Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О СИСТЕМАХ С ТРЕНИЕМ

В. В. Румянцев

(Москва)

Механические системы, стесненные связями с трением, обычно приводятся к системам с идеальными связями путем присоединения к заданным силам сил трения и добавления некоторых соотношений, получаемых из эмпирических законов трения. Последние имеют различные формы в зависимости от природы связей, но вместе с тем имеют и много общих свойств. Общая теория движения систем с трением была развита Пэнлеве [1].

Непосредственное применение метода Лагранжа позволяет, однако, и для систем с трением установить общий принцип без явно входящих в него реакций связей. Такой принцип — принцип Эйлера — Лагранжа — был установлен Аппелем [2] для возможных перемещений, допускаемых связями без трения и ортогональных к реакциям поверхностей с трением, и Н. Г. Четаевым [3] для возможных перемещений, ортогональных к действительным скоростям точек системы.

Интересной является задача о распространении другого основного принципа механики — принципа наименьшего принуждения Гаусса на системы с трением. Этому вопросу посвящена работа [4] Г. К. Пожарицкого. Рассматривая системы, некоторые точки которых вынуждены скользить с трением, следующим закону Кулона, по некоторым поверхностям, и предполагая известными нормальные составляющие реакций последних, он доказывает достаточность для действительного движения таких систем минимума по ускорениям некоторого выражения, зависящего от сил трения. Следует отметить, что задачи, в которых нормальные реакции не зависят от трения, должны рассматриваться как наиболее частные и вместе с тем наиболее простые [2], в более общих случаях нормальные реакции зависят от коэффициента трения скольжения. Кроме того, экспериментальные законы трения могут отличаться от закона Кулона; существуют также широкие классы систем с неидеальными связями, подпадающие под общее определение Пэнлеве [1] систем с трением. По-видимому, вопрос о распространении принципа Гаусса на общие системы с трением еще никем не рассматривался, хотя решение этого вопроса представляет известный интерес.

В работе принято предложенное Пэнлеве общее определение систем с трением, справедливое, каковы бы ни были экспериментальные законы трения. Дано обобщение на неголономные системы некоторых результатов Пэнлеве. Далее установлен принцип Гаусса для таких систем в двух формах — с явно входящими силами трения и, что более интересно, без явно входящих сил реакций. Из принципа Гаусса выведены уравнения движения систем с трением.

1. Рассмотрим систему n материальных точек P_ν с массами m_ν, положения которых относительно неподвижной системы осей координат определяются их декартовыми координатами

$$x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

Пусть на точки системы P_ν действуют заданные силы F_ν (X_ν, Y_ν, Z_ν) и наложены не зависящие от этих сил связи как геометрические

$$f_\alpha\,(x, y, z, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, p_1) \tag{1.1}$$

так и кинематические, вообще говоря, нелинейные

$$\varphi_\beta(x, y, z, x', y', z', t) = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, p_2) \tag{1.2}$$

где x_ν', y_ν', z_ν' обозначают проекции вектора скорости точки P_ν. Связи (1.1) и (1.2) предполагаются совместными и не зависимыми одна от другой.

Дифференцируя по времени уравнения (1.1) два раза, а уравнения (1.2) — один раз, представим их в виде

$$\sum_\nu (a_{s\nu} x_\nu'' + b_{s\nu} y_\nu'' + c_{s\nu} z_\nu'') + e_s = 0 \qquad (s = 1, \ldots, p,\ p = p_1 + p_2) \tag{1.3}$$

где $a_{s\nu}$, $b_{s\nu}$, $c_{s\nu}$, e_s — известные функции координат x_ν, y_ν, z_ν и скоростей x_ν', y_ν', z_ν' точек P_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) системы и времени t.

Возможные перемещения δr_ν (δx_ν, δy_ν, δz_ν) точек P_ν системы определяются p независимыми соотношениями

$$\sum_\nu (a_{s\nu}\,\delta x_\nu + b_{s\nu}\,\delta y_\nu + c_{s\nu}\,\delta z_\nu) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, p) \tag{1.4}$$

Таким образом, среди $3n$ вариаций координат точек системы будет $k = 3n - p$ независимых и p зависимых. Уравнения (1.4) позволяют выразить зависимые вариации через независимые.

Пусть при связях (1.1) положение системы определяется $l = 3n - p_1$ независимыми лагранжевыми координатами $q_1, \ldots, q_l$

$$x_\nu = x_\nu(q_1, \ldots, q_l, t), \qquad y_\nu = y_\nu(q_1, \ldots, q_l, t), \qquad z_\nu = z_\nu(q_1, \ldots, q_l, t)$$
$$(\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

вариации которых в силу связей (1.2) связаны p_2 уравнениями

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_\nu \left(a_{r\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_j} + b_{r\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_j} + c_{r\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0 \qquad (r = p_1 + 1, \ldots, p)$$

Выражая при помощи последних уравнений p_2 вариаций $\delta q_{l-p_2+1}, \ldots$ $\ldots, \delta q_l$ в виде линейных однородных функций k остальных независимых вариаций $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ и подставляя найденные выражения в соотношения

$$\delta x_\nu = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j}\delta q_j, \qquad \delta y_\nu = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_j}\delta q_j, \qquad \delta z_\nu = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_j}\delta q_j \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

представим последние в виде

$$\delta x_\nu = \sum_{i=1}^{k} A_{\nu i}\delta q_i, \qquad \delta y_\nu = \sum_{i=1}^{k} B_{\nu i}\delta q_i, \qquad \delta z_\nu = \sum_{i=1}^{k} C_{\nu i}\delta q_i \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

Здесь $A_{\nu i}$, $B_{\nu i}$, $C_{\nu i}$ — функции координат $q_1, \ldots, q_l$, производных по времени от них $q_1', \ldots, q_l'$ и времени t, а вариации $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ — произвольны.

Связи, наложенные на систему, зависят от физической природы осуществляющих их механизмов, в виду чего характеристика связей вводится в механику в виде некоторой аксиомы, выражающей реально существующие опытные соотношения. В случае идеальных связей такой аксиомой будет равенство

$$\sum_{\nu} (R_{\nu x}\delta x_{\nu} + R_{\nu y}\delta y_{\nu} + R_{\nu z}\delta z_{\nu}) = 0$$

т. е. сумма элементарных работ реакций связей $\mathbf{R}_{\nu}$ ($R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$) равна нулю для всякого возможного перемещения системы, каковы бы ни были в рассматриваемый момент времени положение системы, скорости ее точек и заданные силы $\mathbf{F}_{\nu}$. Если же сумма элементарных работ реакций связей на возможных перемещениях системы не будет всегда равной нулю, то данная система будет системой с трением [1].

Пэнлеве изучал голономные системы с трением, однако многие его общие результаты легко распространяются и на случай неголономных систем с трением. Приведем с указанным обобщением некоторые результаты.

Легко видеть, что для того, чтобы сумма элементарных работ некоторой системы сил $F_{\nu x}$, $F_{\nu y}$, $F_{\nu z}$ на всяком возможном перемещении системы была равной нулю, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$F_{\nu x} = \sum_{s=1}^{p} \lambda_s a_{s\nu}, \qquad F_{\nu y} = \sum_{s=1}^{p} \lambda_s b_{s\nu}, \qquad F_{\nu z} = \sum_{s=1}^{p} \lambda_s c_{s\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

где λ_s — коэффициенты, одинаковые для всех точек системы. Докажем это утверждение.

Достаточность. Если выполняются равенства (1.8), то

$$\sum_{\nu} (F_{\nu x}\delta x_{\nu} + F_{\nu y}\,\delta y_{\nu} + F_{\nu z}\,\delta z_{\nu}) = 0$$

в силу уравнений (1.4).

Необходимость. Пусть выполняется последнее соотношение; тогда для всякого возможного перемещения справедливо уравнение

$$\sum_{\nu} \left\{\left(F_{\nu x} - \sum_{s} \lambda_s a_{s\nu}\right)\delta x_{\nu} + \left(F_{\nu y} - \sum_{s} \lambda_s b_{s\nu}\right)\delta y_{\nu} + \left(F_{\nu z} - \sum_{s} \lambda_s c_{s\nu}\right)\delta z_{\nu}\right\} = 0$$

с неопределенными λ_s. Определяя их таким образом, чтобы обратились в нуль коэффициенты при p зависимых вариациях δx, δy, δz в этом уравнении, получим сумму, содержащую лишь k независимых вариаций. Отсюда получаем $3n$ уравнений (1.8).

Обратимся к реакциям данных связей $\mathbf{R}_{\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, n$), сумма элементарных работ которых на возможном перемещении равна $\tau \neq 0$.

Очевидно, существует бесконечное множество систем сил $\mathbf{R}_{\nu}'$ ($R_{\nu x}'$, $R_{\nu y}'$, $R_{\nu z}'$), обладающих тем свойством, что для всякого возможного перемещения

$$\sum_{\nu} (R_{\nu x}'\delta x_{\nu} + R_{\nu y}'\,\delta y_{\nu} + R_{\nu z}'\,\delta z_{\nu}) = \tau$$

Для этого в силу доказанного необходимо и достаточно выполнение равенств

$$R_{\nu x}' = R_{\nu x} + \sum_{s} \lambda_s a_{s\nu}, \qquad R_{\nu y}' = R_{\nu y} + \sum_{s} \lambda_s b_{s\nu}, \qquad R_{\nu z}' = R_{\nu z} + \sum_{s} \lambda_s c_{s\nu}$$

Среди этих систем сил $\mathbf{R}_\nu'$ существует одна и только одна система сил ρ_ν $(\rho_{\nu x}, \rho_{\nu y}, \rho_{\nu z})$ такая, что векторы $\rho_\nu \delta t$ определяют некоторое возможное перемещение системы $\delta \mathbf{r}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Отметим сначала, что если для всякого возможного перемещения

$$\sum_\nu \rho_\nu \delta r_\nu = \delta t \sum_\nu \rho_\nu^2 = 0$$

то все $\rho_\nu \equiv 0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Пусть далее, на всяком возможном перемещении

$$\sum_\nu (\rho_{\nu x} \delta x_\nu + \rho_{\nu y} \delta y_\nu + \rho_{\nu z} \delta z_\nu) = \sum_\nu (R_{\nu x} \delta x_\nu + R_{\nu y} \delta y_\nu + R_{\nu z} \delta z_\nu)$$

Подставляя в это уравнение δx_ν, δy_ν, δz_ν (1.7), в силу независимости δq_i $(i = 1, \ldots, k)$ получим k уравнений вида

$$\sum_\nu (\rho_{\nu x} A_{\nu i} + \rho_{\nu y} B_{\nu i} + \rho_{\nu z} C_{\nu i}) = \sum_\nu (R_{\nu x} A_{\nu i} + R_{\nu y} B_{\nu i} + R_{\nu z} C_{\nu i}) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

к которым присоединим p уравнений

$$\sum_\nu (\rho_{\nu x} a_{s\nu} + \rho_{\nu y} b_{s\nu} + \rho_{\nu z} c_{s\nu}) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, p)$$

Таким образом, для $3n$ неизвестных $\rho_{\nu x}$, $\rho_{\nu y}$, $\rho_{\nu z}$ получаем систему $3n$ линейных неоднородных уравнений. Определитель этой системы уравнений не равен нулю, так как в противном случае система соответствующих однородных уравнений имела бы нетривиальное решение, иными словами, существовала бы система сил $\rho_\nu \not\equiv 0$. для которой

$$\sum_\nu \rho_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0,$$

что, как отмечено выше, невозможно. Следовательно, существует одна и только одна система величин ρ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, обладающих указанными свойствами. На основании сказанного ясно, что силу реакции $\mathbf{R}_\nu$, действующую на точку P_ν, можно единственным образом разложить на две силы $\mathbf{N}_\nu$ и ρ_ν, обладающих следующими свойствами:

1) на всяком возможном перемещении системы δr_ν

$$\sum_\nu \mathbf{N}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \tag{1.9}$$

2) векторы $\rho_\nu \delta t$ находятся среди возможных перемещений, причем

$$\sum_\nu \rho_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = \tau$$

Силу $\mathbf{N}_\nu$ называют силой связи, силу ρ_ν — силой трения; проекции их на оси координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} N_{\nu x} &= \sum_{s=1}^{p} \lambda_s a_{s\nu}, \qquad & N_{\nu y} &= \sum_{s=1}^{p} \lambda_s b_{s\nu}, \qquad & N_{\nu z} &= \sum_{s=1}^{p} \lambda_s c_{s\nu} \\ \rho_{\nu x} &= \sum_{i=1}^{k} \mu_i A_{\nu i}, & \rho_{\nu y} &= \sum_{i=1}^{k} \mu_i B_{\nu i}, & \rho_{\nu z} &= \sum_{i=1}^{k} \mu_i C_{\nu i} \end{aligned} \tag{1.10}$$

с одинаковыми для всех точек системы коэффициентами λ_s и μ_i. Отметим, что сила связи не равна, вообще говоря, нормальной реакции [1].

Если в момент времени t известны положения и скорости точек системы и действующие на них заданные силы $\mathbf{F}_\nu$ (x_ν, y_ν, z_ν), то силы связи

$\mathbf{N}_\nu$ определяются и будут одними и теми же, независимо от того, обладает ли данная система трением или нет.

Действительно, уравнения движения точек можно записать в виде

$$\begin{aligned} m_\nu x_\nu'' &= X_\nu + \sum_s \lambda_s a_{s\nu} + \sum_i \mu_i A_{\nu i} \\ m_\nu y_\nu'' &= Y_\nu + \sum_s \lambda_s b_{s\nu} + \sum_i \mu_i B_{\nu i} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \\ m_\nu z_\nu'' &= Z_\nu + \sum_s \lambda_s c_{s\nu} + \sum_i \mu_i C_{\nu i} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Подставляя определяемые этими уравнениями ускорения x_ν'', y_ν'', z_ν'' в уравнения связей (1.3), получаем систему p уравнений, не содержащих сил трения и определяющих коэффициенты λ_s $(s = 1, \ldots, p)$ в функциях времени, координат и скоростей точек системы, а также заданных сил X_ν, Y_ν, Z_ν.

Следовательно, для систем без трения знания заданных сил $\mathbf{F}_\nu$ при заданных начальных условиях вполне достаточно для определения движения системы и сил реакций связей $\mathbf{N}_\nu$.

В случае системы с трением для определения ее движения, помимо заданных сил, необходимо знать также силы трения или, по крайней мере, сумму элементарных работ реакций на возможных перемещениях.

Силы трения определяются экспериментально. Поэтому при исследовании движения систем с трением, кроме заданных сил, нужно считать известными, вообще говоря, выражения для коэффициентов μ_i в зависимости от λ_s, q_j, q_j', t; вид этих k функций находится эмпирически [1].

Для начальных условий q_i°, $q_j^{\circ\prime}$, t°, соответствующих трению покоя и удовлетворяющих некоторым соотношениям вида

$$h_\varkappa(q_j, q_j', t) = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, m) \tag{1.12}$$

названные функции будут недостаточно определенными. Для таких начальных условий коэффициенты μ_i будут непрерывными функциями X_ν, Y_ν, Z_ν, имеющими различные выражения в зависимости от того, удовлетворяют или нет функции X_ν, Y_ν, Z_ν некоторым неравенствам [1], зависящим от рассматриваемых частных значений q_j°, $q_j^{\circ\prime}$, t°.

Говорят [1], что закон трения системы известен, если экспериментальные данные определяют коэффициенты μ_i в функции λ_s при любых начальных условиях и в функции X_ν, Y_ν, Z_ν при особых начальных условиях, удовлетворяющих соотношениям (1.12).

Имея данные выражения для μ_i $(i = 1, \ldots, k)$, можно заменить в них λ_s $(s = 1, \ldots, p)$ их значениями, полученными указанным выше способом, и представить коэффициенты μ_i в виде некоторых функций времени, координат и скоростей точек системы, а также заданных сил. Стало быть, станут известными и силы трения, определяемые формулами (1.10), как функции указанных величин.

Таким образом, если закон трения известен, то для описания движения системы имеем $3n$ уравнений (1.11), к которым надлежит присоединить p уравнений связей (1.1), (1.2) и k дополнительных соотношений, получаемых из закона трения.

2. Пусть закон трения системы известен. По принципу Даламбера в каждый момент времени t существует равновесие между заданными силами $\mathbf{F}_\nu$, реакциями связей $\mathbf{R}_\nu = \mathbf{N}_\nu + \rho_\nu$ и силами инерции $-m_\nu \mathbf{w}_\nu$

$$\mathbf{F}_\nu + \mathbf{N}_\nu + \rho_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{w}_\nu\,(x_\nu'', y_\nu'', z_\nu'')$ — вектор ускорения точки P_ν в действительном движении системы.

Если сообщить системе произвольное возможное перемещение, то сумма элементарных работ всех этих сил будет равна нулю, откуда с учетом условия (1.9) получаем уравнение

$$\sum_\nu \{(X_\nu + \rho_{\nu x} - m_\nu x_\nu'')\,\delta x_\nu + (Y_\nu + \rho_{\nu y} - m_\nu y_\nu'')\,\delta y_\nu + (Z_\nu + \rho_{\nu z} - m_\nu z_\nu'')\,\delta z_\nu\} = 0 \tag{2.2}$$

выражающее, что при движении системы с трением в любой момент времени сумма элементарных работ заданных сил, сил трения и сил инерции на всяком возможном перемещении равна нулю. И, наоборот, если для некоторого совместного со связями движения системы выполняется уравнение (2.2), то, складывая его с уравнением (1.9) и пользуясь аксиомой освобождаемости, придем к уравнениям (2.1).

Следовательно, уравнение (2.2) можно считать общим уравнением динамики для систем с трением, т. е. уравнением, представляющим собой необходимое и достаточное условие соответствия совместного со связями движения системы заданной системе сил при известном законе трения системы.

Сравнивая уравнение (2.2) с выражением принципа Эйлера—Лагранжа для системы без трения

$$\sum_{\nu=1}^{n} \{(X_\nu - m_\nu x_\nu'')\,\delta x_\nu + (Y_\nu - m_\nu y_\nu'')\,\delta y_\nu + (Z_\nu - m_\nu z_\nu'')\,\delta z_\nu\} = 0 \tag{2.3}$$

видим, что систему с трением можно трактовать как систему без трения при условии присоединения к заданным силам $\mathbf{F}_\nu\,(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ новых активных сил, геометрических равных силам трения $\rho_\nu\,(\rho_{\nu x}, \rho_{\nu y}, \rho_{\nu z})$.

Исходя из уравнения (2.2), нетрудно получить обычным путем [2] другой основной принцип механики — принцип наименьшего принуждения Гаусса для систем с трением. Этот принцип можно сформулировать следующим образом.

Движение системы материальных точек, стесненных связями с трением и подверженных любым влияниям, в каждое мгновение происходит с наименьшим возможным принуждением, если в качестве меры принуждения, примененного в течение бесконечно малого промежутка времени, принять сумму произведений массы каждой точки на квадрат величины ее отклонения от того положения, которое она бы заняла, если бы была свободной и находилась под действием заданных сил и сил, геометрически равных силам трения.

Пусть $\gamma_\nu\,(\gamma_{\nu x}, \gamma_{\nu y}, \gamma_{\nu z})$ — вектор ускорения точки P_ν системы в каком-либо мыслимом по Гауссу движении системы, т. е. движении, удовлетворяющем условиям наложенных на систему связей и условиям постоянства координат x_ν, y_ν, z_ν и скоростей x_ν', y_ν', z_ν' точек системы для данного момента времени t.

Легко видеть, что векторы $\mathbf{w}_\nu - \gamma_\nu$ находятся среди возможных перемещений системы [5] $\delta \mathbf{r}_\nu$, т. е. удовлетворяют уравнениям

$$\sum_\nu [a_{s\nu}(x_\nu'' - \gamma_{\nu x}) + b_{s\nu}(y_\nu'' - \gamma_{\nu y}) + c_{s\nu}(z_\nu'' - \gamma_{\nu z}) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, p) \quad (2.4)$$

Согласно принципу Гаусса, среди всех мыслимых ускорений действительные ускорения точек системы с трением обращают в минимум функцию (2.5)

$$A = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \left\{\left(\frac{X_\nu + \rho_{\nu x}}{m_\nu} - x_\nu''\right)^2 + \left(\frac{Y_\nu + \rho_{\nu y}}{m_\nu} - y_\nu''\right)^2 + \left(\frac{Z_\nu + \rho_{\nu z}}{m_\nu} - z_\nu''\right)^2\right\}$$

и наоборот, условия минимума функции A по ускорениям, удовлетворяющим условиям (1.3), приводят к уравнениям движения системы. Действительно, из равенства (2.5) находим

$$-\delta A = \sum_\nu \{ (X_\nu + \rho_{\nu x} - m_\nu x_\nu'')\,\delta x_\nu'' + (Y_\nu + \rho_{\nu y} - m_\nu y_\nu'')\,\delta y_\nu'' + $$
$$+ (Z_\nu + \rho_{\nu z} - m_\nu z_\nu'')\,\delta z_\nu''\} = 0$$

Здесь

$$\delta x_\nu'' = x_\nu'' - \gamma_{\nu x}, \qquad \delta y_\nu'' = y_\nu'' - \gamma_{\nu y}, \qquad \delta z_\nu'' = z_\nu'' - \gamma_{\nu z}$$

Умножая уравнения (2.4) на неопределенные множители λ_s, суммируя по всем s от 1 до p и складывая сумму с последним уравнением, получаем уравнения движения системы

$$m_\nu x_\nu'' = X_\nu + \sum_s \lambda_s a_{s\nu} + \rho_{\nu x}, \qquad m_\nu y_\nu'' = Y_\nu + \sum_s \lambda_s b_{s\nu} + \rho_{\nu y}$$
$$m_\nu z_\nu'' = Z_\nu + \sum_s \lambda_s c_{s\nu} + \rho_{\nu z} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

к которым надлежит присоединить p уравнений связей (1.1) и (1.2) и k заранее заданных дополнительных соотношений.

Уравнения движения систем с трением можно представить также в форме уравнений Аппеля.

Дифференцируя два раза по времени t уравнения (1.5) и заменяя в правых частях полученных уравнений $q_{l-p_2+1}'', \ldots, q_l''$ их выражениями через $q_1'', \ldots, q_k''$, полученными из уравнений неинтегрируемых связей (1.2), будем иметь

$$x_\nu'' = \sum_{i=1}^k A_{\nu i}\, q_i'' + \ldots, \qquad y_\nu'' = \sum_{i=1}^k B_{\nu i}\, q_i'' + \ldots$$
$$z_\nu'' = \sum_{i=1}^k C_{\nu i}\, q_i'' + \ldots$$

Здесь и далее многоточия обозначают невыписанные слагаемые, не зависящие от $q_1'', \ldots, q_k''$.

Используя последние формулы, выражение (2.5) представим в виде

$$A = S(q_1'', \ldots, q_k'') - \sum_{i=1}^{k} Q_i q_i'' - \sum_{i=1}^{k} \Phi_i q_i'' + \ldots$$

где через S обозначена энергия ускорений

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_\nu (x_\nu''^2 + y_\nu''^2 + z_\nu''^2)$$

представленная указанным образом как функция $q_1'', \ldots, q_k''$, а

$$Q_i = \sum_{\nu} (X_\nu A_{\nu i} + Y_\nu B_{\nu i} + Z_\nu C_{\nu i})$$

$$\Phi_i = \sum_{\nu} (\rho_{\nu x} A_{\nu i} + \rho_{\nu y} B_{\nu i} + \rho_{\nu z} C_{\nu i}) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

обозначают обобщенные заданные силы и силы трения.

Из условий минимума функции A по ускорениям $q_1'', \ldots, q_k''$ получаем уравнения Аппеля для систем с трением

$$\frac{\partial S}{\partial q_i''} = Q_i + \Phi_i \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

3. В выражение (2.5) для отклонения A явно входят силы трения — составляющие сил реакций связей. Более интересным, однако, является установление принципа Гаусса для систем с трением без явно входящих в функцию принуждения сил трения.

Возможные перемещения данной системы с трением определяются уравнениями (1.4). Во многих случаях из семейства возможных перемещений можно выделить множество таких перемещений, на которых силы трения работы не производят.

В самом деле, оставаясь в рамках предположения о знании закона трения системы, допустим, что среди возможных перемещений имеются перемещения, удовлетворяющие условиям

$$\rho_{\nu x} \delta x_\nu + \rho_{\nu y} \delta y_\nu + \rho_{\nu z} \delta z_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

Для существования таких перемещений, не равных тождественно нулю, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы коэффициентов $p + n$ уравнений (1.4) и (3.1) был меньше числа $3n$ вариаций δx_ν, δy_ν, δz_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, или, что то же самое, чтобы $k > n$.

Очевидно, на этих перемещениях

$$\sum_{\nu} (R_{\nu x} \delta x_\nu + R_{\nu y} \delta y_\nu + R_{\nu z} \delta z_\nu) = 0 \tag{3.2}$$

Множество возможных перемещений, удовлетворяющих условиям (3.1), назовем для сокращения (c)-перемещениями [3].

Для любых (c)-перемещений уравнение (2.2) принимает вид

$$\sum_{\nu} \{(X_\nu - m_\nu x_\nu'') \delta x_\nu + (Y_\nu - m_\nu y_\nu'') \delta y_\nu + (Z_\nu - m_\nu z_\nu'') \delta z_\nu = 0 \tag{3.3}$$

Реакции связей не входят в это уравнение, и оно играет роль принципа для систем с трением, аналогичного принципу Эйлера—Лагранжа.

Перейдем к установлению вида принципа Гаусса, исходя из уравнения (3.3). Среди векторов γ_ν ускорений точки P_ν в мыслимых движениях выберем векторы γ_ν^c такие, что векторы $\mathrm{w}_\nu - \gamma_\nu^c$ находятся среди

(c)-перемещений, т. е. удовлетворяют условиям

$$\rho_{\nu x}\delta x_\nu'' + \rho_{\nu y}\delta y_\nu'' + \rho_{\nu z}\delta z_\nu'' = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

где

$$\delta x_\nu'' = x_\nu'' - \gamma_{\nu x}^c, \qquad \delta y_\nu'' = y_\nu'' - \gamma_{\nu y}^c, \qquad \delta z_\nu'' = z_\nu'' - \gamma_{\nu z}^c$$

Для таких мыслимых (c)-движений уравнение (3.3) принимает вид

$$\sum_\nu m_\nu \left\{\left(x_\nu'' - \frac{X_\nu}{m_\nu}\right)(x_\nu'' - \gamma_{\nu x}^c) + \left(y_\nu'' - \frac{Y_\nu}{m_\nu}\right) \times \right.$$
$$\left. \times\, (y_\nu'' - \gamma_{\nu y}^c) + \left(z_\nu'' - \frac{Z_\nu}{m_\nu}\right)(z_\nu'' - \gamma_{\nu z}^c) \right\} = 0$$

которое легко представляется в виде

$$A_{w\gamma^c} + A_{wv} - A_{v\gamma^c} = 0$$

где

$$A_{wv} = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \left[\left(x_\nu'' - \frac{X_\nu}{m_\nu}\right)^2 + \left(y_\nu'' - \frac{Y_\nu}{m_\nu}\right)^2 + \left(z_\nu'' - \frac{Z_\nu}{m_\nu}\right)^2\right]$$

обозначает меру отклонения (принуждение) действительного движения системы с трением от действительного движения системы, освобожденной от всех связей; аналогично определяются $A_{w\gamma^c}$ и $A_{v\gamma^c}$.

Из этого уравнения получаем два неравенства

$$A_{w\gamma^c} < A_{v\gamma^c}, \qquad A_{wv} < A_{v\gamma^c} \tag{3.5}$$

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

1°. Отклонение действительного движения (w_ν) системы с трением от мыслимого (c)-движения меньше отклонения последнего от движения системы, освобожденной от всех связей.

2°. Отклонение действительного движения системы с трением от движения системы, освобожденной от всех связей, меньше отклонения последнего от мыслимого (c)-движения.

Отсюда следует, что в каждый момент времени действительные ускорения точек системы с трением обращают в нуль первую вариацию по ускорениям принуждения

$$A_1 = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \left\{\left(\frac{X_\nu}{m_\nu} - x_\nu''\right)^2 + \left(\frac{Y_\nu}{m_\nu} - y_\nu''\right)^2 + \left(\frac{Z_\nu}{m_\nu} - z_\nu''\right)^2\right]$$

если $\delta x_\nu''$, $\delta y_\nu''$, $\delta z_\nu''$($\nu = 1, \ldots, n$) удовлетворяют условиям (2.4) и (3.4).

Другими словами, принцип Гаусса для систем с трением формулируется так же, как для систем без трения, если ограничиться рассмотрением только мыслимых (c)-движений.

Из принципа Гаусса в такой форме легко получить обычным путем [2] уравнения движения системы с трением.

Поступила 25 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Пэнлеве П. Лекции о трении. Гостехиздат, 1954.
2. Аппель П. Теоретическая механика. Т. II. Физматгиз, 1960.
3. Четаев Н. Г. О некоторых связях с трением, ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.
4. Пожарицкий Г. К. Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
5. Четаев Н. Г. О принципе Гаусса. Изв. Физ.-матем. общ-ва при Казанском ун-те, 1932—1933, т. 6, серия 3.