ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Л. Д. Мешалкин, Я. Г. Синай

(Москва)

Хорошо известно, что исследование устойчивости ламинарного движения несжимаемой вязкой жидкости даже в простых случаях сопряжено с большими математическими трудностями. Существует однако один частный случай уравнений гидродинамики, где исследование можно провести до конца без большого труда за счет несколько идеализированных условий течения жидкости.

1. Рассмотрим систему уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости на плоскости xy

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u_x u+u_y v=-\frac{\partial p}{\partial x}+F_1+\nu\Delta u\\ \frac{\partial v}{\partial t}+v_x u+v_y v=-\frac{\partial p}{\partial y}+F_2+\nu\Delta v\\ u_x+v_y=0\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь u и v — проекции скорости на оси x и y; плотность всюду считается равной единице; предполагается, что на жидкость действует массовая внешняя сила $\mathbf{F}$, компоненты которой по осям x и y, соответственно, суть

$$F_1=\gamma\sin y,\qquad F_2=0\qquad(\gamma>0)$$

Идеализация будет состоять в том, что вместо обычно рассматриваемых граничных условий типа прилипания будут исследоваться решения системы (1.1) в классе функций с периодом 2π по y. Система (1.1) имеет стационарное решение

$$u=\frac{\gamma}{\nu}\sin y,\qquad v=0,\qquad p=\text{const}\tag{1.2}$$

Профиль скоростей, даваемый этим решением, имеет точку перегиба. Поэтому естественно ожидать, что при больших числах Рейнольдса это течение будет неустойчиво. Задача исследования устойчивости ламинарного решения (1.2) системы (1.1) была поставлена А. Н. Колмогоровым на руководимом им семинаре [1].

Исследование устойчивости решения (1.2) проводится методом бесконечно малых возмущений. Предположение

$$\int_{-\pi}^{\pi}u(x,y)\,dy=0$$

обеспечивающее отсутствие систематического сдвига, позволяет ввести функцию тока периодическую по y.

Функция тока бесконечно малых возмущений $\varphi=\varphi(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению (см., например, [2], § 1, 2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi+\frac{\gamma}{\nu}\sin y\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\Delta\varphi)=\nu\Delta^2\varphi\tag{1.3}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа. Условие периодичности φ по y позволяет использовать ряды Фурье. Ищем φ в виде

$$\varphi(x,y,t)=e^{\sigma t}\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{i(\alpha x+ny)}$$

Тогда из (1.3) для коэффициентов c_n получаем систему уравнений

$$\frac{2\nu}{\gamma\alpha}(\alpha^2+n^2)[\nu(\alpha^2+n^2)+\sigma]c_n+c_{n-1}[\alpha^2-1+(n-1)^2]-c_{n+1}[\alpha^2-1+(n+1)^2]=0\tag{1.4}$$

В работе исследуется знак действительной части тех значений σ, при которых существует нетривиальное решение системы (1.4), стремящееся к нулю при $|n|\to\infty$. Из получаемых далее результатов можно сделать следующие выводы.

1) При $\alpha>1$ действительная часть σ всегда отрицательна, т. е. решение (1.2) устойчиво.

2) Величины σ, имеющие неотрицательную действительную часть, обязательно действительньны. Тем самым подтверждается обычно предполагаемый принцип изменения устойчивости (см., например, [2], § 2, 1, стр. 27).

3) Из приводимого графика нейтральной кривой видно, что при возрастании числа Рейнольдса неустойчивость наступает при малых значениях α.

2. Выведем уравнения для σ. Введем следующие обозначения:

$$a_n = a_n(\nu, \sigma) = \frac{2\nu}{\gamma}\frac{(\alpha^2+n^2)[\nu(\alpha^2+n^2)+\sigma]}{\alpha(\alpha^2-1+n^2)}$$
$$d_n = d_n(\nu, \sigma) = c_n(\alpha^2-1+n^2)$$

Тогда система (1.4) перепишется так:

$$a_n d_n + d_{n-1} - d_{n+1} = 0 \tag{2.1}$$

Предположим, что система (2.1) имеет решение $\{d_n\}$, удовлетворяющее поставленным требованиям. Легко видеть, что тогда d_k ни при одном значении k не может обращаться в нуль. В самом деле, если $d_k = 0$ и $k > 0$, то $d_{k'} \neq 0$ при $k' \neq k$, в противном случае было бы тривиальное решение. Следовательно, положив $\rho_i = d_i / d_{i-1}$ при $i > k+1$, получаем из (2.1)

$$a_n + \frac{1}{\rho_n} = \rho_{n+1} \quad \text{при } n > k+1 \tag{2.2}$$

Решение системы (2.2) можно записать в виде

$$\rho_n = a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{\cdots + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\vdots} + \cfrac{1}{a_{k+2} + \cfrac{1}{a_{k+1} + \cfrac{1}{\rho_{k+1}}}}}}$$

Предложим, что σ действительно и положительно. Тогда $a_n > 0$ при $n > 0$ и $\rho_n > a_{n-1} \to \infty$, что невозможно. Если σ комплексна, то систему (2.1) можно рассматривать отдельно для действительных и мнимых частей коэффициентов a_n. Те же рассуждения для действительной части a_n приводят к требуемому результату. Случай $d_k = 0$ при $k < 0$ рассматривается аналогично.

Итак, для произвольных n можно положить

$$\rho_n = \rho_n(\nu, \sigma) = \frac{d_n}{d_{n-1}} \quad (n > 0), \qquad \mathring{\rho}_n = \mathring{\rho}_n(\nu, \sigma) = \frac{d_{n-1}}{d_n} \quad (n < 0) \tag{2.3}$$

Следующее утверждение будет основным для дальнейшего. Если

$$\rho_1 = -\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}} \tag{2.4}$$

то $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Если равенство (2.4) не выполняется, то $|\rho_n| \to \infty$.

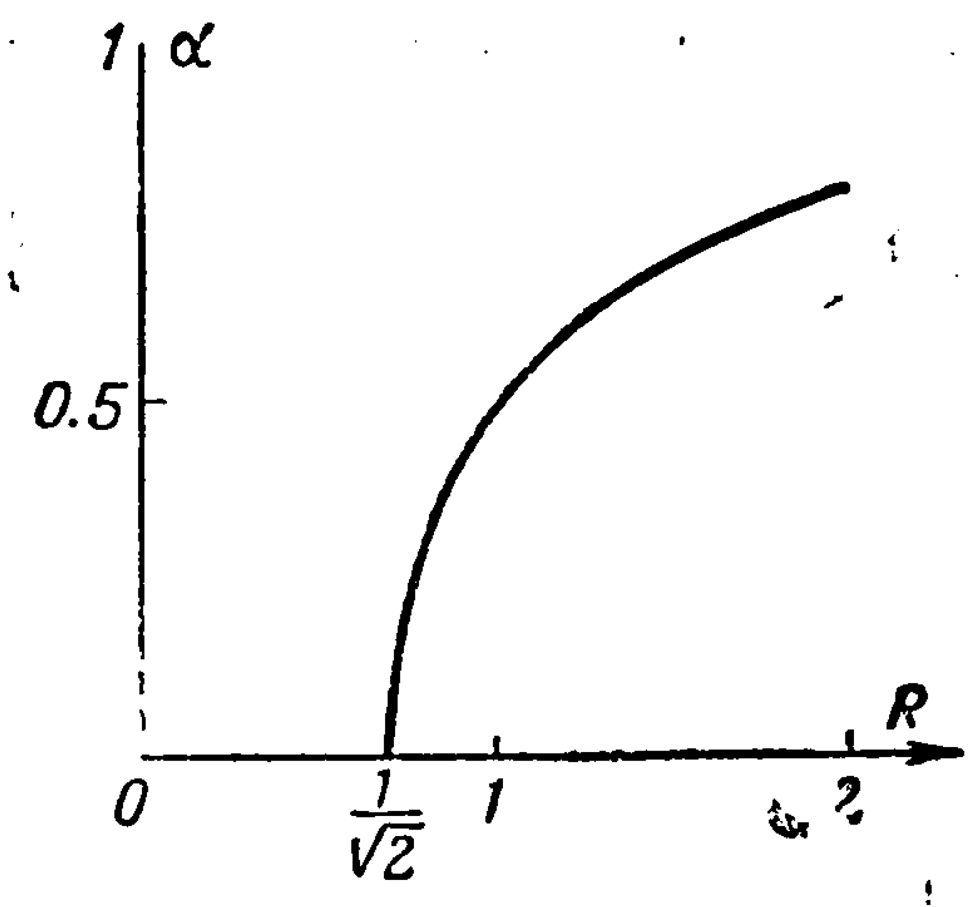
Действительно, из (2.2) следует, что при $\operatorname{Re}\sigma > 0$, если $\operatorname{Re}\rho_n \geqslant 0$, то и $\operatorname{Re}\rho_{n+k} \geqslant 0$ при $k > 0$, или $\operatorname{Re}\rho_{n+k} > \operatorname{Re} a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, что невозможно.

Следовательно, необходимо, чтобы $\operatorname{Re}\rho_n < 0$ при всех n. Для любого фиксированного σ найдется число k такое, что $\operatorname{Re} a_n > 1$ для $n > k$, так как $\operatorname{Re} a_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Для $n > k$ условие $\operatorname{Re}\rho_{n+1} < 0$ вместе с уравнением (2.2) означает, что ρ_n должно быть заключено на комплексной плоскости внутри круга радиуса $1/\operatorname{Re} a_n$, касающегося мнимой оси и лежащего в левой полуплоскости. Повторным использованием уравнения (2.2) можно показать, что ρ_{n-1} должно находиться внутри некоторого круга, лежащего в левой полуплоскости и имеющего радиус меньший, чем $1/\operatorname{Re} a_n$, и т. д. В результате получается, что ρ_k должно лежать в некотором круге в левой полуплоскости, имеющем радиус меньше $1/\operatorname{Re} a_n$. Пересечение кругов, построенных для ρ_k при различных n, не может содержать более одной точки, так как радиусы этих кругов стремятся к нулю при $n \to \infty$. Легко видеть, что значение ρ_k, определенное формулой

$$\rho_k = -\cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1} + \cfrac{1}{a_{k+1} + \cdots}}}$$

принадлежит всем этим кругам и, следовательно, будет единственно возможным значением для ρ_k. Используя снова уравнение (2.2), нетрудно получить формулу (2.4). Тем самым высказанное утверждение доказано.

Для отрицательных n при помощи таких же рассмотрений получаем, что единственное значение ρ_{-1}, имеющее смысл для рассматриваемой задачи, дается формулой



$$\rho_{-1} = \cfrac{1}{a_{-2} + \cfrac{1}{a_{-3} + \cdots}} = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}} \tag{2.5}$$

Из уравнений (2.1) при $n = 0$ следует, что

$$\rho_1 = a_0 + \frac{1}{a_{-1} + \rho_{-1}}$$

или в силу (2.4) и (2.5)

$$-\frac{a_0}{2} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} \tag{2.6}$$

Отсюда вытекает: для того чтобы система (2.1) имела решение стремящееся к нулю при $|n| \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы σ удовлетворяла уравнению (2.6).

3. Анализ уравнения (2.6) позволяет сразу же сделать некоторые выводы об устойчивости.

Имеет место следующий факт. Если $\alpha > 1$, то уравнение (2.6) не имеет решений σ, для которых $\operatorname{Re}\sigma > 0$.

В самом деле, если $\alpha > 1$, то $\operatorname{Re}(-a_0/2) < 0$. С другой стороны, выражение

$$\rho_{1,k}(\nu, \sigma) = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

при любом k и $\operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$ имеет положительную действительную часть. Следовательно, при этом равенство (2.6) невозможно.

Уточнение этого рассуждения показывает, что при $\alpha < 1$ уравнение (2.6) при $\operatorname{Re}\sigma > 0$ имеет только действительные решения. В самом деле, предположим для определенности, что $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$. Тогда $\arg a_n \geqslant \arg a_{n+1}$ при $n \geqslant 0$, причем равенство возможно лишь при $\arg\sigma = 0$. Но при любом k

$$\arg \rho_{1,k} \leqslant \arg a_1, \qquad \text{если } \arg \rho_{1,k} < \pi$$
$$2\pi - \arg \rho_{1,k} \leqslant \arg a_1, \qquad \text{если } \arg \rho_{1,k} > \pi$$

Поэтому высказанное утверждение доказано.

Если γ и ν изменять так, чтобы их отношение оставалось постоянным (то профиль ламинарного течения будет неизменным. На фигуре изображен примерный ход нейтральной кривой в случае $2\nu/\gamma = 1$. Построение графика основано на неравенствах

$$\rho_{1,2} < \rho < \rho_{1,1} \tag{3.1}$$

из которых следует, что приведенный график отличается от истинного хода нейтральной кривой при $\alpha < 1/\sqrt{2}$ не более чем на 0.09 по R. Нетрудно показать, что при $\alpha \to 1-0$ нейтральная кривая асимптотически стремится к прямой $\alpha = 1$. Из неравенств (3.1) можно также вывести, что при малых α и достаточно больших R существуют положительные решения уравнения (2.6), т. е. решение (1.2) неустойчиво.

Авторы благодарят А. Н. Колмогорова за постановку задачи и ценные обсуждения результатов.

Поступала 15 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Мешалкин Л. Д. Семинар А. Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958—1959). УМН, 1960, т. XV, вып. 1, стр. 247—250.
2. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИИЛ, 1958.

ОБ УЧЕТЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПРИ ПРЕВРАЩЕНИИ ФАЗ В ЗАДАЧЕ СТЕФАНА

Ю. С. Рязанцев

(Москва)

В работах, посвященных распределению температуры в среде и движению границы раздела фаз в случае, когда начальные и граничные условия таковы, что имеет место фазовое превращение, обычно предполагается, что плотность обеих фаз одинакова. Однако большинство веществ при фазовом превращении претерпевает значительное изменение плотности (это изменение плотности на несколько порядков больше изменения плотности вследствие теплового расширения), в качестве примера приводим плотности твердой ρ_2 и жидкой ρ_1 фаз некоторых веществ.

	Fe	Cu	Zn	Al	Pb	Ag	H_2O
ρ_2	7.88	8.9	7.19	2.69	11.0	10.6	0.91
ρ_1	6.88	8.21	6.48	2.38	10.6	9.5	1.0

Пренебрежение этим эффектом может внести в решение задачи Стефана неточность. В то же время в ряде случаев изменение плотности при фазовом превращении нетрудно учесть.

Ниже учет изменения плотности при фазовом превращении проводится для задачи Стефана в классической постановке (см., например, [1]).

Пусть область $x \geqslant 0$ занята твердой фазой, имеющей постоянную температуру $u_2 = c$. Начиная с момента $t = 0$, на плоскости $x = 0$ поддерживается постоянная температура c_1. Если температура плавления твердой фазы c_* такова, что $c_1 > c_* > c$, то по твердой фазе начнет перемещаться граница фазового перехода. Будем считать, что жидкость и точка приложения постоянной температуры в процессе плавления могут перемещаться. Тогда, если плотность жидкости меньше плотности твердой фазы, область, занимаемая жидкостью, будет со временем увеличиваться не только вследствие перемещения границы раздела фаз из-за теплопроводности, но и вследствие расширения.

Из закона сохранения массы скорость движения жидкой фазы, обусловленная расширением, равна $(\rho_2/\rho_1 - 1)d\xi/dt$, здесь $d\xi/dt$ — скорость перемещения границы раздела фаз. Задача о нахождении распределения температуры в расплаве и твердой фазе и об определении скорости движения границы раздела фаз с учетом изменения плотности при фазовом переходе сводится к решению уравнений:

для жидкой фазы

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) \frac{d\xi}{dt} \frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{1}$$