

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Л. Н. Тер-Мкртчян

(Ленинград)

Рассматриваются среды, у которых упругие свойства изменяются при переходе от точки к точке. Изменение упругих свойств среды может происходить непрерывно и скачкообразно, непрерывное изменение может сопровождаться скачкообразным. Последнее имеет место в искусственных слоистых материалах; в пределах каждого слоя имеет место непрерывное изменение упругих характеристик, которое сопровождается скачкообразными изменениями на границах слоев.

В дальнейшем рассматривается лишь непрерывная неоднородность сред, что соответствует классическому представлению о среде в обычной теории упругости однородных сред.

Непрерывная неоднородность может быть как изотропной, так и анизотропной. Под изотропной неоднородностью среды будет подразумеваться изотропное тело, у которого при переходе от точки к точке изменяются модули упругости, коэффициент Пуассона, но количество независимых функций, характеризующих изменимость упругих свойств, как и всегда, равно двум. Кроме того, если в какой-нибудь рассматриваемой точке выбирать различные направления, то все эти направления являются равноправными и не существует никаких преимущественных структурных направлений.

Анизотропная неоднородность вещества может быть двоякого рода. Неоднородность, проявляющаяся лишь в изменении значения упругих характеристик при переходе от точки к точке, при этом ориентировка осей, характеризующих анизотропию, одинакова для всех точек среды.

Другого рода анизотропной неоднородностью вещества будет такая, при которой направления главных осей анизотропии различно в различных точках, причем эти направления непрерывно изменяются при переходе от точки к точке; упругие характеристики вещества также непрерывно изменяются. Этот вид анизотропной неоднородности будет самым общим.

§ 1. Осесимметричная задача теории упругости неоднородных изотропных сред. Введем следующие обозначения: G^* — переменный, зависящий от координат точки модуль сдвига; E^* — переменный модуль продольной упругости; ν^* — переменный коэффициент Пуассона; λ^* — переменный модуль Ламе; θ — объемное изменение. Пусть ξ — составляющая перемещения в радиальном направлении, ζ — составляющая перемещения по направлению оси z , являющейся осью симметрии задачи. Зависимость между компонентами тензора напряжения и деформации сохраняет свой обычный вид и в случае неоднородной среды

$$\sigma_r = 2G^* \frac{\partial \xi}{\partial r} + \lambda^* \theta, \quad \sigma_z = 2G^* \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \lambda^* \theta \quad (1.1)$$

$$\sigma_\vartheta = 2G^* \frac{\xi}{r} + \lambda^* \theta, \quad \tau_{rz} = G^* \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$$

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\xi}{r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (1.2)$$

Подставим выражения (1.1) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0 \quad (1.3)$$

Получим систему дифференциальных уравнений относительно ξ и ζ

$$G^* \left(\Delta \xi + \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\xi}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial G^*}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial G^*}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (\lambda^* \theta) = 0$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial z} \left(\Delta \xi + \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial G^*}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial G^*}{\partial r} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda^* \theta) = 0 \quad (1.4)$$

Для определенности постановки рассматриваемой задачи необходимо, чтобы две какие-нибудь упругие характеристики неоднородной среды были заданными осесимметричными функциями координат. Эти функции принимаются следующими:

$$G^* = Ge^{\alpha z}, \quad \nu^* = \text{const} = \nu \quad (1.5)$$

где G и α — некоторые постоянные. Величина α может быть больше и меньше нуля. Введем вспомогательную функцию при помощи соотношения

$$\xi = \partial \kappa / \partial r \quad (1.6)$$

Тогда, исключая функцию ξ из системы (1.4), с учетом принятой неоднородности (1.5), получим для функции κ уравнение

$$\Delta \Delta \kappa - a \Delta \kappa + 2\alpha \frac{\partial}{\partial z} \Delta \kappa + b \frac{\partial^2 \kappa}{\partial z^2} = 0 \quad \left(a = \frac{\alpha^2 \nu}{1 - \nu}, \quad b = \frac{\alpha^2}{1 - \nu} \right) \quad (1.7)$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ дифференциальное уравнение (1.7) переходит в бигармоническое и функция κ в этом случае приводится к функции Лява.

В осесимметричной задаче наиболее интересными будут два класса задач: 1) полупространство, нагруженное по ограничивающей плоскости заданными поверхностными силами; 2) круговой цилиндр с заданными поверхностными силами по ограничивающим поверхностям. И в том и в другом случае для удовлетворения граничным условиям решение уравнения (1.7) необходимо искать в виде

$$\kappa(r, z) = e^{mz} \Phi(r) \quad (1.8)$$

где m — пока произвольные комплексные количества. Подстановка (1.8) в (1.7) дает для функции $\Phi(r)$ уравнение

$$\frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \left(\frac{k^2}{r} + \frac{1}{r^3} \right) \frac{d \Phi}{dr} + n^4 \Phi = 0 \quad (1.9)$$

Здесь

$$k^2 = 2m(m + \alpha) - a, \quad n^4 = m^2(m + \alpha)^2 \quad (1.10)$$

Уравнение (1.9) можно представить в виде

$$\left[\frac{d^2 ()}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d ()}{dr} + q_1^2 () \right] \left[\frac{d^2 ()}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d ()}{dr} + q_2^2 () \right] \Phi = 0 \quad (1.11)$$

Здесь

$$q_{1,2}^2 = \frac{k^2}{2} \pm \sqrt{\frac{k^4}{4} - n^4} \quad (1.12)$$

Дифференциальное уравнение (1.11) распадается на два

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \Phi_1}{dr} + q_1^2 \Phi_1 = 0, \quad \frac{d^2 \Phi_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \Phi_2}{dr} + q_2^2 \Phi_2 = 0 \quad (1.13)$$

Каждое из этих уравнений может быть приведено к уравнению Бесселя или к модифицированному уравнению Бесселя, в зависимости от знаков q_1^2 и q_2^2 .

Для задач класса I, т. е. для полупространства, необходимо, чтобы решение выражалось через функции Бесселя действительного аргумента.

Это обстоятельство ограничивает определенным образом рамки изменения показателя m , входящего в выражение (1.8), через который выражаются величины q_1^2 и q_2^2 согласно (1.12) и (1.10).

Для задач класса II возникают иные требования, накладываемые граничными условиями на боковых поверхностях цилиндра. Об этих ограничениях подробно речь будет идти ниже.

§ 2. Неоднородное полупространство под действием распределенной нагрузки по площади круга. Показатель m , входящий в формулу (1.8), является комплексным

$$m = t + is \quad (2.1)$$

Решение уравнений (1.13) будет выражаться через функции Бесселя и Неймана действительного аргумента, если q_1^2 и q_2^2 будут вещественными положительными количествами.

Подставим (2.1) в формулы (1.10), а затем результат в (1.12), тогда из указанного выше условия получится

$$s = \pm \sqrt{\frac{at(t+\alpha)}{a+(2t+\alpha)^2}}, \quad m_{1,2} = t \pm i \sqrt{\frac{at(t+\alpha)}{a+(2t+\alpha)^2}} \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что интервалы изменения переменной t

$$0 < t < \infty \quad \text{при } \alpha > 0, \quad -\infty < t < 0 \quad \text{при } \alpha < 0$$

Подставляя выражение (2.2) для m в (1.12), получим

$$q = (2t + \alpha) \sqrt{\frac{t(t+\alpha)}{a+(2t+\alpha)^2}} \quad (2.3)$$

Здесь принято $q_1^2 = q_2^2$, так как эти величины при условии (2.2), оказываются отличающимися одна от другой на фиксированную постоянную. Введем обозначение

$$p = \sqrt{\frac{at(t+\alpha)}{a+(2t+\alpha)^2}} \quad (2.4)$$

Общий интеграл уравнения (1.7) в функциях Бесселя и Неймана от действительного аргумента имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa = \int_0^\infty e^{tz} \{ [F_1(t) \cos pz + F_2(t) \sin pz] J_0(qr) + \\ + [F_3(t) \cos pz + F_4(t) \sin pz] N_0(qr) \} dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ и $F_4(t)$ — произвольные функции. Подставляя (2.5) в (1.6), а затем, воспользовавшись дифференциальными уравнениями (1.4), находим оба компонента вектора перемещения, выражения для которых можно представить в виде

$$\begin{aligned} \xi = \frac{\partial \kappa}{\partial r} = - \int_0^\infty e^{tz} q [F_1(t) \cos pz + F_2(t) \sin pz] J_1(qr) dt \\ \zeta = \int_0^\infty e^{tz} [\Psi_1(r, t) \cos pz + \Psi_2(r, t) \sin pz] dt \end{aligned}$$

При получении (2.6) откинута часть решения, содержащая функции Неймана, так как последние для полупространства излишни. Кроме того, приняты обозначения:

$$\Psi_1(r, t) = \frac{1}{u^2 + p^2} [u\Phi_1(r, t) + p\Phi_2(r, t)] \quad (u = t + \alpha(1 - 2\nu))$$

$$\Psi_2(r, t) = \frac{1}{u^2 + p^2} [p\Phi_1(r, t) + u\Phi_2(r, t)]$$

$$\Phi_1(r, t) = [q^2 F_1(t) - (1 - 2\nu) \sqrt{a} q F_2(t)] J_0(qr)$$

$$\Phi_2(r, t) = [q^2 F_2(t) + (1 - 2\nu) \sqrt{a} q F_1(t)] J_0(qr) \quad (2.7)$$

Компоненты тензора напряжения найдутся по формулам (1.1) после подстановки туда выражений (1.5), (2.6) и принятых сокращенных обозначений (2.7)

$$\begin{aligned} \sigma_z = \frac{2Ge^{\alpha z}}{1 - 2\nu} \int_0^\infty e^{tz} J_0(qr) \left\{ F_1(t) \left[\nu(-ta \cos pz - 2tp \sin pz - \right. \right. \\ \left. \left. - t^2 \cos pz + 2tp \sin pz + p^2 \cos pz) + \frac{(1 - \nu)}{u^2 + p^2} \cos pz (tq^2 u + \right. \right. \\ \left. \left. + tq p \sqrt{a} (1 - 2\nu) + q^2 p^2 + qp \sqrt{a} u (1 - 2\nu)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1 - \nu)}{u^2 + p^2} \sin pz (q^2 pt + q \sqrt{a} tu (1 - 2\nu) - q^2 pu - q \sqrt{a} p^2 (1 - 2\nu)) \right] + \right. \\ \left. + F_2(t) \left[\nu(-ta \sin pz + 2tp \cos pz - t^2 \sin pz - 2tp \cos pz + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p^2 \sin pz) + \frac{(1-\nu)}{u^2 + p^2} \cos pz (q^2 tp - q\sqrt{a} tu (1-2\nu) + \\
& + q^2 pu - p^2 q \sqrt{a} (1-2\nu)) + \frac{(1-\nu)}{u^2 + p^2} \sin pz (tq^2 u - \\
& - tqp \sqrt{a} (1-2\nu) - q^2 p^2 + qp \sqrt{a} u (1-2\nu)) \Big] \Big] dt \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz} = & - Ge^{\alpha z} \int_0^\infty e^{tz} q J_1(qr) \left\{ F_1(t) \left[\cos pz \left[\frac{1}{u^2 + p^2} (q^2 u + \right. \right. \right. \\
& + qp \sqrt{a} (1-2\nu)) + t \Big] + \sin pz \left[\frac{1}{u^2 + p^2} (q^2 p + qu \sqrt{a} (1-2\nu)) - p \right] \Big] + \\
& + F_2(t) \left[\cos pz \left[\frac{1}{u^2 + p^2} (q^2 p - qu \sqrt{a} (1-2\nu)) + p \right] + \right. \\
& \left. + \sin pz \left[\frac{1}{u^2 + p^2} (q^2 u - qp \sqrt{a} (1-2\nu)) + t \right] \right] \Big\} dt \quad (2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r = & 2Ge^{\alpha z} \left\{ - \int_0^\infty e^{tz} q^2 [F_1(t) \cos pz + F_2(t) \sin pz] \frac{dJ_1(qr)}{d(qr)} dt + \right. \\
& + \frac{\nu}{1-2\nu} \int_0^\infty e^{tz} J_0(qr) \left\{ F_1(t) \left[\cos pz \left[-q^2 + \frac{1}{u^2 + p^2} (q^2 tu + \right. \right. \right. \\
& + qp \sqrt{a} t (1-2\nu) + q^2 p^2 + qp \sqrt{a} (1-2\nu) u \Big] + \\
& + \frac{\sin pz}{u^2 + p^2} [q \sqrt{a} tu (1-2\nu) - q^2 p \alpha (1-2\nu) - qp^2 \sqrt{a} (1-2\nu)] \Big] + \\
& + F_2(t) \left[\frac{\cos pz}{u^2 + p^2} [2q^2 pt - q \sqrt{a} tu (1-2\nu) + q^2 p \alpha (1-2\nu) - \right. \\
& - qp^2 \sqrt{a} (1-2\nu)] + \sin pz \left[-q^2 + \frac{1}{u^2 + p^2} (tq^2 u - qp \sqrt{a} t (1-2\nu) - \right. \\
& \left. \left. \left. - q^2 p^2 + qp \sqrt{a} u (1-2\nu)) \right] \right] \Big\} \Big\} dt \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = & 2Ge^{\alpha z} \left\{ - \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{tz} q J_1(qr) [F_1(t) \cos pz + F_2(t) \sin pz] dt + \right. \\
& + \frac{\nu}{1-2\nu} \int_0^\infty e^{tz} J_0(qr) \left\{ F_1(t) \left[\cos pz \left[-q^2 + \frac{1}{u^2 + p^2} (q^2 tu + qp \sqrt{a} t (1-2\nu) + \right. \right. \right. \\
& + q^2 p^2 + qp \sqrt{a} u (1-2\nu)) \Big] + \frac{\sin pz}{u^2 + p^2} [q \sqrt{a} tu (1-2\nu) - q^2 p \alpha (1-2\nu) - \\
& - qp^2 \sqrt{a} (1-2\nu)] \Big] + F_2(t) \left[\frac{\cos pz}{u^2 + p^2} [2q^2 pt - q \sqrt{a} tu (1-2\nu) + \right. \\
& + q^2 p \alpha (1-2\nu) - qp^2 \sqrt{a} (1-2\nu)] + \sin pz \left[-q^2 + \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{1}{u^2 + p^2} (tq^2 u - qp \sqrt{a} t (1-2\nu) - q^2 p^2 + qp \sqrt{a} u (1-2\nu)) \right] \right] \Big\} \Big\} dt \quad (2.11)
\end{aligned}$$

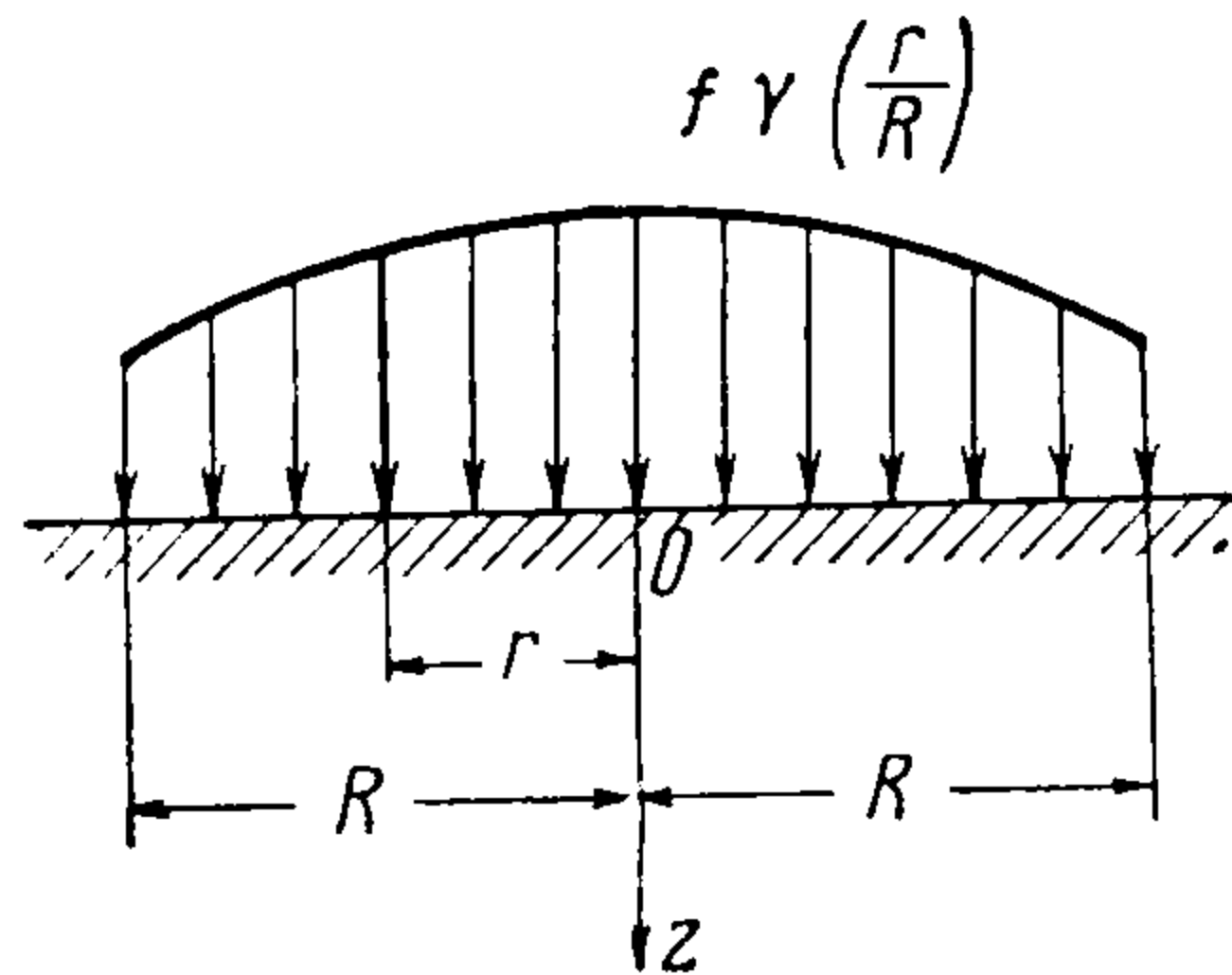
Функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$, входящие в вышеприведенные формулы, определяются из граничных условий.

Рассмотрим следующие граничные условия при $z = 0$

$$\tau_{rz} = 0 \quad \text{при } 0 < r < \infty, \quad \sigma_z = \begin{cases} -f\gamma(r/R) & \text{при } r \leq R \\ 0 & \text{при } r > R \end{cases} \quad (2.12)$$

Здесь R — радиус круга, по которому приложена нагрузка (фигура) к полупространству; f — параметр, характеризующий интенсивность приложенной нагрузки; $\gamma(r/R)$ — функция, характеризующая распределение нагрузки.

Выражения для компонентов τ_{rz} и σ_z при помощи двух произвольных функций равносильных $F_1(t)$ и $F_2(t)$, можно представить в виде интегралов Фурье — Бесселя следующим образом:



$$\tau_{rz} = Ge^{\alpha z} \int_0^{\infty} q J_1(qr) dq \int_0^{\infty} s \tau(z, s) J_1(qs) ds \quad (2.13)$$

$$\sigma_z = \frac{2Ge^{\alpha z}}{1-2\nu} \int_0^{\infty} q J_0(qr) dq \int_0^{\infty} s \sigma(z, s) J_0(qs) ds \quad (2.14)$$

Здесь $\tau(z, s)$ и $\sigma(z, s)$ в такой же мере произвольные функции (аргумента s), как и вышеупомянутые функции. Связь между теми и другими легко устанавливается. Функции $\tau(z, s)$ и $\sigma(z, s)$ при $z = 0$ определяются из граничных условий и на основании свойства интеграла Фурье — Бесселя. Определяя затем функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$, получим

$$F_1(t) = -\frac{(1-2\nu)f}{2G} S(qR) \frac{Q(t)}{S(t) - P(t)T(t)} \quad (2.15)$$

$$F_2(t) = -P(t)F_1(t)$$

Здесь

$$S(qR) = \int_0^{(qR)} (qs) \gamma\left(\frac{qs}{qR}\right) J_0(qs) d(qs)$$

$$Q(t) = 2 \sqrt{\frac{t(t+\alpha)}{a+(2t+\alpha)^2}} + \frac{(2t+\alpha)^2(a+\alpha^2)}{2 \sqrt{(t^2+\alpha t)[a+(2t+\alpha)^2]^3}}$$

$$P(t) = \frac{q^2 u + qp \sqrt{a} (1-2\nu) + t(u^2 + p^2)}{q^2 p - q \sqrt{a} u (1-2\nu) + p(u^2 + p^2)} \quad (2.16)$$

$$S(t) = \frac{1}{u^2 + p^2} [-\nu q^2 (u^2 + p^2) + (1-\nu) t q^2 u + (1-\nu)(1-2\nu) t p q \sqrt{a} + \\ + (1-\nu) q^2 p^2 + (1-\nu)(1-2\nu) q p \sqrt{a} u]$$

$$T(t) = \frac{1}{u^2 + p^2} [2q^2 p t (1-\nu) - q t \sqrt{a} u (1-\nu)(1-2\nu) + (1-\nu)(1-2\nu) q^2 p a - \\ - (1-\nu)(1-2\nu) q p^2 \sqrt{a}]$$

Определив функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ по (2.15), при использовании сокращенных обозначений (2.16), можно вычислить все компоненты тензора напряжения по формулам (2.8), (2.9), (2.10) и (2.11).

Рассмотрим равномерно распределенную нагрузку по кругу радиуса R . В этом случае функция $\gamma(r/R) = 1$. Интеграл $S(qR) = (qR) J_1(qR)$. Подставляя в первую из формул (2.15), находим

$$F_1(t) = -\frac{(1-2\nu)}{2G} f R J_1(qR) \frac{Q(t)}{S(t) - P(t)T(t)} \quad (2.17)$$

Остальные все формулы, полученные в предыдущем параграфе, останутся без изменений.

Решение для случая равномерно распределенной нагрузки по круговому кольцу получается легко из предыдущего, если кольцевую нагрузку представить как результат наложения равномерных нагрузок, распределенных по кругу и направленных в разные стороны.

§ 3. Неоднородный цилиндр. Рассмотрим теперь класс II задач. Неоднородный цилиндр, безгранично простирающийся от одного своего торца, а также неоднородный цилиндр, ограниченный с двух сторон; причем цилиндр может быть как сплошным, так и коаксиально пустотелым.

В случае безграничного цилиндра форма решения должна быть в виде интеграла Фурье, а в случае цилиндра ограниченной длины в виде ряда Фурье.

Эти формы решений укладываются в (1.8), если показатель подчинить уже другим требованиям.

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, на боковой поверхности цилиндра показатель степени должен содержать переменный параметр, по которому производится интегрирование или суммирование таким образом, чтобы он входил только под знаком тригонометрических функций. Нетрудно видеть, что ранее полученное решение не удовлетворяет этому условию, так как параметр входит не только под знаком тригонометрических функций, но и в показательную функцию. Показатель степени, следовательно, должен иметь следующую структуру:

$$m = m_0 + is \quad (3.1)$$

Здесь m_0 — некоторая постоянная, а s — переменная величина, которая в дальнейшем будет параметром при интегрировании или суммировании. Кроме указанного выше условия, необходимо также (3.1) подчинить требованию, чтобы $q_{1,2}^2$ было вещественным. Это последнее приводит к равенствам

$$m_0 = -\frac{\alpha}{2}, \quad q^2 = -\left\{\left(\frac{a}{2} + \frac{\alpha}{4} + s^2\right) + \left[a\left(\frac{a}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + s^2\right) - \frac{a^2}{4}\right]^{1/2}\right\} \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что q , при всех значениях s , будет чисто мнимым и решение дифференциального уравнения будет выражаться через цилиндрические функции мнимого аргумента.

Обозначим

$$v = \left\{\frac{a}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + s^2 + \left[a\left(\frac{a}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + s^2\right) - \frac{a^2}{4}\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \quad (3.3)$$

Общее решение для цилиндра, простирающегося от торца в одну сторону безгранично, имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa(r, z) = \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) \int_0^\infty \{I_0(vr) [F_1(s) \cos(sz) + F_2(s) \sin(sz)] + \\ + K_0(vr) [F_3(s) \cos(sz) + F_4(s) \sin(sz)]\} ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

Общее решение для цилиндра ограниченной длины l будет

$$\begin{aligned} \kappa(r, z) = \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) \sum_{k=0}^\infty \left\{I_0(v_k r) \left[A_k \cos \frac{\pi k}{l} z + B_k \sin \frac{\pi k}{l} z\right] + \right. \\ \left. + K_0(v_k r) \left[C_k \cos \frac{\pi k}{l} z + D_k \sin \frac{\pi k}{l} z\right]\right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь l — длина цилиндра

$$v_k = \left\{\frac{a}{4} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\pi^2 k^2}{l^2} + \left[a\left(\frac{a}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\pi^2 k^2}{l^2}\right) - \frac{a^2}{4}\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \quad (3.6)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$)

Исходя из (3.4) и (3.5), находятся компоненты тензора напряжения и компоненты вектора перемещения, которые достаточно хорошо приспособлены для решения краевых задач на боковых поверхностях безграничного и ограниченного цилиндров.

Поступила 12 VI 1961