Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

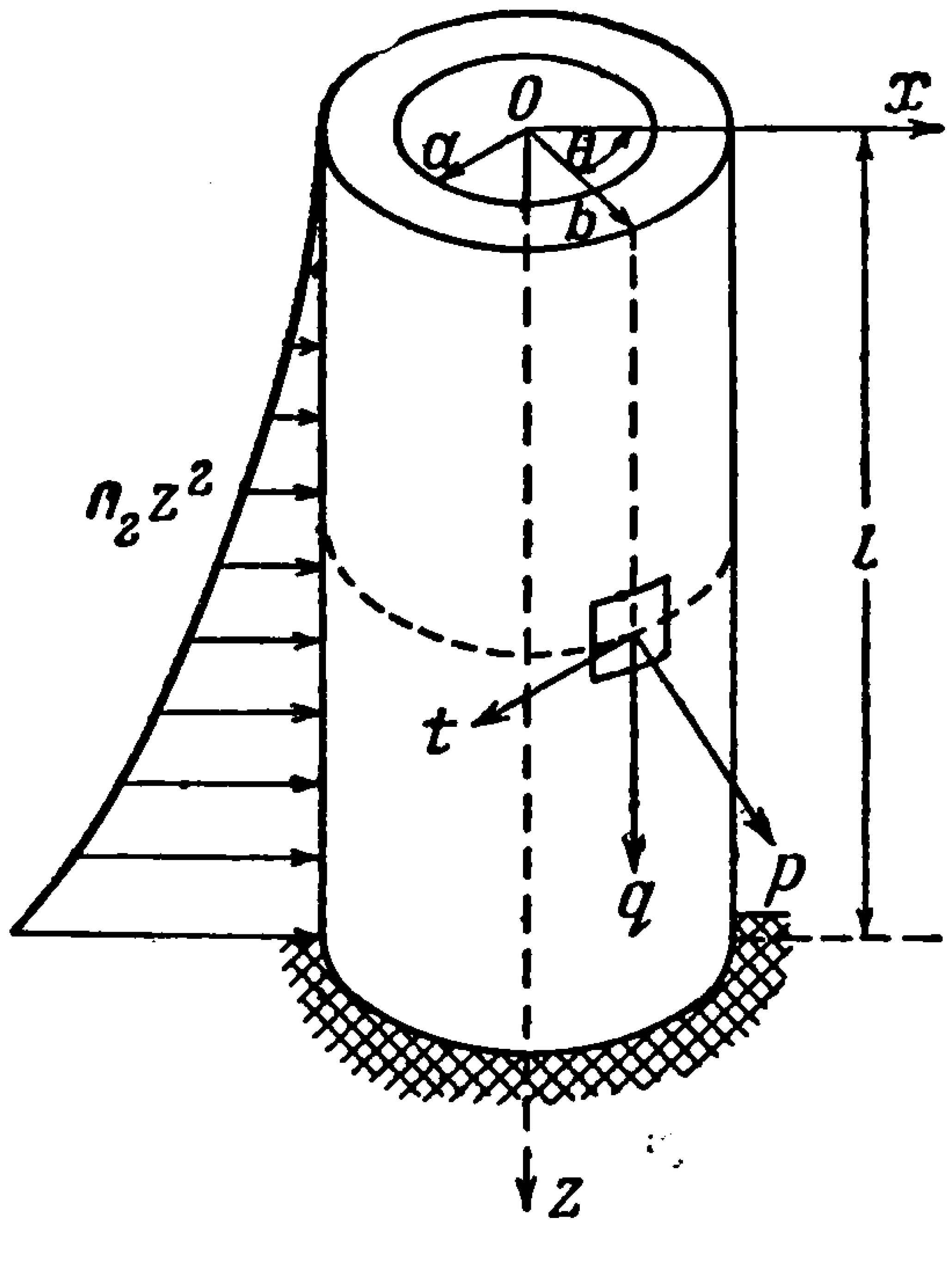
ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И КРУЧЕНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

С. Г. Лехницкий

(Ленинград)

Рассматривается задача об упругом равновесии трансверсально изотропного цилиндра под действием усилий, распределенных по боковой поверхности по закону целого полинома расстояния от торца и не зависящих от полярного угла θ. Для изотропного цилиндра различные варианты задачи о распределении напряжений под действием полиномиальной нагрузки (задача Альманзи) рассматривались рядом авторов; метод решения для осесимметричного случая и литература указаны в книге А. И. Лурье ([1], гл. 7). В предлагаемой статье дан общий метод, основанный на использовании теорий осесимметричной деформации и кручения, сходный с методом, предложенным А. И. Лурье для решения задачи о равновесии упругого слоя; он позволяет удовлетворить условиям на цилиндрических поверхностях точно, а на торцах — приближенно, «в среднем».

1. Общие выражения для напряжений и перемещений. Рассмотрим упругое тело в виде полого кругового цилиндра конечной длины, обладающее трансверсальной изотропией, т. е. имеющее в каждой точке плоскость, для которой все направления являются упруго-эквивалентными; эту плоскость будем считать нормальной к оси цилиндра. Отнесем тело к цилиндрической системе координат r, θ, z, расположив оси, как показано на фигуре.



Пусть цилиндр нагружен усилиями p, q, t и соответственно p', q', t', распределенными по наружной и внутренней поверхностям (радиальными, осевыми и тангенциальными), не зависящими от полярного угла θ.

Предполагаем, что материал следует обобщенному закону Гука и в дальнейшем рассматриваем только малые деформации. Используя обычные обозначения для напряжений и деформаций, запишем уравнения обобщенного закона Гука следующим образом [2]

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, & \gamma_{rz} &= \frac{1}{G_1}\tau_{rz}\\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{G_1}\tau_{\theta z}\\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_2}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{E_1}\sigma_z, & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G}\tau_{r\theta}
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

Здесь E, E_1 — модули Юнга для растяжения-сжатия в плоскости изотропии и в направлении, нормальном к ней; ν, ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона; G, G_1 — модули сдвига для плоскостей изотропии и для радиальных, причем

$$E\nu_1 = E_1\nu_2, \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.2}$$

Введем обозначения: a, b, l — радиусы сечения и длина цилиндра

$$H = E\nu_1 + G_1(1 - \nu - 2\nu_1\nu_2)$$

$$\alpha = 2G\frac{G_1(1-\nu_1\nu_2)}{H}, \qquad \beta = G_1\frac{E\nu_1}{H}$$

$$\alpha_1 = 2G\frac{E_1 - G_1\nu_1(1+\nu)}{H}, \qquad \beta_1 = G_1\frac{E_1(1-\nu)}{H}$$

$$\gamma = 2G\frac{1-\nu_1\nu_2}{H}, \qquad \delta = G_1\frac{1-\nu-2\nu_1\nu_2}{H} \tag{1.3}$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{G}{G_1}}, \qquad s_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha_1 - \beta \pm \sqrt{(\alpha_1-\beta)^2 - 4\alpha\beta_1}}{2\beta_1}}$$

$$D^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right), \qquad D_1^2 = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} = r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)$$

Здесь D^2 — оператор Лапласа для функции, зависящей только от r.

Во всех случаях, когда напряжения и перемещения не зависят от θ, их можно выразить через две функции $F(r, z)$ и $\varphi(r, z)$, а именно:

$$u_r = -\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial z}, \qquad u_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad w = \gamma D^2 F + \delta\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \tag{1.4}$$

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(2G\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \alpha D^2F + \beta\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right), \qquad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\alpha D^2 F - \beta\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z}\left(2G\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \alpha D^2F + \beta\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right), \qquad \tau_{\theta z} = G_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z} \tag{1.5}$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1 D^2 F + \beta_1\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right), \qquad \tau_{r\theta} = GD_1^2\varphi$$

Функции F и φ удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + s_1^2 D^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + s_2^2 D^2\right)F = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + s_0^2 D^2\right)\varphi = 0 \tag{1.6}$$

Первая функция F определяет осесимметричную деформацию, вторая — кручение. Очевидно, s_0 — всегда вещественное число, а числа s_1, s_2, как доказано в [2], не могут быть чисто мнимыми. Функция F отличается от введенной в работе [2] постоянным множителем. Ху Хай-чан показал [3], что и в общем случае деформации трансверсально изотропного тела напряжения и перемещения выражаются через две функции F и φ, удовлетворяющие уравнениям (1.6), где

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.7}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $s_1 \neq s_2$; решения для случая равных s можно получить путем предельного перехода.

Для построения решений поставленных задач понадобятся выражения

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(r)\,z^k, \qquad \varphi = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(r)\,z^k \tag{1.8}$$

Требуя, чтобы (1.8) удовлетворяли уравнениям (1.6), получим рекуррентные дифференциальные уравнения, связывающие F_k и, соответственно, φ_k с различными индексами. Окончательный результат можно записать в компактной форме, если ввести операторы, которые использовал А. И. Лурье [1]

$$\frac{1}{D}\sin szD = sz - \frac{s^3z^3}{3!}D^2 + \frac{s^5z^5}{5!}D^4 - \ldots$$
$$\cos szD = 1 - \frac{s^2z^2}{2!}D^2 + \frac{s^4z^4}{4!}D^4 - \ldots \tag{1.9}$$

Получим (для удобства отделим операторы от функций точками)

$$F = \sin s_1zD\cdot\frac{F_{10}}{D} + \cos s_1zD\cdot\frac{F_{11}}{s_1D^2} + \sin s_2zD\cdot\frac{F_{20}}{D} + \cos s_2zD\cdot\frac{F_{21}}{s_2D^2} \tag{1.10}$$
$$\varphi = \cos s_0zD\cdot\varphi_0 + \sin s_0zD\cdot\frac{\varphi_1}{D}$$

Здесь F_{10}, F_{20}, F_{11}, F_{21}, φ_0, φ_1 — неизвестные функции переменной r; их требуется определить так, чтобы были удовлетворены все условия на цилиндрических поверхностях. Подставляя в (1.4) и (1.5), получим выражения для перемещений и напряжений

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}\left[s_1\left(-\cos s_1zD\cdot F_{10} + \sin s_1zD\cdot\frac{F_{11}}{s_1D}\right) + \right.$$
$$\left. + s_2\left(-\cos s_2zD\cdot F_{20} + \sin s_2zD\cdot\frac{F_{21}}{s_2D}\right)\right]$$
$$w = D^2\left[(\gamma - \delta s_1^2)\left(\sin s_1zD\cdot\frac{F_{10}}{D} + \cos s_1zD\cdot\frac{F_{11}}{s_1D^2}\right) + \right.$$
$$\left. + (\gamma - \delta s_2^2)\left(\sin s_2zD\cdot\frac{F_{20}}{D} + \cos s_2zD\cdot\frac{F_{21}}{s_2D^2}\right)\right]$$
$$u_\theta = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos s_0zD\cdot\varphi_0 + \sin s_0zD\cdot\frac{\varphi_1}{D}\right) \tag{1.11}$$

$$\sigma_r = s_1\left[2G\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - (\alpha + \beta s_1^2)D^2\right]\left(\cos s_1zD\cdot F_{10} - \sin s_1zD\cdot\frac{F_{11}}{D}\right) +$$
$$+ s_2\left[2G\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - (\alpha + \beta s_2^2)D^2\right]\left(\cos s_2zD\cdot F_{20} - \sin s_2zD\cdot\frac{F_{21}}{D}\right)$$
$$\sigma_z = D^2\left[s_1(\alpha_1 - \beta_1s_1^2)\left(\cos s_1zD\cdot F_{10} - \sin s_1zD\cdot\frac{F_{11}}{s_1D}\right) + \right.$$
$$\left. + s_2(\alpha_1 - \beta_1s_2^2)\left(\cos s_2zD\cdot F_{20} - \sin s_2zD\cdot\frac{F_{21}}{s_2D}\right)\right]$$
$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}D^2\left[(\alpha + \beta s_1^2)\left(\sin s_1zD\cdot\frac{F_{10}}{D} + \cos s_1zD\cdot\frac{F_{10}}{s_1D^2}\right) + \right.$$
$$\left. + (\alpha + \beta s_2^2)\left(\sin s_2zD\cdot\frac{F_{20}}{D} + \cos s_2zD\cdot\frac{F_{21}}{s_2D^2}\right)\right]$$
$$\tau_{\theta z} = s_0G_1\frac{\partial}{\partial r}(-\sin s_0zD\cdot D\varphi_0 + \cos s_0zD\cdot\varphi_1)$$
$$\tau_{r\theta} = GD_1^2\left(\cos s_0zD\cdot\varphi_0 + \sin s_0zD\cdot\frac{\varphi_1}{D}\right) \tag{1.12}$$

Выражение σ_θ получим из σ_r, подставляя $\partial^2 / \partial r^2$ вместо $\partial / r\partial r$.

2. Осесимметричная деформация. Пусть на цилиндрических поверхностях заданы усилия p и q, обладающие симметрией вращения и меняющиеся по закону целых полиномов относительно z, а $t = 0$. Достаточно рассмотреть случай, когда каждое из усилий пропорционально z^k, где k — произвольное целое число; решения для нагрузок, заданных в виде полиномов, найдем путем наложения.

Рассмотрим сначала случай, когда нормальное усилие пропорционально четной степени z, а касательное — нечетной. Граничные условия

$$\sigma_r = p_{2m}\left(\frac{z}{l}\right)^{2m}, \quad \tau_{rz} = q_{2m-1}\left(\frac{z}{l}\right)^{2m-1}, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = b \tag{2.1}$$

$$\sigma_r = p_{2m}'\left(\frac{z}{l}\right)^{2m}, \quad \tau_{rz} = q_{2m-1}'\left(\frac{z}{l}\right)^{2m-1}, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = a$$

В формулах (1.11) и (1.12) нужно положить $\varphi_0 = \varphi_1 = F_{11} = F_{21} = 0$; тогда $u_\theta = \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0$. Выражения σ_r и τ_{rz} в развернутом виде:

$$\sigma_r = 2G\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(s_1F_{10} + s_2F_{20}) - D^2[s_1(\alpha + \beta s_1^2)F_{10} + s_2(\alpha + \beta s_2^2)F_{20}] -$$
$$-\frac{z^2}{2!}\Big\{2G\frac{1}{r}\frac{d}{dr}D^2(s_1^3F_{10} + s_2^3F_{20}) - D^4[s_1^3(\alpha + \beta s_1^2)F_{10} +$$
$$+ s_2^3(\alpha + \beta s_2^2)F_{20}]\Big\} + \ldots + (-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}\Big\{2G\frac{1}{r}\frac{d}{dr}D^{2k}(s_1^{2k+1}F_{10} + s_2^{2k+1}F_{20}) -$$
$$-D^{2k+2}[s_1^{2k+1}(\alpha + \beta s_1^2)F_{10} + s_2^{2k+1}(\alpha + \beta s_2^2)F_{20}]\Big\} + \ldots \tag{2.2}$$

$$\tau_{rz} = z\frac{d}{dr}D^2[s_1(\alpha + \beta s_1^2)F_{10} + s_2(\alpha + \beta s_2^2)F_{20}] -$$
$$-\frac{z^3}{3!}\frac{d}{dr}D^4[s_1^3(\alpha + \beta s_1^2)F_{10} + s_2^3(\alpha + \beta s_2^2)F_{20}] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}\frac{d}{dr}D^{2k}[s_1^{2k-1}(\alpha + \beta s_1^2)F_{10} + s_2^{2k-1}(\alpha + \beta s_2^2)F_{20}] + \ldots$$

В силу условий (2.1) последние степени z в разложениях (2.2) будут $2m$ и $2m-1$. Следовательно, нужно положить

$$D^{2m+2}F_{10} = A_{2m+2}, \qquad D^{2m+2}F_{20} = C_{2m+2} \tag{2.3}$$

(A, C — произвольные постоянные). Отсюда, принимая во внимание структуру оператора D^2, находим последовательно путем интегрирования

$$D^{2m}F_{10} = \frac{A_{2m+2}}{4}r^2 + B_{2m}\ln r + A_{2m}$$

$$D^{2m-2}F_{10} = \frac{A_{2m+2}}{(2^2 2!)^2}r^4 + \frac{B_{2m}}{4}r^2(\ln r - 1) + \frac{A_{2m}}{4}r^2 + B_{2m-2}\ln r + A_{2m-2}$$

$$D^{2m-2k}F_{10} = \frac{A_{2m+2}}{[2^{k+1}(k+1)!]^2}r^{2k+2} + \frac{B_{2m}}{(2^k k!)^2}r^{2k}\left(\ln r - \frac{b_2^{k+1}}{k!}\right) +$$
$$+\frac{A_{2m}}{(2^k k!)^2}r^{2k} + \frac{B_{2m-2}}{[2^{k-1}(k-1)!]^2}r^{2k-2}\left[\ln r - \frac{b_2^k}{(k-1)!}\right] +$$
$$+\frac{A_{2m-2}}{[2^{k-1}(k-1)!]^2}r^{2k-2} + \ldots + \frac{B_{2m-2k+2}}{4}r^2(\ln r - 1) + \tag{2.4}$$
$$+\frac{A_{2m-2k+2}}{4}r^2 + B_{2m-2k}\ln r + A_{2m-2k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

Здесь A_i, B_i — произвольные постоянные, b_2^{k+1} — числа Стирлинга [4],

$$b_2^{k+1} = k!\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right) \tag{2.5}$$

При $k = m - 1$ получим $D^2 F_{10}$ и при $k = m - D^\circ F_{10} = F_{10}$. Выражения для операторов над функцией F_{20} имеют, разумеется, ту же структуру (2.4), только вместо A_i, B_i войдут другие постоянные, которые обозначим через C_i и D_i.

Полагая в формулах (2.2) $r = b$ и $r = a$ и приравнивая коэффициенты при z^{2m} и z^{2m-1} заданным величинам (см. (2.1)), получим уравнения для коэффициентов

$$(G - \alpha - \beta s_1^2)\, s_1^{2m+1} A_{2m+2} + (G - \alpha - \beta s_2^2)\, s_2^{2m+1} C_{2m+2} + \frac{2G}{b^2}\left(s_1^{2m+1} B_{2m} + s_2^{2m+1} D_{2m}\right) = (-1)^m (2m)!\, \frac{p_{2m}}{l^{2m}}$$

$$(G - \alpha - \beta s_1^2)\, s_1^{2m+1} A_{2m+2} + (G - \alpha - \beta s_2^2)\, s_2^{2m+1} C_{2m+2} + \frac{2G}{a^2}\left(s_1^{2m+1} B_{2m} + s_2^{2m+1} D_{2m}\right) = (-1)^m (2m)!\, \frac{p'_{2m}}{l^{2m}} \tag{2.6}$$

$$[(\alpha + \beta s_1^2)\, s_1^{2m-1} A_{2m+2} + (\alpha + \beta s_2^2)\, s_2^{2m-1} C_{2m+2}]\, \frac{b^2}{2} + [(\alpha + \beta s_1^2)\, s_1^{2m-1} B_{2m} + (\alpha + \beta s_2^2)\, s_2^{2m-1} D_{2m}] = (-1)^{m-1} (2m-1)!\, \frac{q_{2m-1} b}{l^{2m-1}}$$

$$[(\alpha + \beta s_1^2)\, s_1^{2m-1} A_{2m+2} + (\alpha + \beta s_2^2)\, s_2^{2m-1} C_{2m+2}]\, \frac{a^2}{2} + [(\alpha + \beta s_1^2)\, s_1^{2m-1} B_{2m} + (\alpha + \beta s_2^2)\, s_2^{2m-1} D_{2m}] = (-1)^{m-1} (2m-1)!\, \frac{q'_{2m-1} a}{l^{2m-1}}$$

Полагая $r = b$ и $r = a$ и приравнивая нулю коэффициенты при z^{2m-2} в выражении σ_r и при z^{2m-3} в выражении τ_{rz}, получим четыре уравнения, содержащие, кроме только что найденных, новые постоянные A_{2m}, C_{2m}, B_{2m-2}, D_{2m-2}. Идя таким путем от высших степеней z к низшим, дойдем до слагаемого в выражении σ_r, не зависящего от z и получим систему двух уравнений для двух линейных комбинаций коэффициентов

$$(G - \alpha - \beta s_1^2)\, s_1 A_2 + (G - \alpha - \beta s_2^2)\, s_2 C_2, \qquad s_1 B_0 + s_2 D_0 \tag{2.7}$$

из которой они и определятся однозначно.

В результате u_r, σ_r, σ_θ, τ_{rz} будут определены полностью, а в выражения w и σ_z войдет одна произвольная постоянная (за которую можно принять A_2 или C_2 или какую-нибудь их линейную комбинацию). Произвольную постоянную найдем, требуя, чтобы на одном из торцов главный вектор усилий был равен заданной величине, в частности,— нулю; нетрудно показать, что тогда усилия на другом торце будут уравновешиваться заданной внешней нагрузкой. Торцевое сечение $z = 0$ останется плоским.

Если нормальное усилие пропорционально нечетной степени z, а касательное — четной, то имеем условия

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p_{2m+1}\left(\frac{z}{l}\right)^{2m+1}, \quad \tau_{rz} = q_{2m}\left(\frac{z}{l}\right)^{2m}, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = b \\ \sigma_r &= p'_{2m+1}\left(\frac{z}{l}\right)^{2m+1}, \quad \tau_{rz} = q'_{2m}\left(\frac{z}{l}\right)^{2m}, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = a \end{aligned} \tag{2.8}$$

Задача решится совершенно аналогичным путем. Нужно положить равными нулю функции φ_0, φ_1, F_{10}, F_{20}, а для $D^{2m-2k} F_{11}, D^{2m-2k} F_{21}$ получим те же выражения (2.4).

В этом случае из граничных условий (2.8) определятся все коэффициенты, кроме A_0, C_0, и выражения для напряжений не будут содержать произвольных постоянных. На торце $z = 0$ напряжение σ_z равно нулю, на другом торце $z = l$ оно уравновешивается внешней нагрузкой q.

Нетрудно показать, используя выражения (1.3), что определители всех систем уравнений при неравных s_1 и s_2 отличны от нуля.

Для сплошного цилиндра ($a = 0$) формулы значительно упрощаются, так как все члены в (2.4), содержащие логарифмы, должны быть отброшены, как дающие особенности при $r = 0$.

Пример. Полый цилиндр, нагруженный по внешней поверхности нормальным давлением, распределенным по параболическому закону (фигура).

Имеем: $m = 1$

$$p = -n_2\left(\frac{z}{l}\right)^2, \qquad q = p' = q' = 0, \qquad \varphi_0 = \varphi_1 = F_{11} = F_{21} = 0$$

$$D^4F_{10} = A_4, \qquad D^4F_{20} = C_4$$

$$D^2F_{10} = \frac{A_4}{4}r^2 + B_2\ln r + A_2, \qquad D^2F_{20} = \frac{C_4}{4}r^2 + D_2\ln r + C_2 \tag{2.9}$$

$$F_{10} = \frac{A_4}{64}r^4 + \frac{B_2}{4}r^2(\ln r - 1) + \frac{A_2}{4}r^2 + B_0\ln r + A_0$$

$$F_{20} = \frac{C_4}{64}r^4 + \frac{D_2}{4}r^2(\ln r - 1) + \frac{C_2}{4}r^2 + D_0\ln r + C_0$$

Определяя постоянные из граничных условий, получим следующие окончательные выражения для напряжений и перемещений:

$$\sigma_r = -\frac{n_2b^2}{(b^2-a^2)l^2}\left\{z^2\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\nu_1}{1-\nu_1\nu_2}\left[\frac{1-\nu}{4}\left(b^2+a^2-r^2-\frac{a^2b^2}{r^2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left. + (1+\nu)\,a^2\left(\frac{b^2\ln b - a^2\ln a}{b^2-a^2} - \frac{a^2b^2\ln b/a}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{r^2} - \ln r\right)\right]\right\}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{n_2b^2}{(b^2-a^2)l^2}\left\{z^2\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\nu_1}{1-\nu_1\nu_2}\left[\frac{1-\nu}{4}\left(b^2+a^2-3r^2+\frac{a^2b^2}{r^2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left. + (1+\nu)\,a^2\left(\frac{b^2\ln b - a^2\ln a}{b^2-a^2} + \frac{a^2b^2\ln b/a}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{r^2} - \ln r - 1\right)\right]\right\} \tag{2.10}$$

$$\sigma_z = \frac{n_2b^2}{(b^2-a^2)l^2}\,\frac{E_1}{E(1-\nu_1\nu_2)}\left[(1-\nu)r^2 + (1+\nu)a^2 + 2(1+\nu)a^2\left(\ln r - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{b^2\ln b - a^2\ln a}{b^2-a^2}\right) + C(1-\nu_1\nu_2)\right]$$

$$\tau_{rz} = 0$$

$$u_r = -\frac{n_2b^2}{E(b^2-a^2)l^2}\left\{z^2\left[(1-\nu)r + (1+\nu)\frac{a^2}{r}\right] + \frac{\nu_1}{1-\nu_1\nu_2}\frac{1-\nu}{4}\left[(1-\nu)(b^2+a^2)r - \right.\right.$$
$$\left. - (3-\nu)r^3 + (1+\nu)\frac{a^2b^2}{r}\right] + \frac{\nu_1(1+\nu)}{1-\nu_1\nu_2}a^2\left[(1-\nu)\frac{b^2\ln b - a^2\ln a}{b^2-a^2}r + (1+\nu)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{a^2b^2\ln b/a}{b^2-a^2}\frac{1}{r} - (1-\nu)r\ln r - r\right]\right\} \tag{2.11}$$

$$w = \frac{n_2b^2}{E(b^2-a^2)l^2}\left\{\frac{2\nu_2}{3}z^3 + z\left[(1-\nu)r^2 + 2(1+\nu)a^2\ln r + C\right]\right\}, \qquad u_\theta = 0$$

Произвольная постоянная C найдется из условий на торцах; при отсутствии внешней нагрузки

$$C = -0.5\,\lambda\,(b^2+a^2) \qquad \left(\lambda = \frac{1-\nu}{1-\nu_1\nu_2}\right) \tag{2.12}$$

Для сплошного цилиндра получим из (2.10) — (2.11) (2. 13)

$$\sigma_r = -\frac{n_2}{l^2}\left[z^2 + \frac{\lambda\nu_1}{4}(b^2 - r^2)\right], \quad \sigma_\theta = -\frac{n_2}{l^2}\left[z^2 + \frac{\lambda\nu_1}{4}(b^2 - 3r^2)\right], \quad \sigma_z = \frac{n_2}{l^2}\frac{E_1}{E}(\lambda r^2 + C)$$

3. Кручение. Пусть на поверхностях $r = b$, $r = a$ полого цилиндра действуют только усилия t (фигура), не зависящие от θ и распределенные по закону полинома. Один конец предполагается ненагруженным, другой — закрепленным.

Здесь также достаточно рассмотреть случай нагрузки, пропорциональной какой-нибудь степени z. Пусть это будет четная степень. Имеем граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{r\theta} = t_{2m}\left(\frac{z}{l}\right)^{2m} \quad \text{при } r = b \\ \sigma_r &= \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{r\theta} = t_{2m}'\left(\frac{z}{l}\right)^{2m} \quad \text{при } r = a \end{aligned} \tag{3.1}$$

В формулах (1.11) — (1.12) нужно положить

$$F_{10} = F_{20} = F_{11} = F_{21} = \varphi_1 = 0, \qquad \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0$$

Выражения для перемещения u_θ и напряжения $\tau_{r\theta}$ в развернутом виде запишутся следующим образом:

$$u_\theta = \frac{d}{dr}\left[\varphi_0 - \frac{s_0^2 z^2}{2!}D^2\varphi_0 + \ldots + (-1)^k \frac{s_0^{2k}z^{2k}}{(2k)!}D^{2k}\varphi_0 + \ldots\right] \tag{3.2}$$

$$\tau_{r\theta} = GD_1^2\left[\varphi_0 - \frac{s_0^2 z^2}{2!}D^2\varphi_0 + \ldots + (-1)^k \frac{s_0^{2k}z^{2k}}{(2k)!}D^{2k}\varphi_0 + \ldots\right] \tag{3.3}$$

Отбрасывая в разложении $\tau_{r\theta}$ степени z выше $2m$, получим для φ_0 уравнение

$$D_1^2 D^{2m+2}\varphi_0 = 0 \tag{3.4}$$

Отсюда

$$D^{2m+2}\varphi_0 = \frac{A_{2m+4}}{4}r^2 + A_{2m+2}$$

$$D^{2m}\varphi_0 = \frac{A_{2m+4}}{(2^2 2!)^2}r^4 + \frac{A_{2m+2}}{4}r^2 + B_{2m}\ln r + A_{2m} \tag{3.5}$$

. . . .

$$\begin{aligned} D^{2m-2k}\varphi_0 = {} & \frac{A_{2m+4}}{[2^{k+2}(k+2)!]^2}r^{2k+4} + \frac{A_{2m+2}}{[2^{k+1}(k+1)!]^2}r^{2k+2} + \\ & + \frac{B_{2m}}{(2^k k!)^2}r^{2k}\left(\ln r - \frac{b_2^{k+1}}{k!}\right) + \frac{A_{2m}}{(2^k k!)^2}r^{2k} + \ldots \\ & \ldots + \frac{B_{2m-2k+2}}{4}r^2(\ln r - 1) + \frac{A_{2m-2k+2}}{4}r^2 + B_{2m-2k}\ln r + A_{2m-2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1^2 D^{2m-2k}\varphi_0 = {} & \frac{A_{2m+4}}{2^{2k+2}k!\,(k+2)!}r^{2k+2} + \frac{A_{2m+2}}{2^{2k}(k-1)!\,(k+1)!}r^{2k} + \\ & + \frac{B_{2m}}{2^{2k-2}(k-2)!\,k!}r^{2k-2}\left[\ln r + \frac{2k-1}{2k(k-1)} - \frac{b_2^{k+1}}{k!}\right] + \frac{A_{2m}}{2^{2k-2}(k-2)!\,k!}r^{2k-2} + \ldots \\ & \ldots + \frac{B_{2m-2k+4}}{8}r^2\left(\ln r - \frac{3}{4}\right) + \frac{A_{2m-2k+4}}{8}r^2 + \frac{B_{2m-2k+2}}{2} - \frac{2B_{2m-2k}}{r^2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$

Удовлетворяя условиям (4.1), получаем уравнения

$$(D_1{}^2D^{2m}\varphi_0)_{r=b} = \frac{t_{2m}}{l^{2m}} \quad (D_1{}^2D^{2m}\varphi_0)_{r=a} = \frac{t_{2m}{}'}{l^{2m}} \tag{3.7}$$

$$D_1{}^2D^{2m-2}\varphi_0 = 0, \quad D_1{}^2D^{2m-4}\varphi_0 = 0, \quad \ldots, \quad D_1{}^2\varphi_0 = 0 \quad \text{при } r = b \text{ и } r = a$$

Из этих уравнений последовательно определяем постоянные A_{2m+4}, B_{2m}; A_{2m+2}, B_{2m-2}; ...; A_6, B_2; A_4, B_0. Коэффициент A_0 в формулы не войдет, а A_2 войдет только в выражение для перемещения; определим A_2, требуя, чтобы какая-нибудь окружность $r = R$ в плоскости закрепленного конца (например, наружный или внутренний контур сечения) оставалась неподвижной. На свободном конце $\tau_{\theta z} = 0$, на закрепленном это напряжение уравновешивается внешними усилиями.

Если усилия t пропорциональны нечетной степени z, то задача решается совершенно аналогично. В формулах (1.11) и (1.12) нужно положить равными нулю все функции, кроме φ_1. В выражение $\tau_{\theta z}$ войдет неопределенная постоянная, которую нужно найти, потребовав, чтобы на свободном конце скручивающий момент был равен нулю.

Пример. Полый цилиндр, нагруженный скручивающими усилиями, распределенными по наружной поверхности по параболическому закону.

Имеем $m = 1$

$$t = t_2\left(\frac{z}{e}\right)^2, \qquad t' = 0, \qquad \varphi_1 = 0$$

$$D_1{}^2D^4\varphi_0 = 0$$

$$D_1{}^2D^2\varphi_0 = \frac{A_6}{8}r^2 - \frac{2B_2}{r^2} \tag{3.8}$$

$$D_1{}^2\varphi_0 = \frac{A_6}{96}r^4 + \frac{A_4}{8}r^2 + \frac{B_2}{2} - \frac{2B_0}{r_2}$$

Определив четыре постоянные из уравнений (3.7), находим выражения для напряжений

$$\tau_{r\theta} = \frac{t_2b^2}{(b^4 - a^4)\,l^2}\left\{z^2\left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) + \frac{G_1}{6G\,(b^2 + a^2)}\left[(b^4 + a^2b^2 + 4a^4)\,r^2 + \frac{a^4b^2\,(3a^2 - b^2)}{r^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - (b^2 + a^2)\,(r^4 + 3a^4)\right]\right\} \tag{3.9}$$
$$\tau_{\theta z} = \frac{t_2b^2}{(b^4 - a^4)\,l^2}\left[-\frac{4}{3}z^3r + \frac{G_1}{G}z\left(r^3 + \frac{a^4}{r} - \frac{2}{3}\,\frac{b^4 + a^2b^2 + 4a^4}{b^2 + a^2}\,r\right)\right]$$

Как и следовало ожидать, этот результат совпал с полученным ранее иным методом [5].

Поступила 8 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
3. Hu Hai-chang. On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body. Acta sci. sinica, 1953, 2, № 2.
4. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
5. Лехницкий С. Г. Кручение анизотропного стержня усилиями, распределенными по боковой поверхности. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.