из которых следует, что приведенный график отличается от истинного хода нейтральной кривой при $\alpha < 1 / \sqrt{2}$ не более чем на 0.09 по R. Нетрудно показать, что при $\alpha \to 1 - 0$ нейтральная кривая асимптотически стремится к прямой $\alpha = 1$. Из неравенств (3.1) можно также вывести, что при малых α и достаточно больших R существуют положительные решения уравнения (2.6), т. е. решение (1.2) неустойчиво.

Авторы благодарят А. Н. Колмогорова за постановку задачи и ценные обсуждения результатов.

Поступала 15 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Мешалкин Л. Д. Семинар А. Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958—1959). УМН, 1960, т. XV, вып. 1, стр. 247—250.
2. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИИЛ, 1958.

ОБ УЧЕТЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПРИ ПРЕВРАЩЕНИИ ФАЗ В ЗАДАЧЕ СТЕФАНА

Ю. С. Рязанцев

(Москва)

В работах, посвященных распределению температуры в среде и движению границы раздела фаз в случае, когда начальные и граничные условия таковы, что имеет место фазовое превращение, обычно предполагается, что плотность обеих фаз одинакова. Однако большинство веществ при фазовом превращении претерпевает значительное изменение плотности (это изменение плотности на несколько порядков больше изменения плотности вследствие теплового расширения), в качестве примера приводим плотности твердой ρ_2 и жидкой ρ_1 фаз некоторых веществ.

	Fe	Cu	Zn	Al	Pb	Ag	H_2O
ρ_2	7.88	8.9	7.19	2.69	11.0	10.6	0.91
ρ_1	6.88	8.21	6.48	2.38	10.6	9.5	1.0

Пренебрежение этим эффектом может внести в решение задачи Стефана неточность. В то же время в ряде случаев изменение плотности при фазовом превращении нетрудно учесть.

Ниже учет изменения плотности при фазовом превращении проводится для задачи Стефана в классической постановке (см., например, [1]).

Пусть область $x \geqslant 0$ занята твердой фазой, имеющей постоянную температуру $u_2 = c$. Начиная с момента $t = 0$, на плоскости $x = 0$ поддерживается постоянная температура c_1. Если температура плавления твердой фазы c_* такова, что $c_1 > c_* > c$, то по твердой фазе начнет перемещаться граница фазового перехода. Будем считать, что жидкость и точка приложения постоянной температуры в процессе плавления могут перемещаться. Тогда, если плотность жидкости меньше плотности твердой фазы, область, занимаемая жидкостью, будет со временем увеличиваться не только вследствие перемещения границы раздела фаз из-за теплопроводности, но и вследствие расширения.

Из закона сохранения массы скорость движения жидкой фазы, обусловленная расширением, равна $(\rho_2 / \rho_1 - 1)d\xi / dt$, здесь $d\xi / dt$ — скорость перемещения границы раздела фаз. Задача о нахождении распределения температуры в расплаве и твердой фазе и об определении скорости движения границы раздела фаз с учетом изменения плотности при фазовом переходе сводится к решению уравнений:

для жидкой фазы

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) \frac{d\xi}{dt} \frac{\partial u_1}{\partial x} \qquad (1)$$

для твердой фазы

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \tag{2}$$

Здесь u_1, u_2 — температуры, a_1^2, a_2^2 — коэффициенты температуропроводности жидкой и твердой фазы. При этом должны выполняться условия

$$u_1 = c_1 \quad \text{при } x = -\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\xi, \; u_2 = c \quad \text{при } t = 0 \tag{3}$$

и условия на фронте плавления

$$u_1 = u_2 = 0, \qquad -k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = \lambda\rho_2 \frac{d\xi}{dt} \quad \text{при } x = \xi \tag{4}$$

Здесь k_1, k_2 — коэффициенты теплопроводности расплава и твердой фазы, λ — скрытая теплота плавления. Здесь предполагается, что $c_* = 0$, тогда $c_1 > 0$, $c < 0$. Очевидно, это не снижает общности.

Система уравнений (1), (2) с условиями (3), (4) допускает автомодельное решение для $x / \sqrt{t}$. При этом закон движения границы раздела фаз должен иметь вид $\xi = \alpha \sqrt{t}$, где α — некоторая константа.

Решение уравнения (1) имеет вид

$$u_1 = A_1 + B_1 \Phi \left[\frac{x}{2a_1\sqrt{t}} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\frac{\alpha}{2a_1}\right]$$

$$\left(\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz\right)$$

Решение уравнения (2) имеет вид

$$u_2 = A_2 + B_2 \Phi \left[\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right]$$

Используя первые из условий (3) и (4), определяем произвольные постоянные

$$A_1 = c_1, \quad B_1 = -\frac{c_1}{\Phi\left[\dfrac{\alpha\rho_2}{2a_1\rho_1}\right]}, \quad A_2 = -\frac{c_2\Phi\left[\dfrac{\alpha}{2a_2}\right]}{1 - \Phi\left[\dfrac{\alpha}{2a_2}\right]}, \quad B_2 = \frac{c_2}{1 - \Phi\left[\dfrac{\alpha}{2a_2}\right]}$$

Второе условие (4) используется для определения постоянной α; оно принимает форму

$$\frac{k_1 c_1}{a_1 \Phi\left[\dfrac{\alpha\rho_2}{2a_1\rho_1}\right]} \exp\left(-\frac{\alpha\rho_2}{2a_1\rho_1}\right)^2 + \frac{k_2 c}{a_2\left\{1 - \Phi\left[\dfrac{\alpha}{2a_2}\right]\right\}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2a_2}\right)^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda\rho_2\alpha \tag{5}$$

Решение трансцендентного уравнения (5) всегда существует при $c_1 > 0$, $c < 0$, так как при изменении α от 0 до ∞ левая часть уравнения изменяется от ∞ до $-\infty$, а правая от 0 до ∞. В случае, когда начальная температура твердой фазы равна температуре плавления ($c = 0$), формулы упрощаются. Вместо (5) для определения α получим уравнение

$$\frac{k_1 c_1}{a_1 \Phi\left[\dfrac{\alpha\rho_2}{2a_1\rho_1}\right]} \exp\left(-\frac{\alpha\rho_2}{2a_1\rho_1}\right)^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda\rho_2\alpha \tag{6}$$

Функция от α, стоящая в левой части (6), затабулирована в [1] и константа α может быть определена из (6) графически. Уравнение (6) отличается от уравнения для определения α в классическом случае [1] множителем ρ_2 / ρ_1. Нетрудно показать, что отношение величины α, найденной из (6) к той же величине, найденной в предположении $\rho_2 = \rho_1$, имеет такой же порядок величины, что и отношение ρ_2 / ρ_1.

Поступила 20 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1951, Гостехтеориздат.