\lambda_\gamma\,[\lambda_\gamma^2 + (V\lambda_V)^2]^{-1/2} \\ \cos\varphi = \pm V\lambda_V\,[\lambda_\gamma^2 + (V\lambda_V)^2]^{-1/2} \end{cases} \tag{14}$$

Чтобы ответить на эти вопросы, нужно прибегнуть к более сильному условию, чем то, которое дает обращение в нуль первой обобщенной вариации.

***E*-функция Вейерштрасса.** Для задачи о минимальном времени полета

$$G = t_f \tag{15}$$

$$\begin{aligned} t &= t_i = 0, & V &= V_i, & \gamma &= \gamma_i, & m &= m_i \\ t &= t_f \ \text{(не задано)}, & V &= V_f, & \gamma &= \gamma_f, & m &= m_f \end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, из уравнений (9) и (10) вытекает

$$C = 1 \tag{17}$$

Для задачи о минимальном расходе горючего при полете или любой другой задачи с незаданным временем полета

$$C = 0 \tag{18}$$

Следовательно, из уравнений (10) и (7) имеем

$$C = \left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{1/2} \left(\lambda_V \cos\varphi + \lambda_\gamma \frac{1}{V} \sin\varphi\right) - \lambda_m \beta \geqslant 0 \tag{19}$$

Вдоль программируемого участка промежуточной тяги в силу условий (13) имеем

$$\lambda_\eta = 0 \tag{20}$$

так что пятое уравнение (8) принимает вид

$$C = -g^2 \left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{1/2} \left(\lambda_V \cos\varphi + \lambda_\gamma \frac{1}{V} \sin\varphi\right) \tag{21}$$

Для того, чтобы G имела минимум, E-функция Вейерштрасса должна быть неотрицательна. Это условие требует, чтобы величина

$$A = \left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{1/2} \left(\lambda_V \cos\varphi + \lambda_\Upsilon \frac{1}{V} \sin\varphi\right) - \lambda_m \beta \tag{22}$$

имела максимум по регулируемым переменным β и φ.

В отношении угла направления тяги это требование сказывается на четвертом уравнении (8), а также на выборе знака (плюс) в уравнении (14), т. е.

$$\lambda_V \cos\varphi + \lambda_\Upsilon \frac{1}{V} \sin\varphi = [\lambda_\Upsilon^2 + (V\lambda_V)^2]^{1/2} \frac{1}{V} \geqslant 0 \tag{23}$$

В самом деле, только при знаке неравенства, принятом в (23), все множители не обращаются в нуль. Следовательно, равенство (21) противоречит неравенству (19). Таким образом, не может быть участка с промежуточной тягой, т. е.

$$\lambda_\eta \neq 0, \qquad \eta = 0 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{mg}{c} \quad \text{или} \quad \beta = \beta_{\max} \tag{24}$$

В отношении ограниченной регулируемой переменной β имеем

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{c^2\beta}{m^2} \left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{-1/2} [\lambda_\Upsilon^2 + (V\lambda_V)^2]^{1/2} \frac{1}{V} - \lambda_m \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \beta^2} = -\left(\frac{cg}{m}\right)^2 [\lambda_\Upsilon^2 + (V\lambda_V)^2]^{1/2} \left[\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2\right]^{-3/2} \frac{1}{V} \tag{26}$$

В силу пятого уравнения (8) и уравнений (24) и (25) имеем

$$\partial A / \partial \beta \neq 0 \tag{27}$$

Из уравнения (25) следует также

$$\partial A / \partial \beta \to \infty \qquad \text{при } c\beta \to mg \tag{28}$$

Из уравнения (26) имеем

$$\partial^2 A / \partial \beta^2 < 0 \tag{29}$$

Из фиг. 3, на которой представлена величина A как функция β для любого момента времени, видно, что допустим только максимум тяги

$$\beta = \beta_{\max} \tag{30}$$

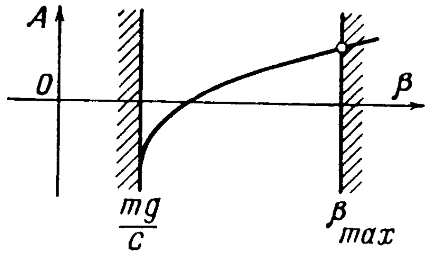
Далее, в этой точке

$$A = C \tag{21}$$

Если

$$\beta_{\max} = \infty \tag{32}$$

этот случай рассмотрен в работе [1], конечная скорость получается посредством импульса.



Фиг. 3

Если время полета задано, то уравнения (17) и (18) более не применимы. В частности, первый интеграл не обязательно должен быть неотрицательным и может появиться программированная промежуточная тяга. Так как A нелинейная функция β, то оптимальная программа тяги должна меняться непрерывно, чтобы удовлетворять условию максимальности A. Если максимальное значение A, определенное уравнением (22), лежит в интервале $mg/c < \beta < \beta_{\max}$, оптимальная программа определяется условием

$$\partial A / \partial \beta = 0 \tag{33}$$

т. е. пятым уравнением (8) и уравнением (20).

Если значение A, соответствующее условию (33), лежит справа от точки $\beta = \beta_{max}$ (фиг. 3), то

$$\lambda_n \neq 0, \ \beta = \beta_{max} \tag{34}$$

где λ_n определяется пятым уравнением (8).

Решение. В случае конечной тяги для определения оптимальной программы направления тяги нужно решить совместно уравнения движения и вариационные уравнения.

Для минимального времени полета и граничных условий (16) можно принять для λ_γ и λ_V некоторые начальные значения. Тогда первые три уравнения (7), первые два уравнения (8) вместе с уравнениями (14) и (30) можно интегрировать до $m = m_f$. В этой точке должны быть склеены полученные значения V и γ. Если значение конечной массы m_f не задано, то интегрирование должно заканчиваться при

$$\lambda_m = \lambda_{mf} = 0 \tag{35}$$

Множитель λ_m можно вычислить из первого интеграла уравнения (10) и (17).

Для случая минимального расхода горючего имеем

$$G = m_f \tag{36}$$

и условия

$$\begin{matrix} t = t_i = 0, & V = V_i, & \gamma = \gamma_i, & m = m_i \\ t = t_f \ \text{(не задано)} & V = V_f, & \gamma = \gamma_f & \end{matrix} \tag{37}$$

из уравнения (9) следует, что

$$\lambda_{mf} = 1 \tag{38}$$

Интегрирование заканчивается, когда величина λ_m достигнет значения, равного единице. Значение λ_m может быть также найдено из первого интеграла уравнений (10) и (18).

В обоих случаях требуется двупараметрическая итерация для решения смешанной краевой задачи.

Полет в вертикальной плоскости. Эта задача рассматривалась ранее [6]. Здесь снова может быть показано, что полет с максимальной тягой будет оптимальным.

Замечание. Полученные результаты расходятся с результатами работы [1], где полученное решение определяет полет с программированной промежуточной тягой.

Поступила 24 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Ю. А. О двух классах плоских экстремальных движений ракеты в пустоте. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
2. Leitmann G. On the Equation of Rocket Motion. J. Brit. Interplan. Soc. 1957, 16.
3. Bliss G. A. Lectures on the Calculus of Variations. University of Chicago Press, Chicago, 1946.
4. Leitmann G. Chapter 5 of Optimisation Techniques, ed. by G. Leitmann. Academic Press, New York, to appear.
5. Leitmann G. Trajectory Programming for Maximum Range. J. Franklin Inst., 1957, 264.
6. Leitmann G. On a Class of Variational Problems in Rocket Flight. J. Aero/Space Sci, 1959, 26.