

Диаграммы A, a (фигура) соответствуют линейно упругому телу, диаграммы B, b — несжимаемому жесткопластическому телу, если $m \rightarrow \infty$.

Тело с ограниченной сжимаемостью [3] соответствует комбинации свойств A, c . Идеально затвердевающие тела [4,5] — комбинации C, b при $m \rightarrow \infty$.

Можно также рассмотреть упругое тело, способное сопротивляться объемной деформации лишь до определенного предела (комбинация A, b) и т. д.

Авторы признательны Л. М. Качанову за ценные замечания.

Поступила 16 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Krietzellen. ZAMM, 1928, Bd. 8.
2. Гениев Г. А. Вопросы динамики сыпучих сред. ЦНИИСК, Научное сообщение, Гостройиздат, 1958, вып. 2.
3. Prager W. Elastic solids of limited Compressibility, Astes IX c. Int. de mec. Appl., Bruxelles, 1957, t. V.
4. Prager W. On ideal locking materials, Trans. Soc. Reology, 1957, 1.
5. Пвлев Д. Д. К теории идеально затвердевающих сред. ДАН СССР, 1960, т. 130, № 4.

ВОЗМОЖНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОНЯТИЙ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ НА СИСТЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

М. Р. Короткина

(Москва)

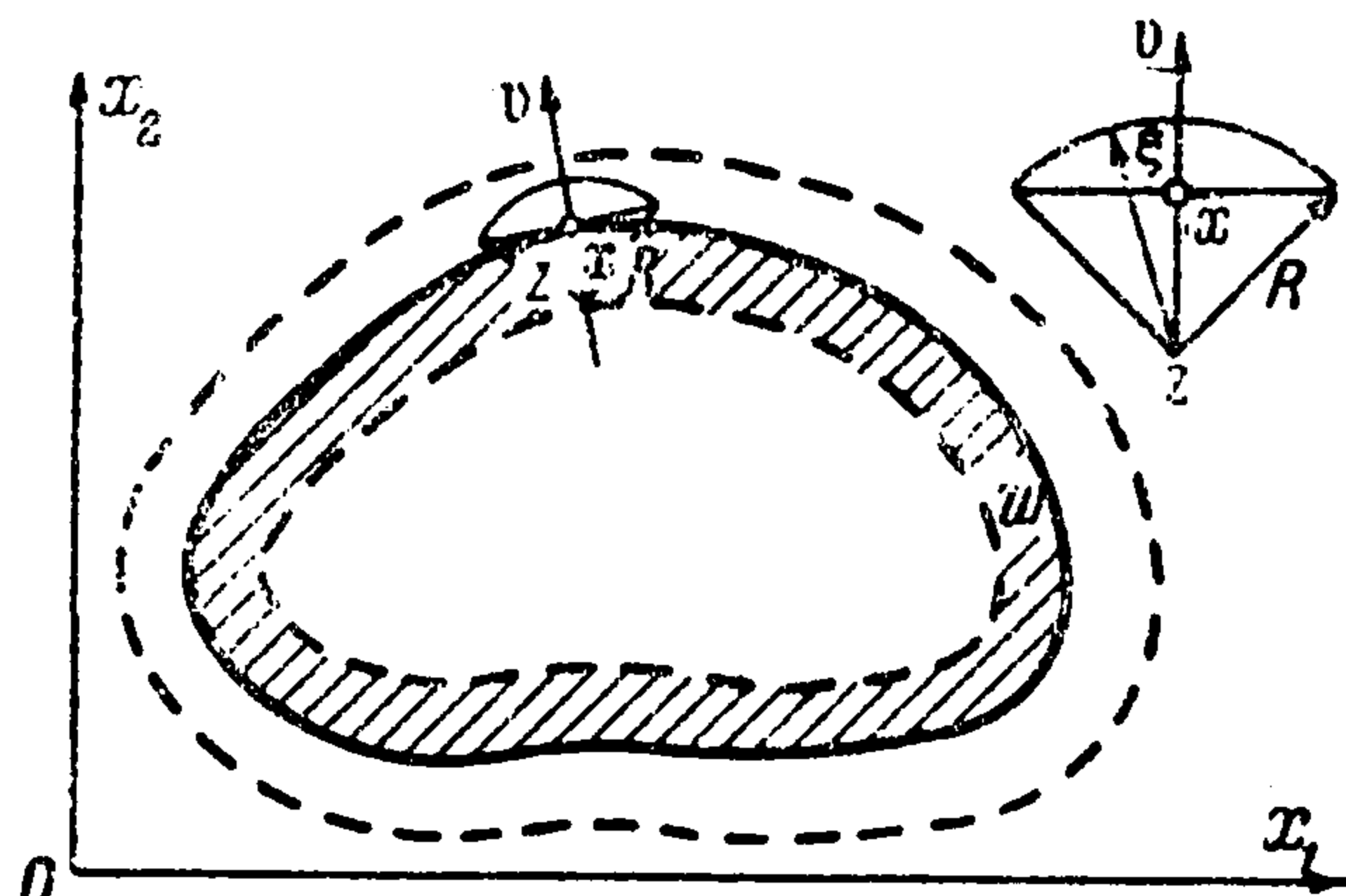
Рассмотрим систему большого числа взаимодействующих частиц. Примем, что сила взаимодействия между двумя частицами может быть выражена через потенциал парного взаимодействия. В этом случае силу $F(t, x)$, действующую на каждую частицу, при действии заданного внешнего поля $\alpha(t, x)$, можно определить в виде [1]

$$F(t, x) = \alpha(t, x) + \frac{1}{P(t, x)} \int p(t, x, \xi) \operatorname{grad}_x Q(|x - \xi|) d\xi, \quad d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

$$(Q(r) \neq 0 \quad \text{при } 0 < r < R, \quad Q(r) = 0 \quad \text{при } r \geq R)$$

Здесь $Q(r)$ — потенциал парного взаимодействия между двумя частицами, $p(t, x, \xi)$ — плотность совместного распределения двух частиц, $P(t, x)$ — плотность распределения одной частицы

$$P(t, x) = \int p(t, x, \xi) d\xi$$



Фиг. 1

Выделим в этой системе взаимодействующих частиц некоторый объем V . На каждую частицу из этого объема действует сила $F(t, x)$. Если ввести поверхностные силы $f_v(t, x)$, т. е. отбросить частицы, лежащие в объеме V , а их суммарное действие заменить средним напряжением $f_v(t, x) A_v(t, x)$, где $A_v(t, x)$ — плотность частиц на поверхности, то уравнения движения этого объема, используя силу $F(t, x)$, можно представить в виде

$$\int_V F(t, x) P(t, x) dx = \int_{\Sigma} f_v(t, x) A_v(t, x) ds \quad (dx = dx_1 dx_2 dx_3) \quad (1)$$

Уравнения проекции главного момента количества движения

$$\int_V P(t, \mathbf{x}) [\mathbf{x} \times \mathbf{F}(t, \mathbf{x})] dx = \int_{\Sigma} A_v(t, \mathbf{x}) [\mathbf{x} \times \mathbf{f}_v(t, \mathbf{x})] ds \quad (2)$$

Используя выражение силы $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ через потенциал парного взаимодействия $Q(r)$ и, принимая $\alpha(t, \mathbf{x}) \equiv 0$, объемный интеграл в уравнении (1) можно преобразовать к поверхностному (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) P(t, \mathbf{x}) dx &= \int_W dx \int_{w(\mathbf{x})} p(t, \mathbf{x}, \xi) \text{grad}_x Q(|\mathbf{x} - \xi|) d\xi = \\ &= \int_{\Sigma} ds \int_0^R dh \int_{R_1}^R r^2 \text{grad} Q(r) dr \int_0^{\vartheta} \sin \theta d\theta \times \\ &\times \int_0^{2\pi} p[t, x_1 - hl_1, x_2 - hl_2, x_3 - hl_3; (r, \theta, \varphi)] d\varphi \\ \mathbf{v}\mathbf{x}_1^\circ &= l_1, \quad \mathbf{v}\mathbf{x}_2^\circ = l_2, \quad \mathbf{v}\mathbf{x}_3^\circ = l_3, \quad R_1 = \frac{h}{\cos \theta} \\ \vartheta &= \arccos \frac{h}{R} \quad (0 \leq h \leq R) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $ds = ds_1 ds_2$ — элемент поверхности; $w(\mathbf{z})$ — объем сегмента, который отсекает касательная плоскость, проведенная в точке \mathbf{x} , от шара радиуса R с центром в точке \mathbf{z} ; объем W представляет собой слой объема V толщины R .

Итак, среднее напряжение в точке \mathbf{x} , используя (3), можно определить следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_v(t, \mathbf{x}) A_v(t, \mathbf{x}) &= \int_0^R dh \int_{R_1}^R r^2 \text{grad} Q(r) dr \int_0^{\vartheta} \sin \theta d\theta \times \\ &\times \int_0^{2\pi} p[t, x_1 - hl_1, x_2 - hl_2, x_3 - hl_3; (r, \theta, \varphi)] d\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

Легко проверить, что так определенное напряжение удовлетворяет системе уравнений (2).

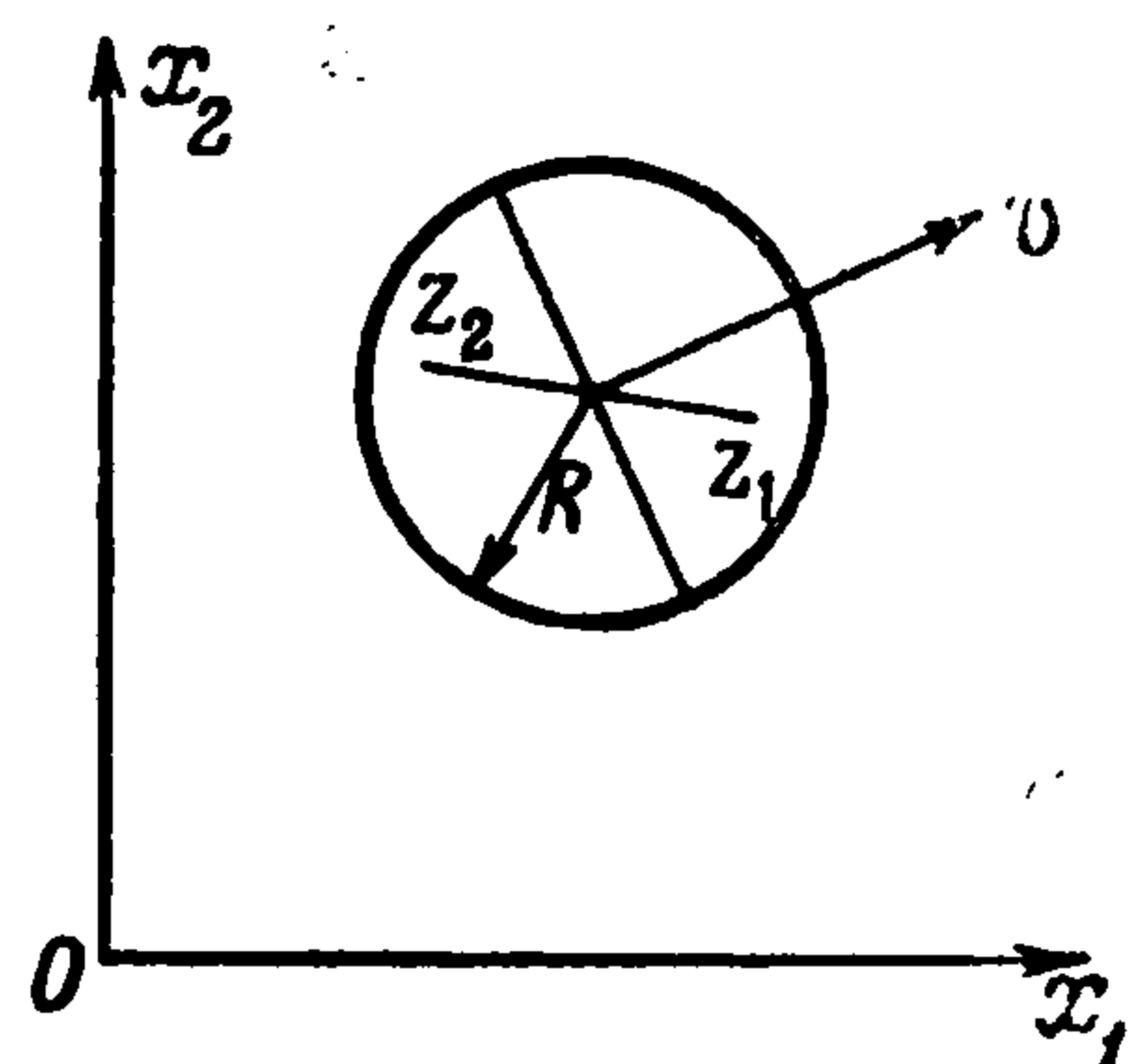
Для полного определения напряжения в точке \mathbf{x} необходимо определить поверхностную плотность $A_v(t, \mathbf{x})$, которая очевидно должна являться некоторым функционалом от объемной плотности $P(t, \mathbf{x})$. Эту плотность можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} A_v(t, \mathbf{x}) &= \int_0^R dh \int_{R_1}^R r^2 dr \int_0^{\vartheta} \sin \theta d\theta \times \\ &\times \int_0^{2\pi} p[t, x_1 - hl_1, x_2 - hl_2, x_3 - hl_3; (r, \theta, \varphi)] d\varphi \end{aligned}$$

В данном определении среднего напряжения объем $w(\mathbf{z})$ нужно было бы брать как объем, который отсекает поверхность Σ , ограничивающую объем V , от шара радиуса R с центром в точке \mathbf{z} , принадлежащей объему W . Среднее напряжение определено строго в данном случае для площадки с нормалью \mathbf{v} .

Как легко видеть, если принять плотность совместного распределения частиц $p(t, \mathbf{x}, \xi)$ равномерной, то сила $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \equiv 0$ во всех точках объема, занимаемого системой взаимодействующих частиц; среднее напряжение будет одинаковым во всех точках и направлено по нормали к той площадке, для которой оно определяется. Таким образом, сила $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ и касательные составляющие напряжения в системе взаимодействующих частиц появляются как следствие неравномерного распределения частиц.

Впервые использовал центральные силы для определения напряжения Коши [2-3]. Если определить среднее напряжение, как предложил Коши, то в рассматриваемом случае (фиг. 2) имеем



Фиг. 2

$$f_{\nu}(t, \mathbf{x}) A_{\nu}(t, \mathbf{x}) = \int_0^R dr_1 \int_0^R \text{grad } Q(r_1 + r_2) dr_2 \int_0^{\pi/2} r_2^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} p[t, \mathbf{x} + (r_1, \theta, \varphi); \mathbf{x} + (r_2, \theta + \pi, \varphi + \pi)] d\varphi$$

Итак, определение среднего напряжения по Коши отличается от определения среднего напряжения в виде (4) только суммированием по z_2 . В последнем случае z_2 может изменяться только по нормали ν , в случае определения по Коши z_2 изменяется внутри полусферы радиуса R .

Можно показать, что для получения среднего давления в идеальном газе нужно подсчитать суммарное изменение количества движения в результате соударения частиц, расположенных с положительной стороны нормали, с частицами, лежащими с отрицательной стороны нормали, причем линия соударения должна проходить через точку \mathbf{x} , в которой определяется среднее давление [4]. В определении среднего напряжения по Коши имеет место такой же подсчет изменения количества движения.

Легко проверить, что изменение количества движения по Коши не удовлетворяет уравнениям равновесия (1) и моментам количества движения (2).

В работах Коши [2,3] показано существование упругого потенциала. Повторяя весь ход рассуждения Коши, попробуем получить упругий потенциал. Рассуждения будем проводить (фиг. 3) для фиктивных частиц z_1 и z_2 . В рассматриваемом случае каждая из частиц блуждает, поэтому геометрической точке \mathbf{x} нельзя поставить в соответствие определенную физическую частицу.

Рассмотрим в точке \mathbf{x} некоторую площадку, положение которой определим нормалью ν . Напряжение будем определять по Коши. Рассмотрим стационарное состояние частиц, которое определим условием $dP(t, \mathbf{x}) / dt = 0$. Стационарное состояние частиц примем за начальное состояние и среднее напряжение, подсчитанное для этого состояния, назовем средним начальным напряжением

$$\sigma_{\nu_0}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\nu_0}(\mathbf{x}) A_{\nu_0}(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, \xi) \Phi(r) \mathbf{b}^{\circ} d\xi dr_1$$

$$\Phi(r) = \frac{\partial Q(r)}{\partial r}, \quad r = r_1 + r_2 = |\mathbf{x} - \xi|, \quad \mathbf{b}^{\circ} = \frac{\mathbf{x} - \xi}{|\mathbf{x} - \xi|}$$

Пусть на данную систему взаимодействующих частиц действует внешнее поле и эти фиктивные частицы получают некоторые перемещения, причем эти перемещения должны удовлетворять условию, чтобы эти частицы все время лежали на прямой, проходящей через точку \mathbf{x} . Если ввести такие фиктивные перемещения, то среднее напряжение в точке \mathbf{x} в момент t для данной площадки с направлением ν определится в виде

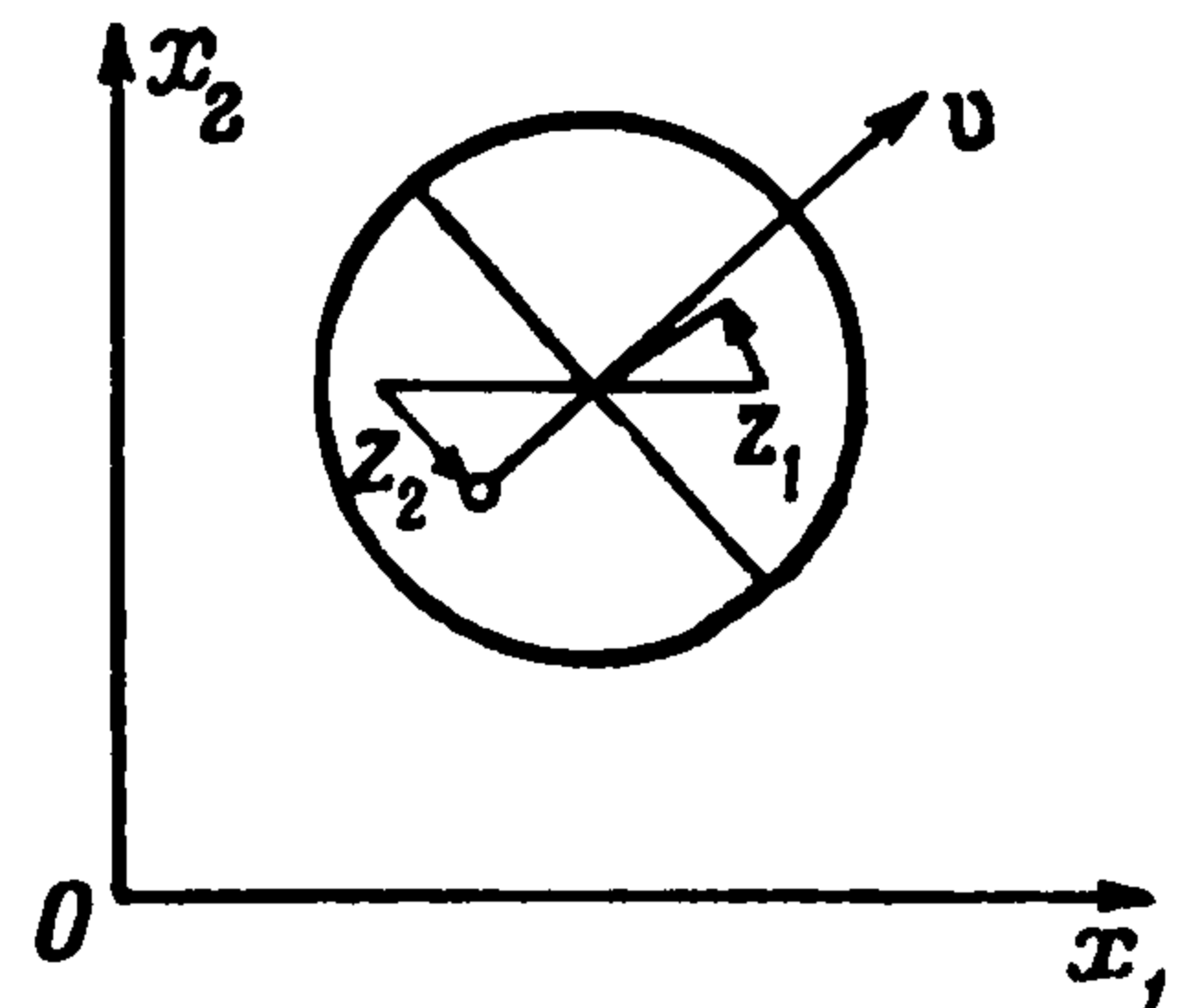
$$\sigma_{\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \int \Phi(r) p(t, \mathbf{x}, \xi) \mathbf{b}^{\circ} d\xi dr_1 = \int \Phi(r + \delta r) p(\mathbf{x}, \xi) (\mathbf{b}^{\circ} + \delta \mathbf{b}^{\circ}) d\xi dr_1. \quad (5)$$

Итак, для каждого направления ν в данной точке \mathbf{x} получим три уравнения для определения четырех величин: δr , $\delta \alpha_1$, $\delta \alpha_2$, $\delta \alpha_3$, где $\delta \alpha_i$ — приращение направляющих косинусов вектора \mathbf{b}° . Из известного для направляющих косинусов соотношения

$$(\alpha_1 + \delta \alpha_1)^2 + (\alpha_2 + \delta \alpha_2)^2 + (\alpha_3 + \delta \alpha_3)^2 = 1,$$

считая все $\delta \alpha_i$ достаточно малыми, получим дополнительное уравнение

$$\alpha_1 \delta \alpha_1 + \alpha_2 \delta \alpha_2 + \alpha_3 \delta \alpha_3 = 0 \quad (6)$$



Фиг. 3

Будем считать величины δr , $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, $\delta\alpha_3$ достаточно малыми, тогда уравнения (5) можно представить в виде

$$\sigma_{\nu}(t, \mathbf{x}) = \sigma_{\nu_0}(\mathbf{x}) + \int \Phi'(r) \delta r \mathbf{b}^{\circ} p(\mathbf{x}, \xi) d\xi dr_1 + \int \Phi(r) p(\mathbf{x}, \xi) \delta \mathbf{b}^{\circ} d\xi dr_1 \quad (7)$$

Так как \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 в результате перемещения остаются на одной и той же прямой, проходящей через точку \mathbf{x} , то, вводя тензор конечных деформаций $\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} , легко получить

$$\delta r = r \sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{x}), \quad \varepsilon(t, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{x}) \quad (8)$$

$$\delta\alpha_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\partial u_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} - \alpha_i \varepsilon(t, \mathbf{x}) - \varepsilon(t, \mathbf{x}) \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\partial u_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{r^2}{4} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 u_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} \alpha_j \alpha_k$$

Здесь $u_i(t, \mathbf{x})$ — компоненты вектора фиктивных перемещений.

В случае малых деформаций соотношения (8) перейдут в соотношения

$$\delta r = r \sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j e_{ij}(t, \mathbf{x}), \quad e_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

$$\delta\alpha_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\partial u_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} - \alpha_i e(t, \mathbf{x}), \quad e(t, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j e_{ij}(t, \mathbf{x})$$

Уравнение (6), что легко проверить, при малых перемещениях будет выполнено. Используя (9), соотношения (7) можно представить по форме аналогично выражению упругого потенциала

$$\mathbf{A}_{\nu}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^3 a_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{b}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \left(\frac{\partial u_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} \right)$$

$$\mathbf{A}_{\nu}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int \Phi(r) \mathbf{b}^{\circ} [p(t, \mathbf{x}, \xi) - p(\mathbf{x}, \xi)] d\xi dr_1$$

$$a_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int \Phi(r) \alpha_i p(\mathbf{x}, \xi) d\xi dr_1$$

$$\mathbf{b}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int [r\Phi'(r) - \Phi(r)] \mathbf{b}^{\circ} \alpha_i \alpha_j p(\mathbf{x}, \xi) d\xi dr_1 \quad (10)$$

Итак, из трех уравнений (10) нужно получить три функции перемещения $u_1(t, \mathbf{x})$, $u_2(t, \mathbf{x})$, $u_3(t, \mathbf{x})$. Но так как перемещения не должны зависеть от нормали \mathbf{v} , то уравнения (10) не всегда будут иметь место. Остается открытым вопрос, какие условия нужно наложить на потенциал парного взаимодействия $Q(r)$, плотность совместного распределения $p(\mathbf{x}, \xi)$ и внешнее поле $\alpha(t, \mathbf{x})$, чтобы имели место уравнения (10).

Приношу благодарность А. А. Ильюшину за поставленную задачу и критические замечания.

Поступила 1 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. В л а с о в А. А. Теория многих частиц, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. С а u c h y А. L. Sur la condensation et la dilatation des corps solides. Exercices de mathématiques, 1827, т. 2, 42.
3. С а u c h y А. L. De la pression ou tension dans un système de points matériels. Exercices de mathématiques, 1828, т. 3, 213.
4. К о р о т к и н а М. Р. Некоторый анализ кинетического уравнения Максвелла—Больцмана и возможная постановка задачи, учитывающей отражение от границ. Вестник МГУ, 1961, № 4.