ОБ УЧЕТЕ СЖИМАЕМОСТИ В ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова
(Воронеж)

Необратимые деформации сплошных сред могут сопровождаться изменением объема. Ниже рассматривается вопрос об учете сжимаемости в теории идеально пластических сред, дается обобщение теоремы Мизеса [1] об ассоциированном законе пластического течения для сжимаемых сред.

Отметим, что вопросы учета сжимаемости идеально пластических (сыпучих) сред рассматривались в [2].

1. Представим некоторое изотропное идеально пластическое тело, находящееся под действием некоторой нагрузки. Обозначим соответственно через σ_{ij}, e_{ij} — компоненты напряжения и деформации.

Предположим, что в результате эксперимента на всестороннее давление установлена зависимость

$$\sigma = f(e) \quad (e = \varphi(\sigma)), \qquad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \qquad e = \frac{1}{3}e_{ii} \tag{1.1}$$

Предположим далее, что необратимое формоизменение рассматриваемой среды происходит при достижении напряжениями некоторой комбинации значений

$$\Phi(\sigma, \Sigma_2, \Sigma_3) = 0 \tag{1.2}$$

Здесь Σ_2, Σ_3 — соответственно второй и третий инварианты девиатора напряжений.

Приращение работы напряжений σ_{ij} на приращениях деформации de_{ij} будет иметь вид

$$dA = \sigma_{ij}\, de_{ij} = \sigma_{ij}\, de_{ij}' + 3\sigma de \tag{1.3}$$

где здесь и всюду штрих наверху приписан компонентам тензора-девиатора.

Следуя Мизесу [1] будем искать экстремум выражения (1.3), считая, что деформированное состояние фиксированно и варьируются лишь компоненты тензора напряжений. Учитывая условия (1.2), (1.1), будем искать экстремум функционала

$$dA = \sigma_{ij}\, de_{ij} - d\lambda_1 \Phi(\sigma, \Sigma_2, \Sigma_3) - d\lambda_2(\sigma - f(e)) \tag{1.4}$$

Из (1.4) будем иметь

$$de_{ij}' + \delta_{ij}\, de = d\lambda_1 \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_2}\frac{\partial\Sigma_2}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_3}\frac{\partial\Sigma_3}{\partial\sigma_{ij}}\right] + d\lambda_2 \frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_{ij}} \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует

$$3de = d\lambda_1 \frac{d\Phi}{d\sigma} + d\lambda_2 \tag{1.6}$$

Исключая из (1.6) и (1.5) величину $d\lambda_2$, получим

$$de_{ij}' = d\lambda_1 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_2}\frac{\partial\Sigma_2}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_3}\frac{\partial\Sigma_3}{\partial\sigma_{ij}}\right) \tag{1.7}$$

Переходя к скоростям деформации ε_{ij}, будем иметь

$$\varepsilon_{ij}' = \lambda \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_2}\frac{\partial\Sigma_2}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_3}\frac{\partial\Sigma_3}{\partial\sigma_{ij}}\right), \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{de_{ij}}{dt}, \quad \lambda = \frac{d\lambda_1}{dt} \tag{1.8}$$

Таким образом, может быть сформулирована следующая теорема: если, следуя Мизесу [1], определять ассоциированный закон пластического течения исходя из представлений экстремальности приращения работы напряжений при заданном деформированном состоянии, то для сжимаемых идеально пластических сред, условие пластичности которых задано в виде (1.2), компоненты девиатора скоростей деформации прямо пропорциональны частным производным по компонентам напряжений части условия пластичности, зависящей от второго и третьего инвариантов девиатора напряжений, причем выражение ассоциированного закона пластического течения (1.8) совершенно не зависит от закона сжимаемости.

2. Рассмотрим, например, случай плоской деформации идеально пластического материала при условии пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4c^2, \qquad (c = \mathrm{const}) \tag{2.1}$$

Пусть при этом имеет место зависимость $\sigma = 3Ke$ (K — const). Задача будет статически определимой и сжимаемость никакого влияния на исследование уравнений для напряжений не оказывает. Известно, что уравнения для определения напряжений принадлежат к гиперболическому типу, уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.2}$$

Вдоль характеристик имеют место соотношения

$$\omega \pm 2\theta = \mathrm{const} \ \left(\omega = \frac{1}{2c}(\sigma_x + \sigma_y)\right) \tag{2.3}$$

Здесь θ — угол, образованный первым главным напряжением с осью x.

Согласно (1.7), (1.8) закон пластического течения можно записать в виде

$$de_x = d\lambda_1(\sigma_x - \sigma_y) + \frac{d\sigma}{3K}, \qquad de_y = d\lambda_1(\sigma_y - \sigma_x) + \frac{d\sigma}{3K}$$
$$de_{xy} = 2d\lambda_1\tau_{xy} \tag{2.4}$$

или

$$\varepsilon_x = \lambda(\sigma_x - \sigma_y) + \frac{\dot\sigma}{3K}, \qquad \varepsilon_y = \lambda(\sigma_y - \sigma_x) + \frac{\dot\sigma}{3K}$$
$$\varepsilon_{xy} = 2\lambda\tau_{xy} \tag{2.5}$$

Точка наверху означает дифференцирование по времени.

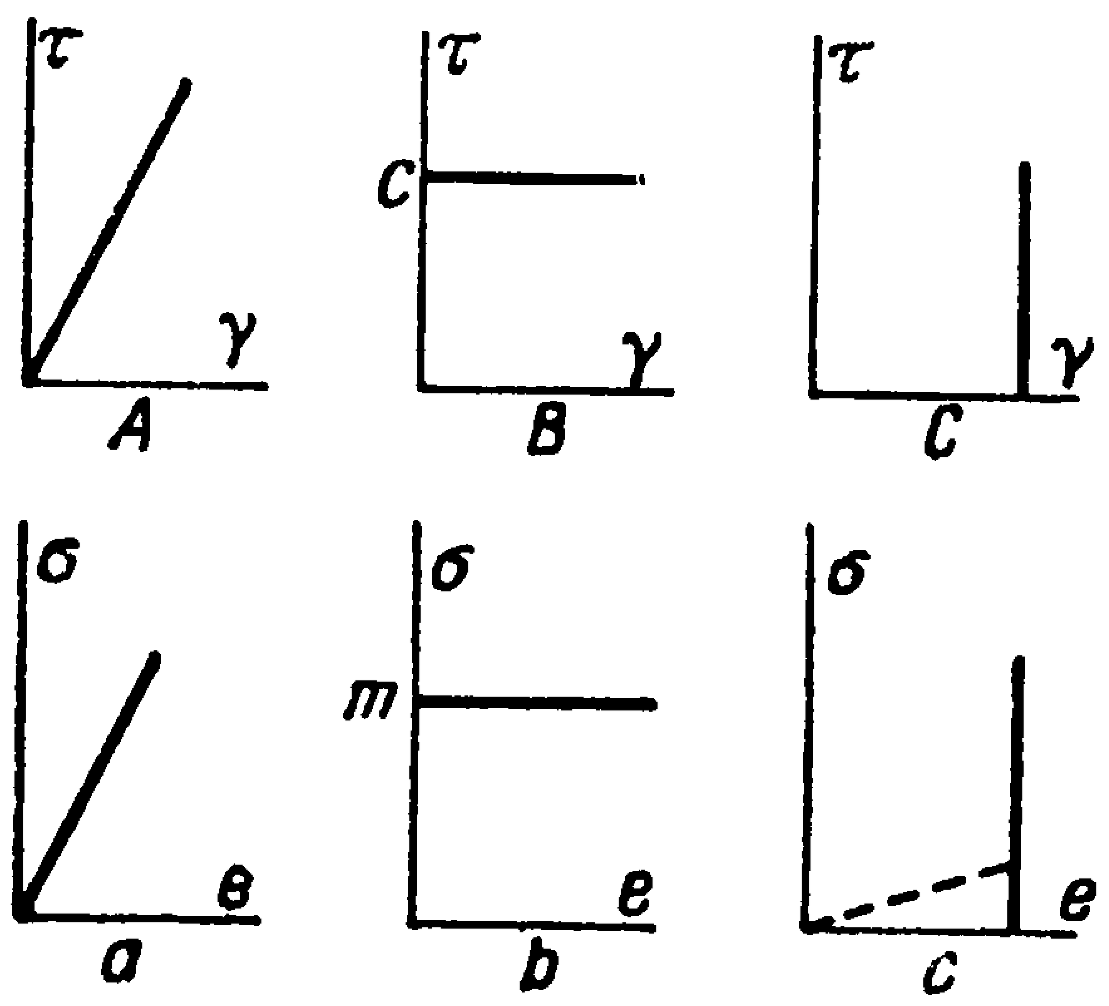
Если перейти к компонентам скоростей перемещений u, v вдоль осей x и y, то, исключая из соотношений (2.5) величину λ, получим два уравнения, которые принадлежат к гиперболическому типу, характеристики которых совпадают с (2.2). Вдоль характеристик имеют место соотношения

$$\mathrm{tg}\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right)du - dv \pm \frac{2}{3K}\frac{\dot\sigma\, dx}{\cos 2\theta} = 0 \tag{2.6}$$

или

$$dU - V\,d\theta + \frac{2\dot\sigma}{3K}\frac{\cos(\theta + \pi/4)}{\cos 2\theta}dx = 0$$
$$dV + U\,d\theta + \frac{2\dot\sigma}{3K}\frac{\cos(\theta - \pi/4)}{\cos 2\theta}dy = 0 \tag{2.7}$$

Здесь U, V — компоненты скорости перемещений вдоль характеристик.



3. Сделаем несколько замечаний. Прежде всего отметим, что, если с самого начала не накладывать никаких ограничений на сжимаемость, то ассоциированный закон течения будет иметь вид

$$\varepsilon_{ij} = \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} \tag{3.1}$$

Как следствие из (3.1) будет иметь место «ассоциированная» сжимаемость материала

$$3\varepsilon = \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} \tag{3.2}$$

Вообще говоря, зависимость между сдвиговыми (девиаторными) компонентами и компонентами, характеризующими деформацию объема, можно считать независимыми. Результаты простейших экспериментов представлены на фигуре (ясно, указанные случаи далеко не охватывают представляющиеся возможности). Через τ, γ обозначены соответственно касательное напряжение и сдвиг, через σ, e — соответственно средние напряжение и деформация.

Диаграммы A, a (фигура) соответствуют линейно упругому телу, диаграммы B, b — несжимаемому жесткопластическому телу, если $m \to \infty$.

Тело с ограниченной сжимаемостью [3] соответствует комбинации свойств A, c. Идеально затвердевающие тела [4,5] — комбинации C, b при $m \to \infty$.

Можно также рассмотреть упругое тело, способное сопротивляться объемной деформации лишь до определенного предела (комбинация A, b) и т. д.

Авторы признательны Л. М. Качанову за ценные замечания.

Поступила 16 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. M i s e s R. Mechanik der plajtischen Formanderung won Krijtollen. ZAMM, 1928, Bd. 8.
2. Г е н и е в Г. А. Вопросы динамики сыпучих сред. ЦНИИСК, Научное сообщение, Госстройиздат, 1958, вып. 2.
3. P r a g e r W. Elajtic solids of limited Compressibity, Astes IX c. Jut. de mec. Appl., Bruxelles, 1957, t. V.
4. P r a g e r W. On ideal locking matherials, Trans. Soc. Reology, 1957, 1.
5. И в л е в Д. Д. К теории идеально затвердевающих сред. ДАН СССР, 1960, т. 130, № 4.

ВОЗМОЖНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОНЯТИЙ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ НА СИСТЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

М. Р. Короткина

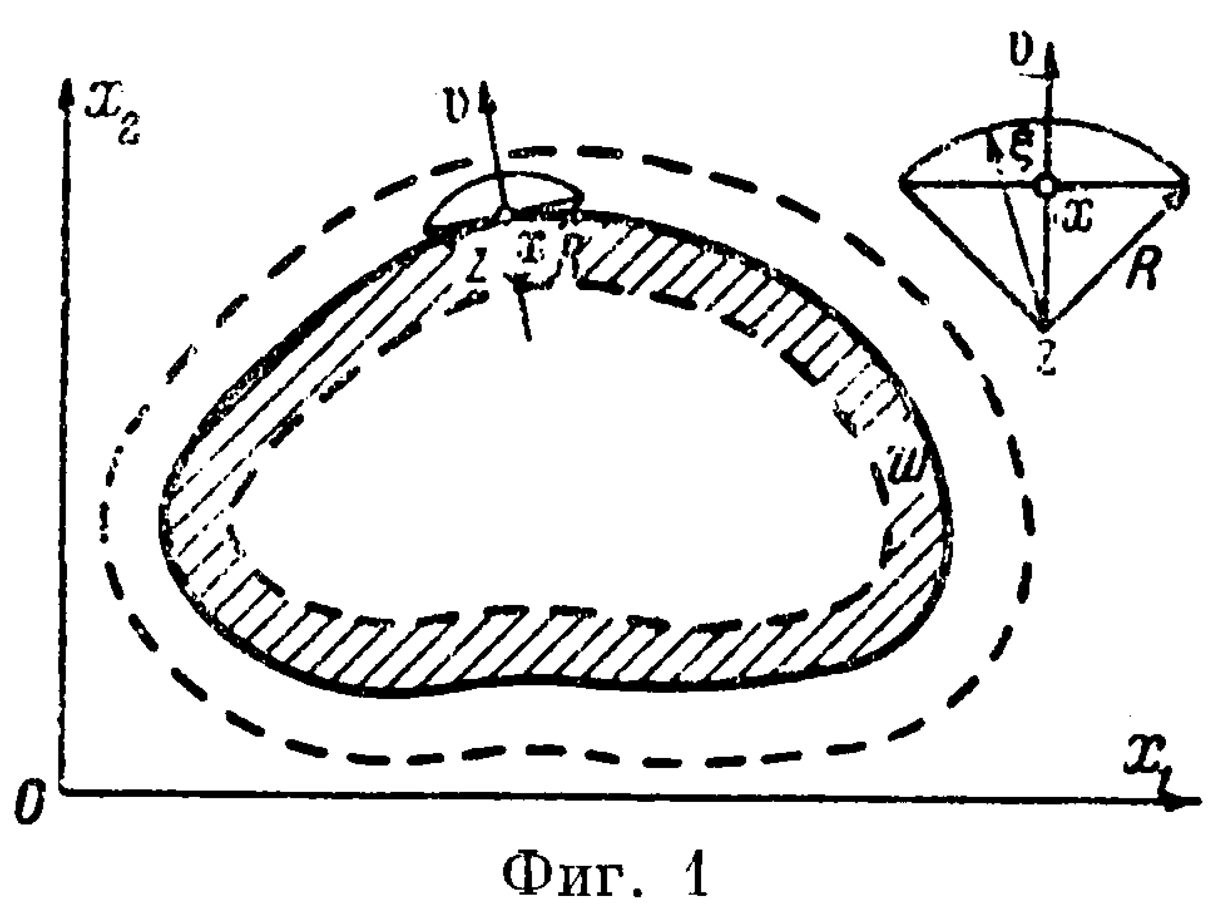
(Москва)

Рассмотрим систему большого числа взаимодействующих частиц. Примем, что сила взаимодействия между двумя частицами может быть выражена через потенциал парного взаимодействия. В этом случае силу $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, действующую на каждую частицу, при действии заданного внешнего поля $\boldsymbol{\alpha}(t, \mathbf{x})$, можно определить в виде [1]

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{P(t, \mathbf{x})} \int p(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \operatorname{grad}_x Q(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)\, d\xi, \qquad d\xi = d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$$

$$(Q(r) \neq 0 \quad \text{при } 0 < r < R, \qquad Q(r) = 0 \quad \text{при } r \geqslant R)$$

Здесь $Q(r)$ — потенциал парного взаимодействия между двумя частицами, $p(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ — плотность совместного распределения двух частиц, $P(t, \mathbf{x})$ — плотность распределения одной частицы



Фиг. 1

$$P(t, \mathbf{x}) = \int p(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, d\xi$$

Выделим в этой системе взаимодействующих частиц некоторый объем V. На каждую частицу из этого объема действует сила $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$. Если ввести поверхностные силы $\mathbf{f}_\nu(t, \mathbf{x})$, т. е. отбросить частицы, не лежащие в объеме V, а их суммарное действие заменить средним напряжением $\mathbf{f}_\nu(t, \mathbf{x}) A_\nu(t, \mathbf{x})$, где $A_\nu(t, \mathbf{x})$ — плотность частиц на поверхности, то уравнения движения этого объема, используя силу $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, можно представить в виде

$$\int_V \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) P(t, \mathbf{x})\, dx = \int_\Sigma \mathbf{f}_\nu(t, \mathbf{x})\, A_\nu(t, \mathbf{x})\, ds \qquad (dx = dx_1\, dx_2\, dx_3) \tag{1}$$