ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. Л. Перельман (Москва)

Ряд задач математической физики (например, некоторые задачи электростатики [1], теории переноса и др.) приводят к решению сингулярных интегральных уравнений вида

$$a(x)\ \varphi\ (x) = f(x) + \int\limits_0^\infty k\ \left(\frac{x}{y}\right) x^\alpha y^\beta\ \varphi\ (y) dy \tag{1}$$

Здесь $a(x)$ — конечная сумма

$$a(x) = \sum_k a_k\ x^{\gamma_k} \qquad (a_k = \text{const}) \tag{2}$$

Если это необходимо, интеграл в уравнении (1) понимается в смысле главного значения Коши.

Часто достаточно получить асимптотическое разложение решения уравнения (1) при больших x. Предположим, что это разложение имеет вид

$$\varphi(x) \simeq \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{x^{an+b}} \qquad (a > 0) \tag{3}$$

Если ядро $k(x)$ не убывает при $x \to \infty$ быстрее любой степени x, то искать $\varphi(x)$ непосредственно в виде асимптотического ряда (3) не представляется возможным. Ниже излагается способ, которым в ряде случаев можно получить асимптотическое разложение решения уравнения (1).

Подвергнув (1) преобразованию Меллина (здесь и всюду ниже условия применимости преобразования Меллина [2] предполагаются выполненными), получим разностное уравнение

$$\sum_k a_k\, \Phi\, (s + \gamma_k) = F\, (s) + K\, (s + \alpha)\, \Phi\, (s + \alpha + \beta + 1) \tag{4}$$

Здесь введено обозначение

$$\Phi\, (s) = \int\limits_0^\infty \varphi\, (x)\, x^{s-1}\, dx \tag{5}$$

(и аналогично для остальных функций). Соотношение (4) имеет место в некоторой полосе комплексной плоскости $s_1 < \operatorname{Re} s < s_2$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \operatorname{Re}\ s < \sigma$, где $\sigma = s_2 - s_1 > 0$.

Введем вместо $\Phi(s)$ новую неизвестную функцию $\Psi(s)$

$$\Phi\, (s + \delta) = \Omega\, (s)\, \Psi\, (s) \quad (\operatorname{Re} s > 0) \tag{6}$$

где δ — наименьшее из чисел γ_k и $\alpha + \beta + 1$. Уравнение (2) примет вид

$$\sum_k a_k \Omega\, (s + \gamma_k - \delta)\, \Psi\, (s + \gamma_k - \delta) = F\, (s) + G\, (s)\, \Psi\, (s + \alpha + \beta - \delta + 1) \tag{7}$$

В формуле (7) обозначено

$$G\, (s) \equiv K\, (s + \alpha)\, \Omega\, (s + \alpha + \beta - \delta + 1) \tag{8}$$

Функция $\Omega(s)$ подбирается так, чтобы удовлетворялись следующие условия.

Во-первых, функция $\Omega(s)$, а также функции $\Omega(s + \gamma_k - \delta)$ и $G(s)$, являющиеся коэффициентами уравнения (7), должны иметь обратное преобразование Меллина, т. е. должен существовать интеграл

$$\omega\, (x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Omega\, (s)\, \frac{ds}{x^s} \qquad (0 < c < \sigma)$$

и аналогичные интегралы для $\Omega\, (s + \gamma_k - \delta)$ и $G(s)$.

Во-вторых, обратные преобразования Меллина всех перечисленных функций должны экспоненциально убывать при $x \to \infty$. Для выполнения последнего условия необходимо, чтобы $\Omega(s)$, все $\Omega(s+\gamma_k-\delta)$ и $G(s)$ не имели особенностей в полуплоскости $\operatorname{Re} s>0$. Функцию $\Psi(x)$, очевидно, уже можно искать в виде асимптотического разложения типа (3). Рекуррентные соотношения для коэффициентов асимптотического ряда c_n и постоянные a и b находятся из уравнения (7). Наконец, искомая функция $\Phi(x)$ легко определяется при помощи уравнения (6).

Выбор функции $\Omega(s)$, удовлетворяющей перечисленным выше условиям, не является единственным, однако соотношения между $\Omega(s)$, $G(s)$ и $\Psi(s)$ таковы, что окончательное решение $\Phi(x)$ определяется однозначно. Для конкретных интегральных уравнений нетрудно построить функцию $\Omega(s)$, имеющую нужные аналитические свойства.

Заметим, что все сказанное выше без существенных изменений допускает обобщение на более широкий класс уравнений, чем уравнение (1). Во-первых, $a(x)$ может быть линейным дифференциальным оператором вида (см. [2])

$$a(x)=\sum_k a_k x^{\gamma_k}\frac{d^{n_k}}{dx^{n_k}}$$

т. е. уравнение (1) может быть и интегродифференциальным. Во-вторых, допустимы также ядра вида

$$\begin{matrix} x^{\alpha_1}y^{\beta_1}k_1(x/y)+c_1x^{\gamma_1}y^{\delta_1} & \text{при } x>y \\ & & (\gamma_2>\gamma_1) \\ x^{\alpha_2}y^{\beta_2}k_2(x/y)+c_2x^{\gamma_2}y^{\delta_2} & \text{при } x<y \end{matrix}$$

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^x\frac{\varphi(y)}{(x-y)^{2/3}}\,dy=qx^{2/3}-\int_0^\infty P(x,y)\,\varphi(y)\,dy,\qquad P(x,y)=\begin{cases}y^{4/3} & \text{при } y<x\\ x^{4/3} & \text{при } y>x\end{cases}\tag{9}$$

К уравнению (9) сводится один из вариантов задачи о теплообмене между полубесконечной тонкой пластиной с внутренними источниками тепла и образующимся на ней ламинарным пограничным слоем [3]. Так как уравнения теории пограничного слоя применимы лишь вдали от переднего края пластины, т. е. в области $x\gg 1$ (переменная x пропорциональна отношению расстояния от передней кромки пластины к ее толщине), то достаточно найти асимптотическое решение уравнения (9) при больших x.

Ради краткости, чтобы не вводить обобщенных (полуплоскостных) преобразований Меллина, запишем неоднородный член в уравнении (9), например в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0} qx^{2/3}e^{-\varepsilon/x}$$

и переходить к пределу будем лишь после выполнения всех необходимых операций.

Описанным выше образом из уравнения (9) получим

$$\Gamma(1/3)\frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(7/3-s)}\Phi(s-1)=\lim_{\varepsilon\to 0}q\varepsilon^{s-2/3}\Gamma(2/3-s)+\frac{4}{3}\frac{1}{s(s-4/3)}\Phi(s+1)$$
$$(0<\operatorname{Re} s<2/3)\tag{10}$$

Здесь $\Gamma(s)$ — гамма-функция.

Согласно (6) введем новую неизвестную функцию при помощи соотношения

$$\Phi(s-1)=\frac{\Gamma(2s)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(2-s)}\Gamma\left(s+\frac{1}{3}\right)\Psi(s)\qquad(\operatorname{Re} s>0)\tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), получим уравнение для $\Psi(s)$

$$\Gamma(1/3)\,G_1(s)\,\Psi(s)=-\lim_{\varepsilon\to 0}q\varepsilon^{s-2/3}(s-4/3)\,\Gamma(2/3-s)+\frac{4}{3}G_2(s)\,\Psi(s+2)$$
$$(0<\operatorname{Re} s<2/3)\tag{12}$$

Здесь приняты обозначения

$$G_1(s)=\frac{\Gamma(2s)\,\Gamma(s+1/3)}{\Gamma(4/3-s)}\Gamma(s+1),\qquad G_2(s)=\frac{\Gamma(2s+4)\,\Gamma(s+3)}{\Gamma(1-s)}\Gamma\left(s+\frac{7}{3}\right)\tag{13}$$

Нетрудно показать, что функции

$$\Omega(s)=\frac{\Gamma(2s)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(2-s)}\Gamma\left(s+\frac{1}{3}\right),\qquad G_1(s),\qquad G_2(s)$$

удовлетворяют нужным условиям, а именно, обратное преобразование Меллина от этих функций существует и оригиналы экспоненциально убывают с ростом x. Действительно, при произвольном $c>0$ имеем

$$\omega(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Omega(s)\frac{ds}{x^s}=8\int\limits_0^\infty \exp-\frac{1}{z^4}J_2(2x^{1/4}z)K_2(2x^{1/4}z)\frac{dz}{z^{7/3}}\qquad(14)$$

Здесь $J_2(x)$ — функция Бесселя первого рода, второго порядка, а $K_2(x)$ — функция Макдональда второго порядка. Сходимость последнего интеграла очевидна.

Оценим скорость убывания $\omega(x)$ при $x\to\infty$. Обозначая через M максимум модуля $J_2(x)$ $(0\leqslant x<\infty)$, получим

$$|\omega(x)|\leqslant 8M\int\limits_0^\infty \exp\frac{-1}{z^4}K_2(2x^{1/4}z)\frac{dz}{z^{7/3}}\leqslant 8M\exp\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right)K_2(2x^{1/4}z)\frac{dz}{z^{7/3}}\qquad(15)$$

Так как x велико, а в последний интеграл малые z не вносят вклада, то место $K_2(2x^{1/4}z)$ можно подставить ее асимптотическое разложение. Отсюда получаем, что при $x\to\infty$ этот интеграл убывает как

$$\approx 2^{19/6}\pi M\exp\frac{3}{2\sqrt{2}}x^{1/24}\exp\left(-2^{3/2}x^{1/6}\right)$$

Из неравенств (15) немедленно следует нужная оценка для $\omega(x)$.

Для $G_1(s)$ и $G_2(s)$ доказательство проводится аналогично. Ищем функцию $\psi(x)$ в виде асимптотического ряда

$$\psi(x)\approx\sum_{n=0}^\infty\frac{c_n}{x^{an+b}}$$

Из уравнения (12) получаем $a=2$, $b={}^8/_3$, а для коэффициентов c_n— рекуррентные соотношения

$$c_{n+1}=\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)D\left(2n+\frac{8}{3}\right)c_n\qquad(n=0,1,\ldots),\qquad c_0=-\frac{q}{4}\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(16/3)\,\Gamma(11/3)}$$

Здесь

$$D(s)\equiv\frac{G_1(s)}{G_2(s)}=-\frac{1}{2^4}\frac{1}{p(s)}\frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(4/3-s)}\qquad(16)$$

$$p(s)=(s+2)\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{4}{3}\right)(s+1)^2\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)$$

Окончательно из соотношения (11) для $\varphi(x)$ получим

$$\varphi(x)\simeq\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(4n+16/3)\,\Gamma(2n+11/3)\,\Gamma(2n+3)}{\Gamma(-2n-2/3)}\frac{c_n}{x^{2n+8/3}}\qquad(17)$$

В заключение заметим, что для многих уравнений рассмотренного класса, встречающихся в приложениях, из комбинаций типа

$$\frac{\Gamma(2s)\,\Gamma(s+\nu)}{\Gamma(1-s+\nu)}\Gamma(s+\lambda_1)\ldots\quad\Gamma(s+\lambda_k)\qquad(\nu,\lambda_i\geqslant 0)$$

и их произведений можно построить функцию $\Omega(s)$ (см. (6) и (11)) с нужными свойствами.

Поступила 26 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М., 1948.
3. Перельман Т. Л. ИФЖ, Теплообмен в ламинарном пограничном слое при обтекании тонкой пластины с внутренними источниками. 1961, т. IV, № 5.