

## О ХРУПКИХ ТРЕЩИНАХ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов

(Москва)

В работах Билби и Буллоу [1] и Мак-Клинтока и Сухатме [2] рассмотрены некоторые интересные задачи о распространении трещин продольного сдвига. Рассмотрение трещин продольного сдвига представляет, помимо непосредственного, значительный интерес потому, что соответствующий этому виду трещин математический аппарат значительно проще, чем для плоской теории упругости. Для трещин продольного сдвига удается получить эффективное точное решение многих задач, недоступных для трещин нормального разрыва и трещин поперечного сдвига, и, тем самым, выяснить некоторые качественные эффекты, общие для всех типов трещин. Кроме того, на задачах о трещинах продольного сдвига удобно выяснять точность приближенных методов.

Ниже рассматривается общая постановка задач о трещинах продольного сдвига, а также некоторые частные статические и динамические задачи.

**§ 1. Общие соотношения.** 1°. Предположим, что поле упругих смещений в рассматриваемом теле таково, что

$$u, v \equiv 0, \quad w = w(x, y, t) \quad (1.1)$$

где  $x, y$  — декартовы координаты;  $t$  — время;  $u, v, w$  — компоненты вектора упругих смещений по осям  $x, y, z$ . Компоненты тензора напряжений в силу закона Гука представляются в виде

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.2)$$

Здесь  $\mu = E / 2(1 + \nu)$  — модуль сдвига,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Подставляя (1.1) в уравнения движения, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta w, \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.3)$$

где  $c$  — скорость распространения поперечных колебаний,  $\rho$  — плотность,  $\Delta$  — оператор Лапласа. В частности, для статических задач (1.3) переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta w = 0 \quad (1.4)$$

Распределению смещений (1.1) соответствует случай так называемой «антиплоской» деформации. Под антиплоской деформацией понимается напряженное состояние в цилиндрическом теле бесконечно большой высоты, возникающее под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянных вдоль образующих.

2°. Из (1.2) и (1.4) вытекает, что напряжения и смещения можно представить через одну аналитическую функцию  $f(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ ; имеем

$$w = \operatorname{Re} f(z), \quad \tau = \tau_{xz} + i\tau_{yz} = \mu \overline{f'(z)} \quad (1.5)$$

Очевидна аналогия задач теории упругости для антиплоской деформации и задач плоской гидродинамики; смещение  $w$  соответствует при этом потенциалу скорости, вектор напряжения  $\tau$  соответствует вектору скорости. Эта аналогия позволяет использовать для целей теории трещин ряд соотношений плоской гидродинамики.

В частности, можно показать, что для тела, ограниченного внешним контуром  $c_0$  и внутренними контурами  $c_1, \dots, c_n$  величина суммарной силы, приложенной к произвольной дуге  $AB$ , равна

$$R = \mu \operatorname{Im} [f(z_B) - f(z_A)]$$

Аналитическую функцию  $f(z)$  можно в этом случае представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{F_k + i\mu B_k}{2\pi\mu} \ln(z - a_k) + \varphi(z), \quad \sum_{k=0}^n F_k = 0 \quad (1.6)$$

Здесь  $F_k$  — величина суммарной силы, приложенной к контуру  $c_k$ ;  $B_k$  — интенсивность «винтовой дислокации», соответствующей контуру  $c_k$ , т. е. приращение смещения при обходе контура  $c_k$ ;  $\varphi$  — однозначная аналитическая функция;  $a_k$  — точка внутри контура  $c_k$ .

Если тело неограничено, то в окрестности  $z = \infty$  функция  $f(z)$  имеет следующее представление:

$$f(z) = \frac{F + i\mu B}{2\pi\mu} \ln z + f_0 z + \frac{f_1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (1.7)$$

где

$$F = \sum_{k=1}^n F_k, \quad B = \sum_{k=1}^n B_k, \quad f_0 = \frac{1}{\mu} (\tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty)$$

$\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$  — напряжения в бесконечно удаленной точке.

В дальнейшем, в основном, рассматривается случай отсутствия дислокаций ( $B_k = B = 0$ ), соответствующий в гидродинамической аналогии бесциркуляционному обтеканию.

3°. Ранее было показано [3], в предположении справедливости гипотез малости концевой области трещины и автономности этой области, что в точках контура трещины продольного сдвига, в которых интенсивность сил сцепления максимальна, напряжения  $\tau_{yz}$ , вычисленные без учета сил сцепления, обращаются в бесконечность по закону

$$\tau_{yz} = \frac{M}{\pi \sqrt{s}} \quad (1.8)$$

где  $s$  — расстояние до точки контура,  $M$  — константа материала, аналогичная модулю сцепления [4, 3].

**§ 2. Простейшие задачи о трещинах продольного сдвига.** 1°. Пусть бесконечное тело находится в условиях антиплоской деформации и нагружено на бесконечности постоянным касательным напряжением  $\tau_\infty = \tau_\infty e^{i\theta}$ . В теле имеется вырез произвольной формы, имеющий конечные размеры, поверхность которого свободна от нагрузки. Такая задача соответствует задаче о бесциркуляционном обтекании контура в плоской гидродинамике идеальной жидкости. Согласно известным соотношениям

[5] имеем в этом случае

$$f(z) = \frac{1}{\mu} \tau_{\infty} e^{-i\theta} g(z) + \frac{\tau_{\infty} e^{i\theta} R^2}{\mu g(z)} \quad (2.1)$$

Здесь  $g(z)$  — функция, осуществляющая конформное отображение внешности контура в физической плоскости  $z$  на внешность круга радиуса  $R$ , такая что  $g'(\infty) = 1$ .

Рассмотрим для примера случай, когда вырез представляет окружность с одной или двумя одинаковыми трещинами, (фиг. 1) перпендикулярными вектору напряжений на бесконечности  $\tau_{\infty}$ , направление которого примем за ось  $y$  ( $\theta = \pi/2$ ).

В этих случаях, соответственно, преобразующие функции  $g(z)$  записываются в виде

$$g(z) = \frac{1}{2} Z - \frac{L-r}{2} + \sqrt{\left[\frac{1}{2} Z - \frac{L-r}{2}\right]^2 - \frac{(L+r)^2}{4}} \quad (2.2)$$

$$g(z) = \frac{1}{2} Z + \sqrt{\frac{1}{4} Z^2 - L^2} \quad (2.3)$$

где

$$Z = z + \frac{r^2}{z}, \quad L = \frac{1}{2} \left( r + l + \frac{r^2}{r+l} \right) \quad (2.4)$$

Условия, определяющие размер подвижно-равновесной трещины  $l$  имеют, в силу (1.5), (1.8), (2.1) — (2.4), соответственно, вид

$$[(1 + \lambda)^4 - 1] (1 + \lambda)^{-3/2} (2 + \lambda)^{-3/2} \lambda^{-1/2} = \frac{M}{\pi \tau_{\infty} \sqrt{r}} \quad \left( \lambda = \frac{l}{r} \right) \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 + \lambda) [1 - (1 + \lambda)^{-4}]} = \frac{M}{\pi \tau_{\infty} \sqrt{r}} \quad (2.6)$$

В частности, при  $\lambda \rightarrow \infty$  получаем асимптотические формулы

$$l = \frac{M^2}{\pi^2 \tau_{\infty}^2}, \quad l = \frac{2M^2}{\pi^2 \tau_{\infty}^2} \quad (2.7)$$

соответствующие изолированной трещине длиной  $2l$  и полуограниченной трещине длиной  $l$  в однородном поле напряжений (аналог гриффитсовской трещины).

При  $\lambda \rightarrow 0$  получаем в обоих случаях асимптотическую формулу

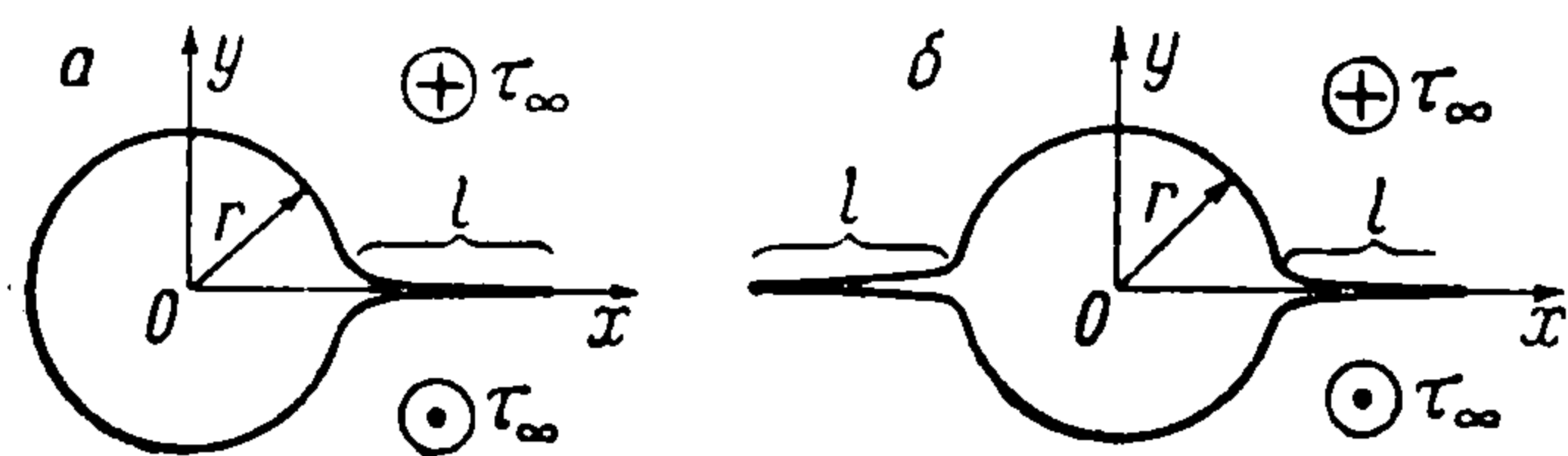
$$l = \frac{M^2}{2\pi^2 \tau_{\infty}^2} \quad (2.8)$$

совпадающую с формулой для полудлины симметричной подвижно-

равновесной трещины в бесконечном теле в поле напряжений  $2\tau_{\infty}$ , соответствующем максимальной концентрации напряжений вблизи кругового выреза.

Зависимость длины трещины  $\lambda$  от приложенного напряжения  $\tau_0$  представлена на фиг. 2 в виде кривых

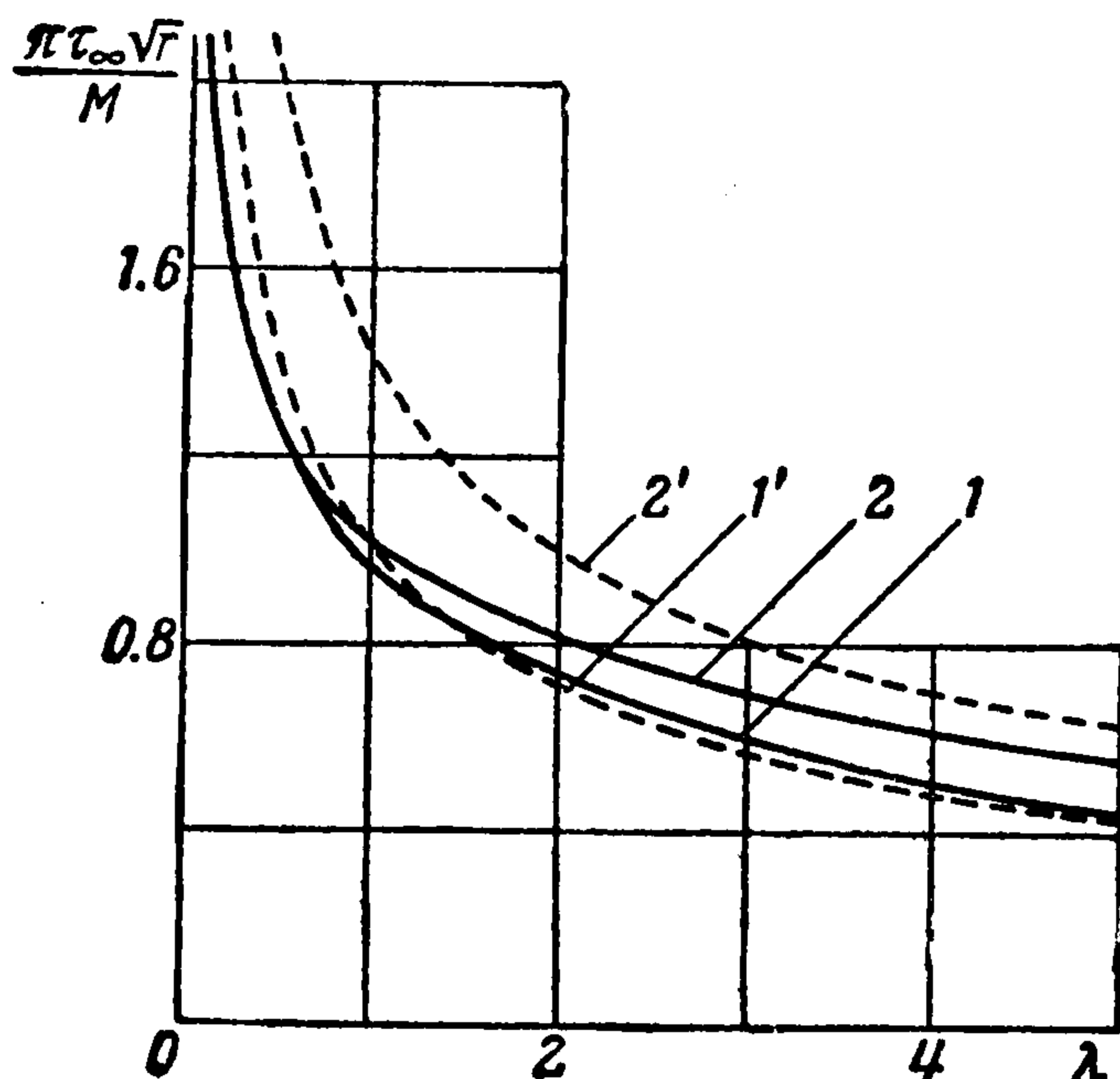
$$\tau_0 = f(\lambda) \quad \left( \tau_0 = \frac{\pi \tau_{\infty} \sqrt{r}}{M}, \quad \lambda = \frac{l}{r} \right)$$



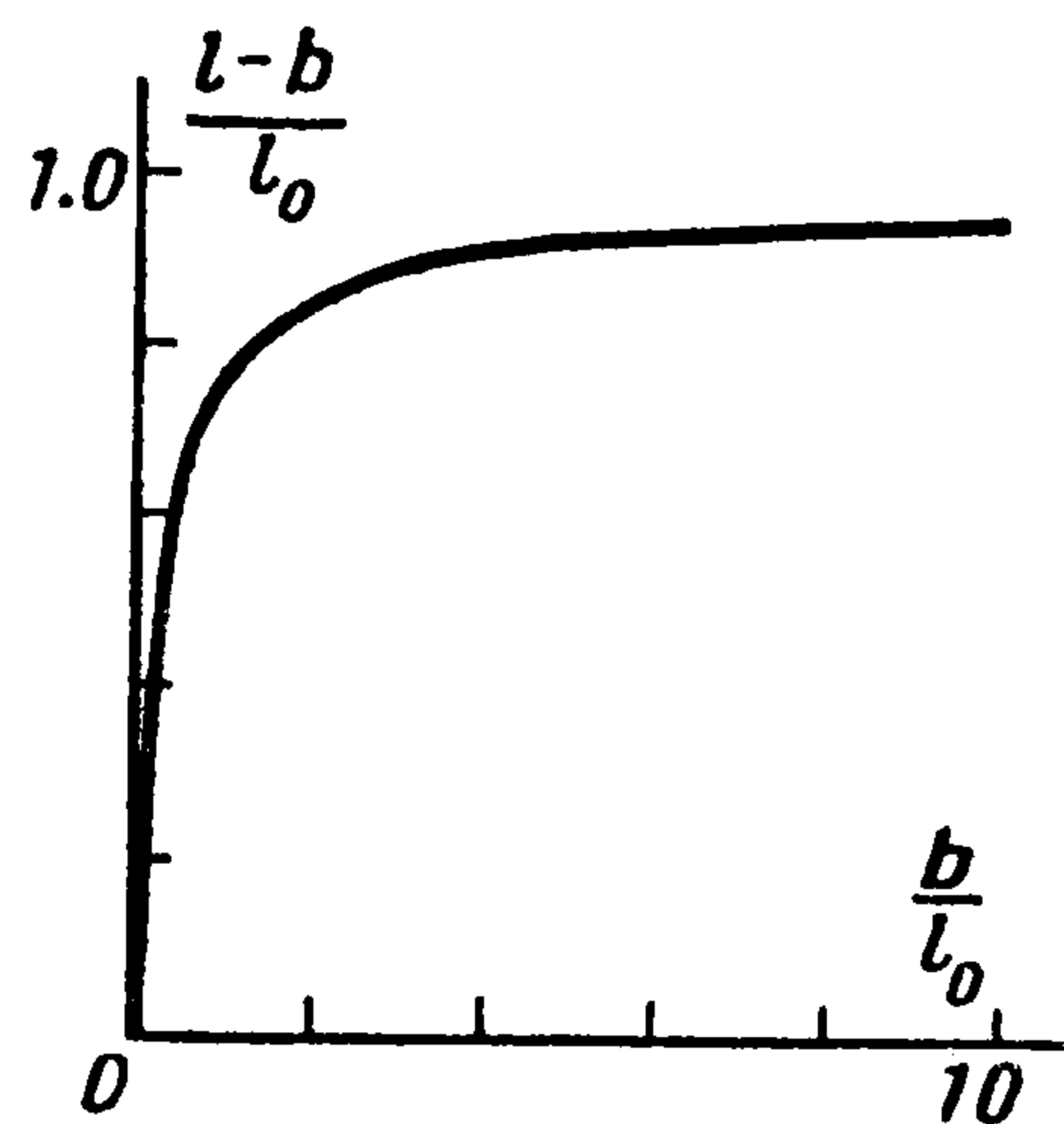
Фиг. 1

построенных по формулам (2.5), (2.6), — кривые 1 и 2, а также по асимптотическим формулам (2.7) — пунктирные кривые 1' и 2'.

Аналогичные задачи для трещин нормального разрыва были приближенно рассмотрены Бови [6]; точного решения этих задач ввиду иррациональности отображающих функций (2.2), (2.3) не получено.



Фиг. 2



Фиг. 3

2°. В качестве примера смешанной задачи рассмотрим задачу об изолированной прямолинейной трещине ( $-l \leq x \leq l$ ), на некоторой части поверхности которой ( $-b \leq x \leq b$ ) задано постоянное смещение  $w = \pm h$  (знаки плюс и минус отвечают, соответственно, верхнему и нижнему берегам поверхности трещины). Остальная часть поверхности трещины свободна от напряжений. Эта задача для трещин нормального разрыва соответствует задаче о расклинивании клином конечной длины, рассмотренной в [7]. Для определения функции  $f(z)$  получаем, очевидно, следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} |x| < b, \quad \operatorname{Re} f(z) = \pm h; \quad b < |x| < l, \quad \operatorname{Im} f'(z) = 0 \\ |x| > l, \quad \operatorname{Re} f(z) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Находим

$$f'(z) = \frac{hl}{i \sqrt{(z^2 - l^2)(z^2 - b^2)} F\left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{l}\right)^2}, \frac{\pi}{2}\right)} \quad (2.10)$$

Здесь  $F(k, \pi/2)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. Из условия (1.8) получаем соотношение

$$(l^2 - b^2) F^2\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2 \mu^2}{2M^2} h^2 l \quad (2.11)$$

определяющее длину трещины  $l$ . В частности, при  $b \rightarrow \infty$  получаем аналог решения для полубесконечного клина

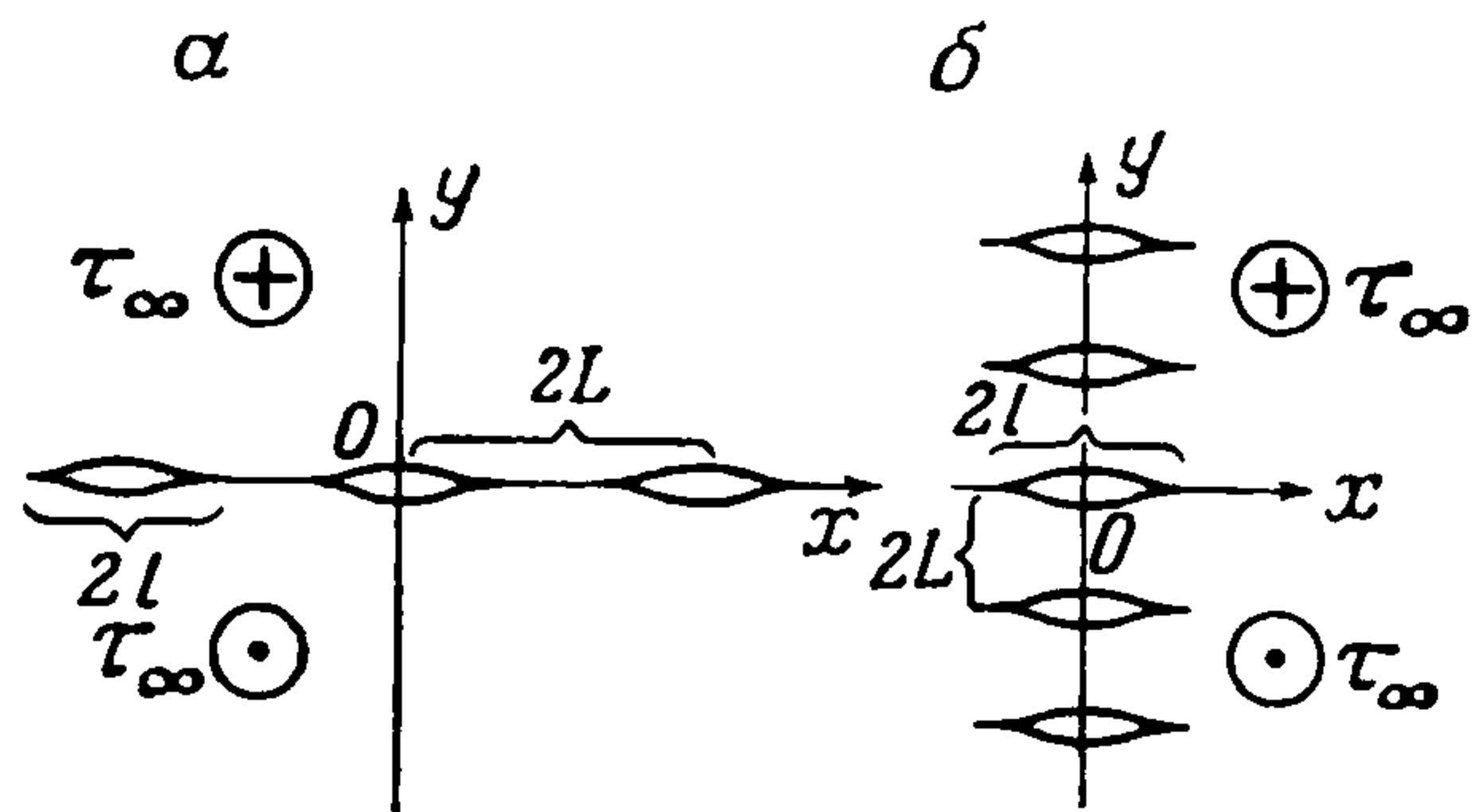
$$l_0 = \frac{\mu^2 h^2}{M^2} \quad (2.12)$$

Зависимость (2.11) после преобразования может быть приведена к виду

$$\frac{l-b}{l_0} = f\left(\frac{b}{l_0}\right)$$

Эта зависимость представлена на фиг. 3,

§ 3. Некоторые задачи о взаимодействии трещин продольного сдвига. Задачи о взаимодействии трещин представляют значительные математические трудности; для трещин продольного сдвига в отличие от трещин нормального разрыва и трещин поперечного сдвига можно получить эффективное точное решение многих задач о взаимодействии. Ниже рассматриваются типичные задачи об



Фиг. 4

однорядовой решетке трещин.

1°. Пусть сначала в бесконечном теле, подвергаемом на бесконечности действию однородного сдвигающего напряжения  $\tau_{yz} = \tau_{yz}^\infty$ , имеется бесконечная система одинаковых трещин  $-l + 2nL \leq x \leq l + 2nL$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $y = 0$  (фиг. 4, а), перпендикулярных вектору

напряжения на бесконечности, берега которых свободны от напряжений.

Для определения функции  $f'(z)$  получаем следующую краевую задачу:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f'(z) = -\frac{i\tau_{yz}^\infty}{\mu}; \operatorname{Im} f'(z) = 0, \quad -l + 2nL \leq x \leq l + 2nL, \quad y = 0 \quad (3.1)$$

$$\operatorname{Re} f'(z) = 0, \quad l + 2nL \leq x \leq -l + 2(n+1)L, \quad y = 0$$

решая которую, находим

$$f'(z) = -\frac{i\tau_{yz}^\infty}{\mu} \frac{\sin(\pi z / 2L)}{\sqrt{\sin^2(\pi z / 2L) - \sin^2(\pi l / 2L)}} \quad (3.2)$$

Из условий (3.2) и (1.8) находим соотношение, определяющее размер подвижно-равновесной трещины

$$l = \frac{2L}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{M^2}{\pi \tau_\infty^2 L} \quad (3.3)$$

2°. Рассмотрим теперь случай, когда одинаковые трещины в бесконечном теле (фиг. 4, б), подвергаемом на бесконечности однородному напряжению сдвига  $\tau_{yz} = \tau_{yz}^\infty$ ,  $\tau_{xz} = 0$ , располагаются в виде однорядовой решетки  $-l \leq x \leq l$ ,  $y = nL$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Решая соответствующую краевую задачу, получаем

$$f'(z) = -\frac{i\tau_{yz}^\infty}{\mu} \frac{\operatorname{sh}(\pi z / 2L)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\pi z / 2L) - \operatorname{sh}^2(\pi l / 2L)}} \quad (3.4)$$

Из условий (3.4) и (1.8) получаем соотношение, определяющее размер подвижно-равновесной трещины

$$l = \frac{2L}{\pi} \operatorname{ar} \operatorname{th} \frac{M^2}{\pi \tau_\infty^2 L} \quad (3.5)$$

На фиг. 5 приведены зависимости  $\tau_\infty$  от  $l$  в виде кривых

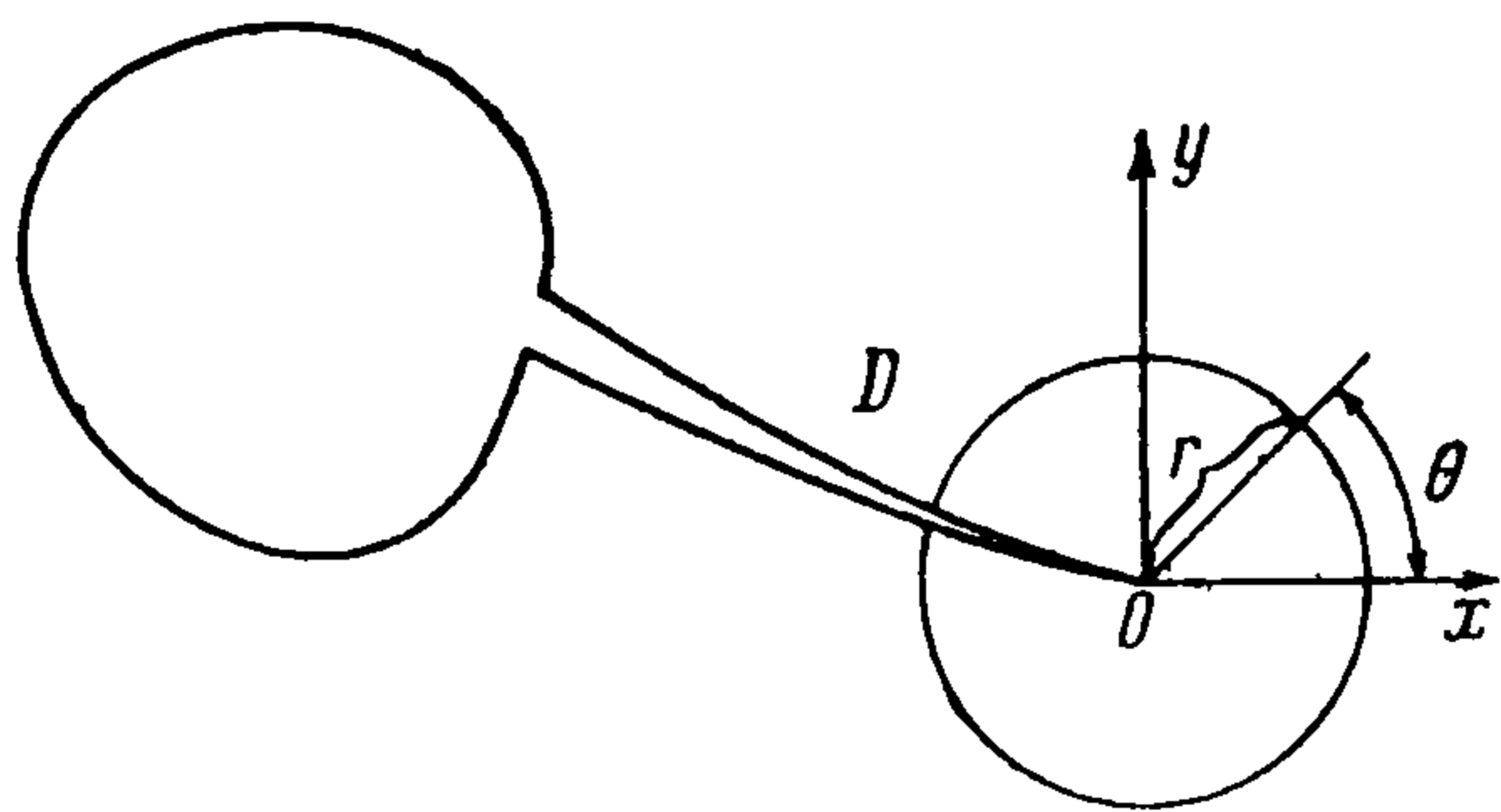
$$\frac{\tau_\infty}{\tau^*} = f\left(\frac{l}{L}\right) \quad \left( \tau^* = \frac{M}{\sqrt{\pi L}} \right)$$

Кривые построены для изолированной трещины; по первой формуле (2.7) — кривая 2; для системы коллинеарных трещин по формуле (3.3) — кривая 3; для системы параллельных трещин по формуле (3.5), — кривая 1. Как видно, взаимодействие трещин существенно различно при различном их расположении. Наличие коллинеарных трещин уменьшает прочность тела, уменьшая размер подвижно-равновесных трещин при данной нагрузке. Наличие параллельных трещин, наоборот, упрочняет тело, увеличивая размер подвижно-равновесных трещин при данной нагрузке. Более того, для параллельного расположения трещин существует предельная нагрузка равная

$$\tau^* = \frac{M}{\sqrt{\pi L}} \quad (3.6)$$

так что при  $\tau_\infty < \tau^*$  как бы ни была велика длина трещин, они не являются подвижно-равновесными. Задача классической теории упругости о бесконечной системе коллинеарных трещин была для случая трещин нормального разрыва рассмотрена Вестергардом [8] и, независимо, Койтером [9]. Койтер [10] приближенно рассмотрел задачу о бесконечной системе параллельных трещин поперечного сдвига.

§ 4. Криволинейные трещины продольного сдвига. 1°. Рассмотрим в произвольном поле напряжений, обеспечивающем антиплоскую деформацию, произвольную криволинейную трещину продольного сдвига вблизи ее конца (фиг. 6). Анализ поля напряжений в окрестности точки  $O$  показывает, что напряжение  $\tau_{xz}$  в этой точке особенности не имеет, а напряжение  $\tau_{yz}$  имеет в ней особенность типа  $z^{-1/2}$ , причем напряжение  $\tau_{z\theta}$



Фиг. 6

(фиг. 6) при малых  $r$  представляется в виде

$$\tau_{z\theta} = \frac{A_1 \cos(\theta/2)}{\sqrt{r}} + A_2 \sin \theta + O(r^{3/2}) \quad (4.1)$$

Здесь  $A_1$  и  $A_2$  — действительные коэффициенты первых двух членов разложения  $f(z)$  вблизи  $z = 0$

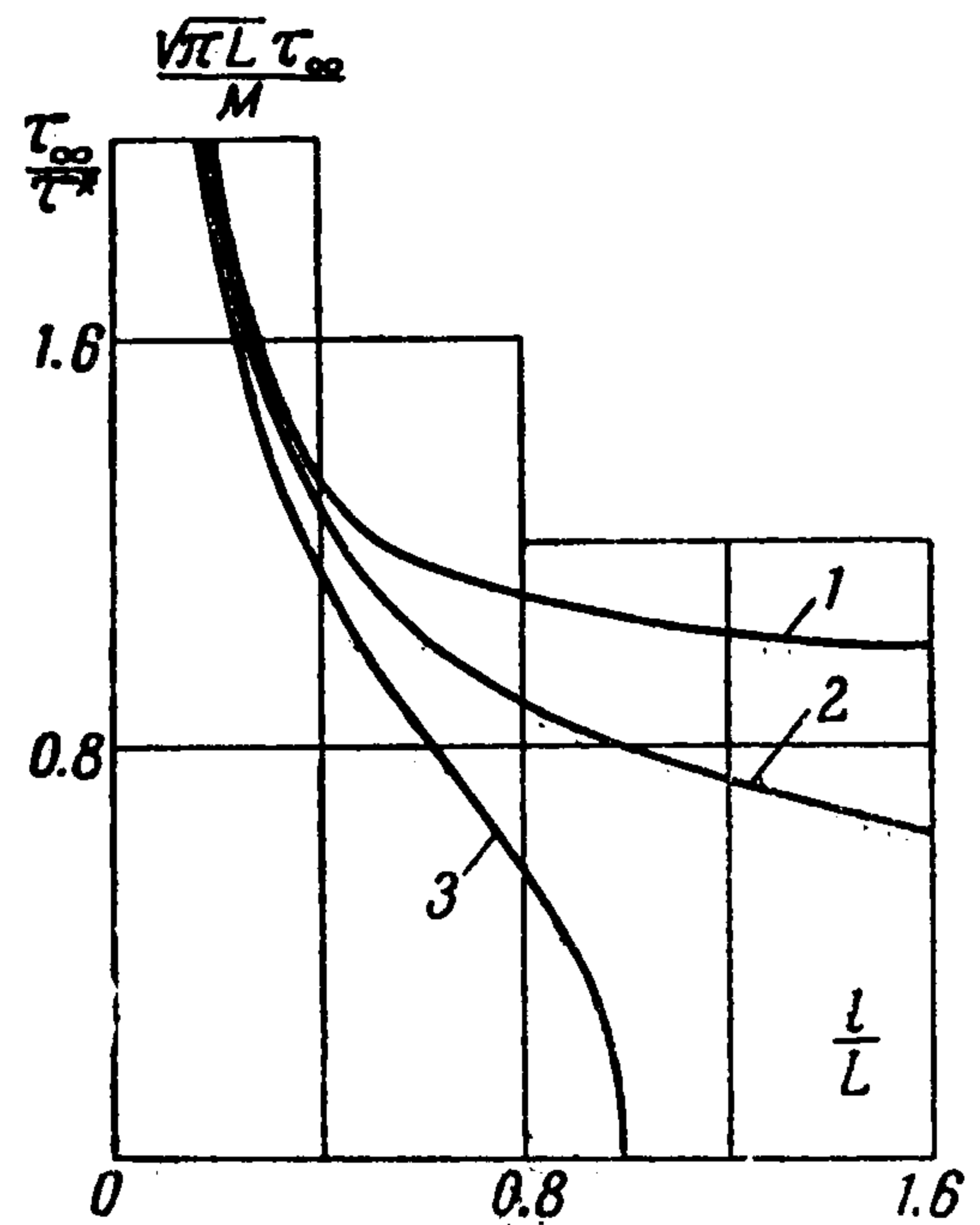
$$f(z) = \frac{2A_1 i}{\mu} \sqrt{z} + \frac{A_2}{\mu} z + O(z^{3/2}) \quad (4.2)$$

Примем следующую гипотезу: развитие криволинейной трещины продольного сдвига происходит по направлению, в котором  $\tau_{z\theta}$  максимально.

Из этой гипотезы следует, что направление касательной к поверхности естественной трещины продольного сдвига в ее конце должно быть направлением максимального напряжения  $\tau_{z\theta}$ .

Для этого в силу (4.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$A_2 = 0 \quad (4.3)$$



Фиг. 5

Из (4.1) и (4.3) вытекает, что распределение напряжений и смещений вблизи точки  $O$  симметрично относительно направления трещины. Это свойство симметрии в малом позволяет принять гипотезу автономности концевой области, в которой действуют силы сцепления, т. е. гипотезу о независимости формы этой области и распределения сил сцепления в ней от действующих нагрузок. Предполагая справедливой также гипотезу малости концевой области, получаем, что в концах трещин продольного сдвига, в которых силы сцепления имеют максимальную интенсивность, напряжения  $\tau_{yz}$ , вычисленные без учета сил сцепления, обращаются в бесконечность по закону (1.8), откуда

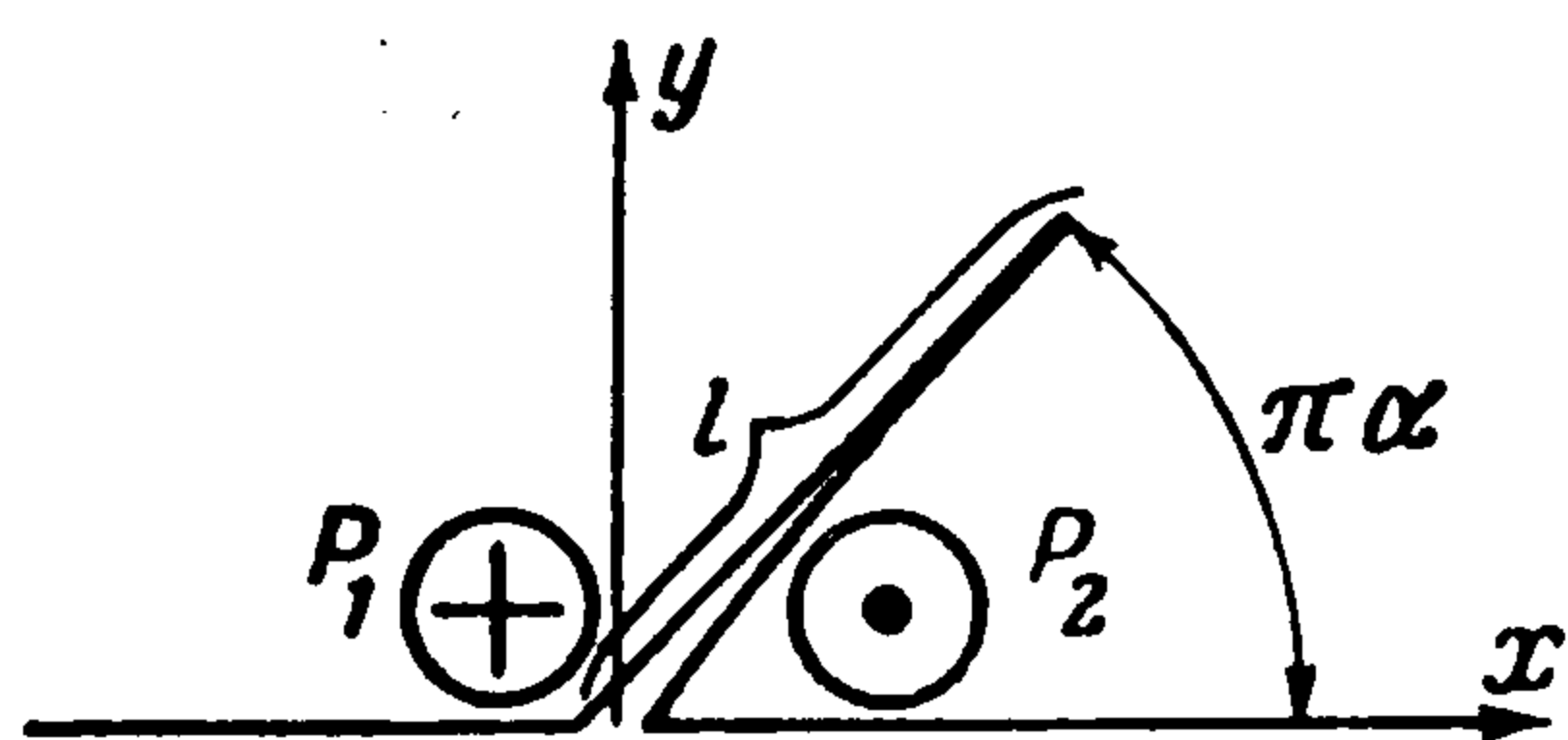
$$A_1 = \frac{M}{\pi} \quad (4.4)$$

Пусть  $z = \omega(\zeta)$  — функция, осуществляющая отображение внешности контура  $D$  в физической плоскости  $z = x + iy$  на верхнюю полуплоскость,  $F(\zeta) = f[\omega(\zeta)]$ . Тогда условия (4.3) и (4.4) можно привести

к виду

$$F''(\zeta_0) = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{F'(\zeta_0)}{\sqrt{|\omega''(\zeta_0)|}} = \frac{\sqrt{2} M}{\pi \mu} \quad (4.6)$$



Фиг. 7

где  $\zeta_0$  — образ точки  $z = 0$ .

2°. Рассмотрим примеры. В качестве первого из них возьмем прямолинейную трещину, выходящую на свободную поверхность под углом  $\pi\alpha$  и поддерживаемую двумя противоположно направленными сосредоточенными силами  $P_1$  и  $P_2$ , приложенными по разные стороны трещины в точке выхода трещины на свободную поверхность (фиг. 7). Имеем в этом случае

$$\omega(\zeta) = l(\zeta - 1)^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \zeta\right)^{1-\alpha} \quad (4.7)$$

Решая краевую задачу, находим выражение для  $F'(\zeta)$  в этом случае

$$F'(\zeta) = \frac{\alpha}{\pi \mu} \left[ \frac{P_1}{1-\alpha + \alpha \zeta} - \frac{P_2}{\alpha(\zeta - 1)} \right] \quad (4.8)$$

Условия (4.3) и (4.4) дают

$$\alpha = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}}, \quad l = \frac{\sqrt{P_1 P_2}}{2M^2} [\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}]^2 \quad (4.9)$$

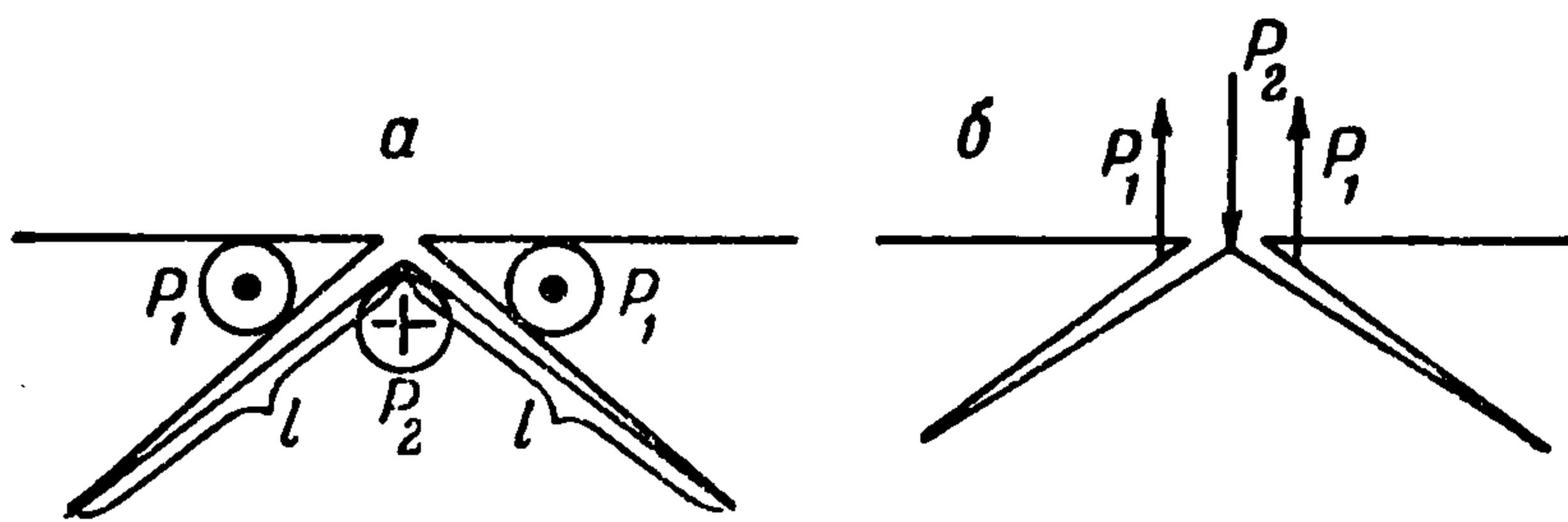
Таким образом, рассматриваемая постановка задачи применима только в том случае, когда отношение сил  $P_1$  и  $P_2$  постоянно в процессе нагружения и, следовательно, развитие трещины по прямой происходит только при пропорциональном нагружении.

Представляет значительный интерес рассмотрение несколько иной задачи, которая ставится следующим образом. На границу полупространства, свободную от напряжений, выходят две симметричные прямолинейные трещины, которые поддерживаются в раскрытом состоянии тремя сосредоточенными силами, приложенными по разные стороны трещин

в точке их выхода на свободную поверхность (фиг. 8, а). В этом случае имеем

$$\alpha = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{2} (\sqrt{P_2} + \sqrt{2P_1})}, \quad l = \frac{\sqrt{P_1 P_2}}{\sqrt{8} M^2} (\sqrt{P_2} + \sqrt{2P_1})^2 \quad (4.10)$$

Таким образом, при пропорциональном нагружении развитие трещин происходит по прямым линиям. Как видно,  $\alpha \rightarrow 0$  при  $P_1 \rightarrow 0$ , так что наличие отличных от нуля сил  $P_1$ , направленных противоположно основной силе  $P_2$  существенно для того, чтобы прямолинейные трещины распространялись в глубь тела.



Фиг. 8

Рассмотренная задача будет для трещин продольного сдвига аналогом

задачи о конических трещинах нормального разрыва, полученных при вдавливании осесимметричного штампа в хрупкое тело Реслером и Бенбоу [11, 12]. Для правильного описания этого явления недостаточно схематизировать действие штампа одной сосредоточенной силой, а нужно вводить противоположно направленные сосредоточенные силы (фиг. 8, б); в противном случае не получится отличного от нуля угла наклона трещин.

3°. Формулы, данные в п. 1°, позволяют в принципе исследовать развитие произвольных криволинейных трещин при произвольном процессе нагружения. Однако, вообще говоря, эти формулы не эффективны. Эффективное рассмотрение развития криволинейной трещины возможно для трещин, форма которых мало отличается от прямолинейной или круговой. Для простоты ограничимся исследованием развития трещины, мало отличающейся от прямолинейной трещины, выходящей на свободную поверхность под прямым углом (фиг. 7).

Задача ставится следующим образом. Пусть обе приложенные силы  $P_1$  и  $P_2$  зависят от параметра нагружения  $\lambda$  так, что

$$P_1 = P(\lambda) + \varepsilon P_0(\lambda), \quad P_2 = P(\lambda)$$

где  $\varepsilon$  — малая величина. По непрерывности можно считать, что полярные координаты конца трещины  $l$  и  $\alpha$  мало отличаются от невозмущенных значений этих координат. Снося граничные условия на ось  $y$  и используя решение п. 2°, находим

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon P_0}{8P}, \quad l = \frac{2P^2}{M^2} \left(1 + \varepsilon \frac{P_0}{P}\right) \quad (4.11)$$

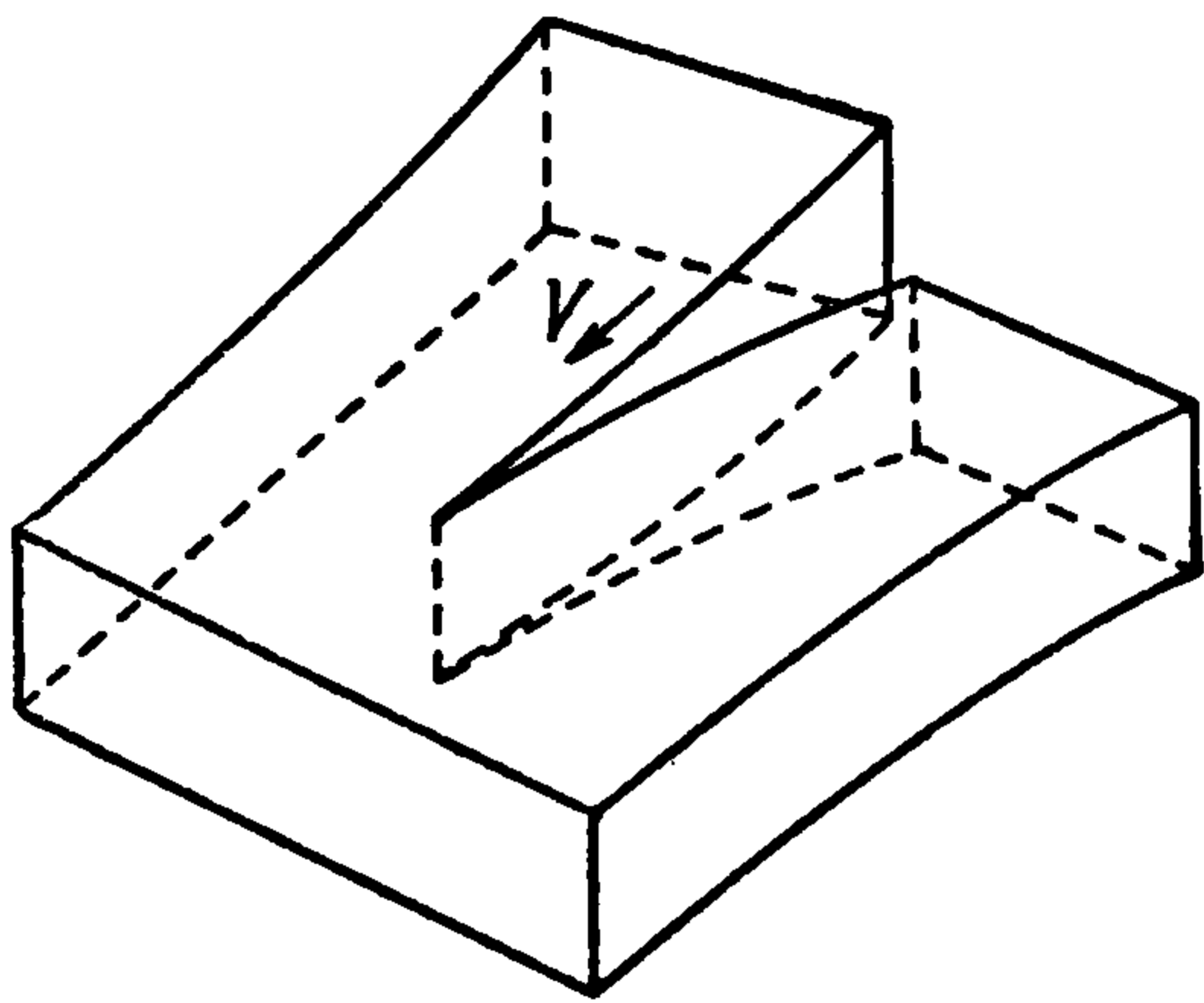
В частности, при  $P_0 = R\theta(\lambda - \lambda_0)$ , где  $R$  — постоянная,  $\theta$  — единичная функция,  $\lambda_0$  — некоторое значение параметра  $\lambda$ , координаты конца трещины испытывают скачок при переходе через значение параметра  $\lambda_0$ .

В случае, когда

$$P_0 = R \sin(\lambda - \lambda_0) \theta(\lambda - \lambda_0), \quad P = \lambda,$$

трещина, начиная со значения силы, равной  $\lambda_0$ , представляет собой колеблющуюся около оси  $y$  кривую, причем амплитуда колебаний возрастает неограниченно с увеличением силы  $P$ .

§ 5. Динамическая задача о разрезании тела. Задача о разрезании тела, аналогичная задаче о расклинивании для трещин нормального разрыва, ставится следующим образом. В безграничном хрупком теле с постоянной скоростью  $V$  распространяется прямолинейная трещина, противоположные берега которой сдвигаются в противоположных направлениях параллельно краю трещины (фиг. 9), так что имеет место анти-



Фиг. 9

плоская деформация. Введем подвижную систему координат  $\xi = x + Vt$ ,  $\eta = y$  с центром в конце трещины  $O$ , тогда уравнение (1.3) с учетом стационарности процесса в подвижной системе координат принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (5.1)$$

Общее решение (5.1) имеет вид

$$w = \operatorname{Re} \varphi(\zeta), \quad \zeta = \xi + i\eta \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (5.2)$$

где  $\varphi(\zeta)$  — произвольная аналитическая функция, так что согласно (1.2) выражения для напряжений имеют вид

$$\tau_{xz} = \mu \operatorname{Re} \varphi'(\zeta), \quad \tau_{yz} = -\mu \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \operatorname{Im} \varphi'(\zeta) \quad (5.3)$$

Вполне аналогично задаче расклинивания [13] граничные условия задачи можно записать в виде

$$0 \leq \xi \leq l, \quad \tau_{\eta z} = 0, \quad l \leq \xi < \infty, \quad w = \pm f(\xi) \quad (5.4)$$

Здесь  $f(\xi)$  — заданная функция, определяющая распределение смещений, которая предполагается неубывающей и стремящейся при  $\xi \rightarrow \infty$  к конечному пределу  $h$ ; знаки плюс и минус соответствуют верхнему и нижнему берегам трещины;  $l$  — длина свободного участка трещины.

Ограничимся случаем  $V < c$ ; получаем следующую краевую задачу для определения функции  $\varphi(\zeta)$  в нижней полуплоскости:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi(\zeta) &= 0, \quad \xi < 0; \quad \operatorname{Im} \varphi'(\zeta) = 0, \quad 0 \leq \xi < l \\ \operatorname{Re} \varphi(\zeta) &= -f(\xi), \quad l \leq \xi < \infty \end{aligned} \quad (5.5)$$

Используя формулу Келдыша-Седова [14], получим

$$\varphi'(\zeta) = \frac{1}{\pi i \sqrt{\xi(\xi-l)}} \left[ \int_l^\infty \frac{f'(t) \sqrt{t(t-l)}}{t-\xi} dt + C \right] \quad (5.6)$$

где ветвь функции  $\sqrt{\xi(\xi-l)}$  выбрана так, чтобы  $\sqrt{\xi(\xi-l)} \sim \xi$  при больших  $\xi$ . Интегрируя (5.6) и используя предельную форму условия (5.5) при  $\xi \rightarrow \infty$ , получаем  $C = h$ . Для напряжения  $\tau_{\eta z}$  при  $\eta = 0$  находим

$$\tau_{\eta z} = \begin{cases} \frac{\mu \sqrt{1 - V^2/c^2}}{\pi \sqrt{\xi(\xi-l)}} \left[ h - \int_l^\infty \frac{f'(t) \sqrt{t(t-l)}}{t-\xi} dt \right] & (-\infty < \xi < 0) \\ 0 & (0 \leq \xi < l) \\ -\frac{\mu \sqrt{1 - V^2/c^2}}{\pi \sqrt{\xi(\xi-l)}} \left[ h - \int_l^\infty \frac{f'(t) \sqrt{t(t-l)}}{t-\xi} dt \right] & (l \leq \xi < \infty) \end{cases} \quad (5.7)$$

Из (5.7) и условия (1.8), которое можно распространить на динамические задачи, имея в виду возможную зависимость величины  $M$  от скорости  $V$ , получим уравнение для определения свободной длины трещины  $l$

$$h - \int_l^{\infty} f'(t) \sqrt{\frac{t-l}{t}} dt = \frac{M \sqrt{l}}{\mu \sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (5.8)$$

В частном случае, когда  $f(\xi) \equiv h$ , имеем

$$l = \frac{\mu^2 h^2}{M^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \quad (5.9)$$

Как видно из (5.9), для трещин продольного сдвига предельной скоростью распространения будет скорость звука  $c$ , в отличие от трещин нормального разрыва и поперечного сдвига, для которых предельной скоростью является скорость распространения релеевских волн.

Авторы благодарны Л. Я. Семеновой за выполненные вычисления.

Поступила 26 VII 1961

Институт механики  
Московского Государственного Университета

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bilby B. A. and Bullough R. The formation of twins by a moving crack, *Phil. Mag.*, 1954, VII ser., v. 45.
2. McClintock F. A. and Sukhatme S. P. Traveling cracks in elastic materials under longitudinal shear, *J. Mech. and Phys. of Solids*, 1960, v. 8, 187—193.
3. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О конечности напряжений на краю произвольной трещины. *ПММ*, 1961, т. XXV, вып. 4.
4. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. *ПММ*, 1959, т. XXIII, вып. 3—5.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Т. I, ГИТТЛ, 1948.
6. Bowie O. L. Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole, *J. Math. and Phys.*, 1956, v. 25.
7. Маркузон И. А. О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины. *ПММ*, т. XXV, 1961, вып. 2.
8. Wertergaard H. M., Bearing pressures and cracks, *J. Appl. Mech.*, 1939, v. 6, № 2.
9. Koiter W. T. An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet, *Ingenieur-Archiv.*, 1959, v. 28.
10. Койтер В. Т. Бесконечный ряд параллельных трещин в неограниченной упругой пластинке. Сб. Проблемы механики сплошной среды, посв. 70-летию Н. И. Мусхелишвили. М., Изд-во АН СССР, 1961.
11. Roessler F. C. Brittle fracture near equilibrium, *Proc. Phys. Soc.*, 1956, v. B. 69.
12. Venbow J. J. Cone cracks in fused silica, *Proc. Phys. Soc.*, 1960, v. B75, 697—699.
13. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел. *ПММ*, 1960, т. XXIV, вып. 4.
14. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.—Л., Физматгиз, 1958.