

## ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

А. Г. Габрильянц, В. И. Феодосьев  
(Москва)

В основе обычного анализа устойчивости упругих систем лежит предположение о том, что исходное состояние системы является идеальным. Так, если решается задача об устойчивости стержня, предполагается, что его ось прямолинейна, материал совершенно однороден и сжимающая сила приложена строго центрально. Если рассматривается устойчивость пластины, то считают, что начальная погиб отсутствует, а внешние силы приложены точно в срединной плоскости.

В действительности реальная система отличается в той или иной мере от идеальной. Это отличие в большинстве случаев не влечет за собой серьезных расхождений между расчетом и экспериментом. Условия критического состояния идеальной схемы оказываются мало отличающимися от условий выпучивания реальной системы.

Есть, однако, задачи, в которых пренебрежение указанными отклонениями от идеальной схемы приводит к существенным погрешностям. К числу таких задач относится рассматриваемая ниже задача об устойчивости сферической оболочки, нагруженной внешним равномерно распределенным давлением (фиг. 1).

1. Положим, что реальная оболочка имеет небольшие отклонения от идеальной схемы. Пусть хотя бы это будут отклонения в форме срединной поверхности, определяемые для простоты только одним параметром  $f$ .

Под действием внешнего давления  $p$  оболочка получает местный прогиб  $w$ . Характер зависимости  $p = p(w)$  определяется величиной  $f$  (фиг. 2).

На оси ординат вместо давления  $p$  отложен безразмерный параметр

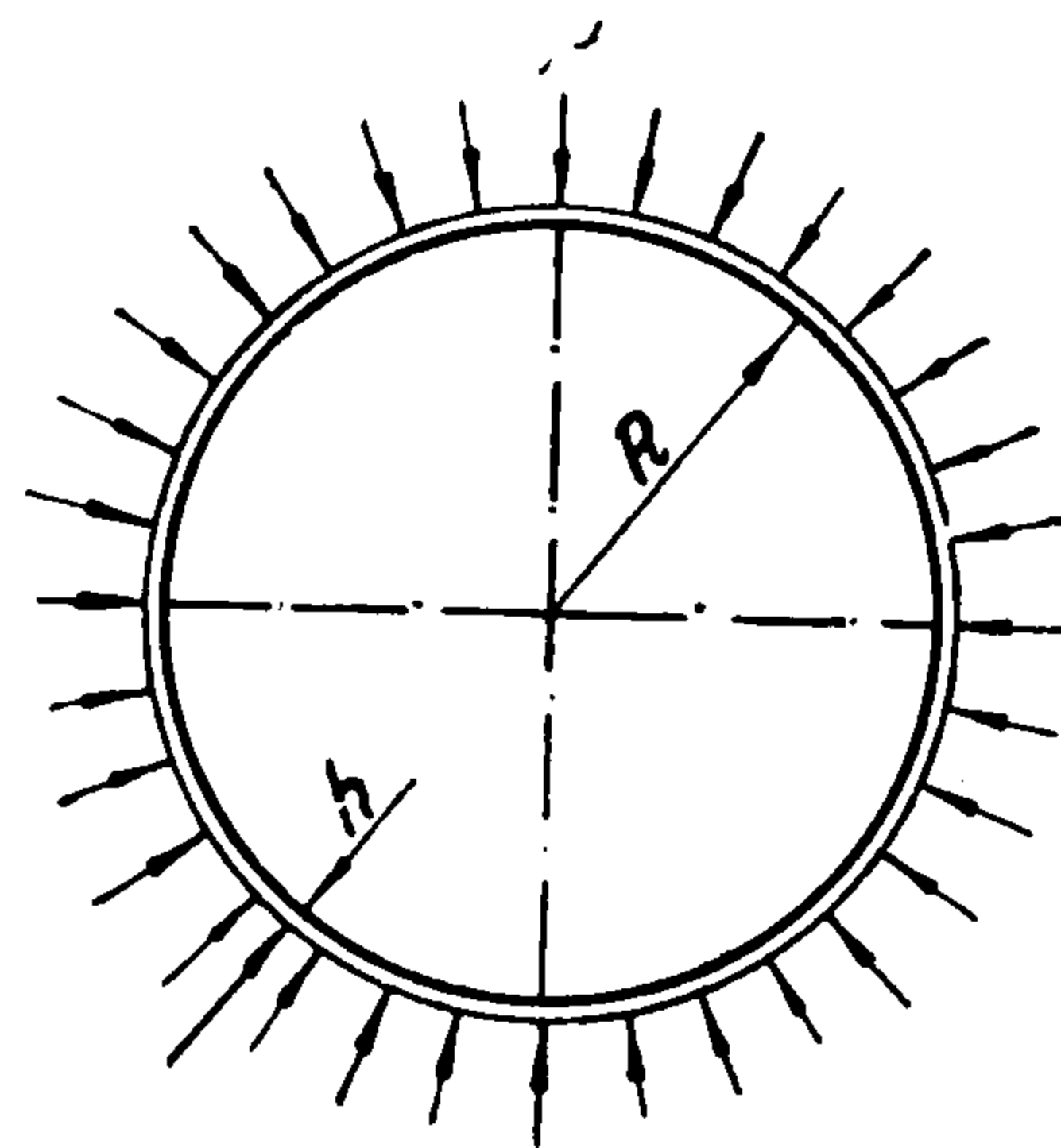
$$p^\circ = \frac{pR^2}{2Eh^2}$$

Потеря устойчивости происходит хлопком. Например, при  $f = f_3$  давление повышается только до значения  $p^\circ(A)$  (точка  $A$ ), после чего происходит внезапный переход к новой форме равновесия (точка  $B$ ). Давление хлопка  $p^\circ(A)$  увеличивается по мере уменьшения параметра  $f$ . При  $f = 0$  имеем

$$p^\circ = \frac{pR^2}{2Eh^2} = 0.606$$

т. е. то значение критического давления, которое дает классическая теория для идеальной схемы.

Малые, незаметные, но реально существующие отступления от расчетной схемы оказывают в рассматриваемом случае столь сильное влияние на равновесное состояние оболочки, что потеря устойчивости, как



Фиг. 1

показывает опыт, происходит при

$$p^\circ(A) = 0.10 \div 0.15$$

вместо ожидаемого  $p_*^\circ = 0.606$ . Зона вероятной потери устойчивости отмечена на фиг. 2 штриховкой.

Таким образом, обычный анализ идеализированной схемы не приводит в данном случае к удовлетворительным результатам. Для достаточно точного определения давления хлопка необходим статистический анализ

погрешностей, возникающих при изготовлении и испытании оболочки. Решение такой задачи в настоящее время не представляется возмож-

ным. В связи с этим возникла концепция устойчивости в большом, согласно которой можно в подобных задачах отказаться от статистического подхода и ограничиться по-прежнему рассмотрением идеализированной схемы,



Фиг. 2

но в области больших перемещений. В результате такого решения определяется кривая  $p^\circ = p^\circ(w)$  для случая  $f = 0$  (фиг. 2) и находится величина так называемого нижнего критического давления  $p_{\min}^\circ$ , ограничивающего возможное давление хлопка снизу. Потеря устойчивости оболочки рассматривается при этом как вероятная в интервале

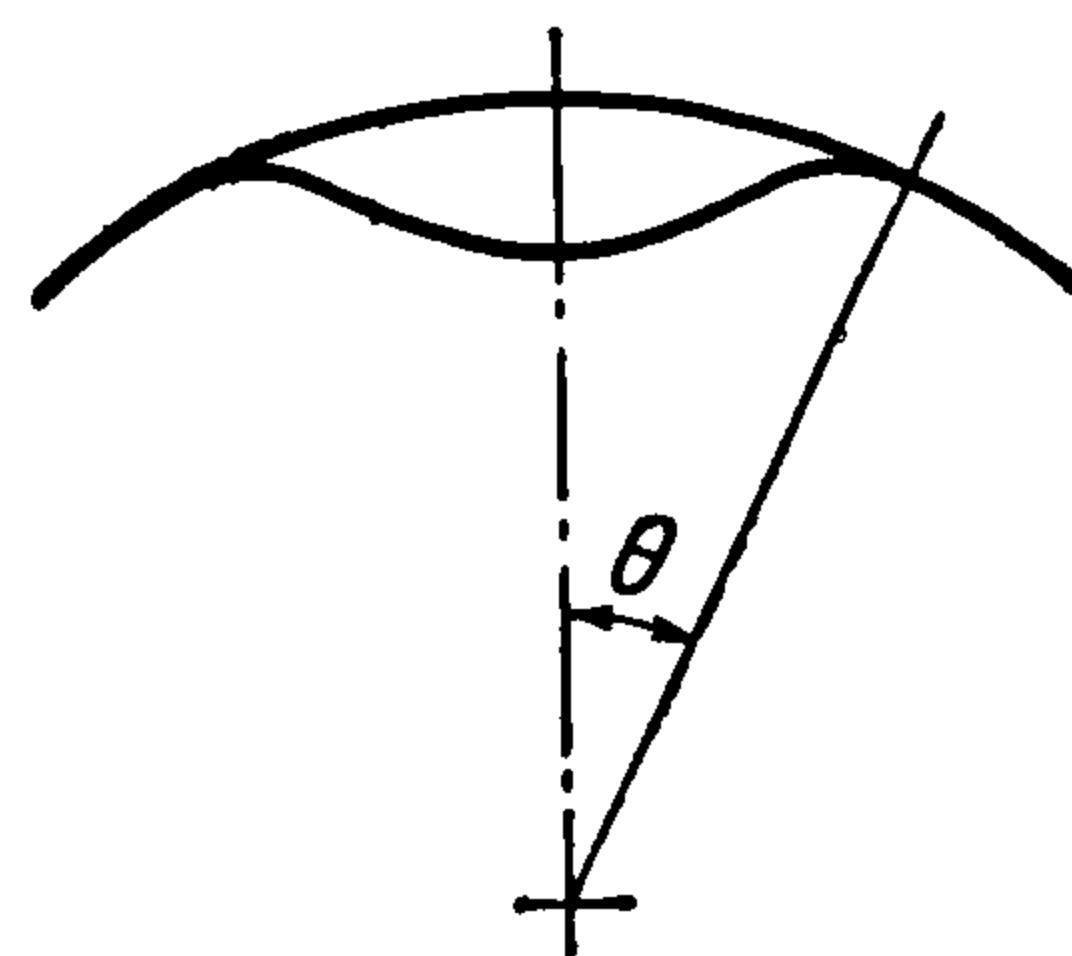
$$p_{\min}^\circ < p^\circ < p_*^\circ$$

Таким образом, возникла задача определения форм равновесия сферической оболочки в области больших перемещений.

Первая попытка решения этой задачи принадлежит Карману и Тзяну [1]. Авторами было сделано предположение, что изгиб оболочки носит местный характер и зона вмятины вписывается в область малых углов  $\theta$  (фиг. 3). Это предположение было в дальнейшем принято и другими авторами. В работе [1] задача решается энергетическим методом. Считается, что за пределами вмятины оболочка не деформируется вовсе, а в пределах вмятины окружное удлинение  $\epsilon_2 = 0$ . Последнее условие ничем не оправдано и приводит к количественно неверным результатам.

После работы Кармана и Тзяна было сделано много попыток решить эту задачу. Авторы (см., например, работы [2,3]) пользовались вариационными методами (Ритца или Галеркина) и неизменно получали для нижнего критического давления величины порядка  $p_{\min}^\circ = 0.13 \div 0.40$  в зависимости от вида выбранной функции и метода варьирования. Ясно, что даже значение  $p_{\min}^\circ = 0.13$  является сильно завышенным, так как эксперимент для давлений выпучивания дает  $p^\circ(A) = 0.1 \div 0.15$ , а  $p_{\min}^\circ$  должно быть еще существенно меньшим.

В 1954 г. была сделана попытка показать, что величина  $p_{\min}^\circ$  должна быть отрицательной, и что, следовательно, существуют формы равновесия сферической оболочки с вмятиной при отсутствии давления [4]. Задача решалась методом Галеркина. Зона



Фиг. 3

вмятины сопрягалась с остальной частью оболочки через переходную зону местного изгиба с полным соблюдением геометрических и силовых граничных условий. Расчет дал  $p^{\circ}_{\min} = -0.13$ .

Эта работа вызвала критику со стороны Х. М. Муштари [5], который, используя другой метод варьирования, при той же аппроксимирующей функции получил  $p^{\circ}_{\min} = +0.1$ . Этим была наглядно показана высокая степень чувствительности искомого решения к методам варьирования и к выбору аппроксимирующих функций. Стало ясно, что вариационный метод в данном случае себя исчерпал.

Таким образом, задача определения нижнего критического давления приобрела уже не столько практический, сколько принципиальный интерес.

Первые попытки обойти вариационный метод и решить нелинейные уравнения равновесия сферической оболочки численно были сделаны в работах Келлера и Райсса [6] и Муррея и Франка [7]. В этих работах фактически решалась задача о равновесии заземленного по контуру пологого купола. Полученное решение незаконно переносилось на замкнутую сферу. Силовые граничные условия на контуре сопряжения вмятины с неизогнутой оболочкой не соблюдались. Расчет производился для оболочек с наперед выбранным отношением радиуса к толщине  $R/h$ .

В предлагаемой работе дается числовое решение нелинейных уравнений сферического купола, полученное при помощи быстродействующей машины. Решение проведено независимо от параметра  $R/h$  и является точным в пределах применимости уравнений пологих оболочек.

2. Примем, что вмятина, образующаяся на сфере, имеет сравнительно небольшие размеры. Поэтому оболочку в зоне вмятины допустимо рассматривать как пологую. Такой подход является в настоящее время общепринятым и к заметным противоречиям пока не приводит.

Уравнения пологой сферической оболочки в предположении осесимметричных форм равновесия имеют следующий вид [4,8]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\psi}{\rho} &= \vartheta \left( \theta_1 \rho + \frac{\vartheta}{2} \right) \\ \rho \frac{d^2\vartheta}{d\rho^2} + \frac{d\vartheta}{d\rho} - \frac{\vartheta}{\rho} &= -\lambda \psi (\theta_1 \rho + \vartheta) + \nu \rho^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь

$$\rho = \frac{r}{r_1}, \quad \psi = -\frac{T_1 \rho}{Eh}, \quad \lambda = 12(1 - \mu^2) \frac{r_1^2}{h^2}, \quad \nu = \lambda \frac{pr_1}{2Eh} \quad (2.2)$$

где  $T_1$  — радиальное растягивающее усилие,  $\vartheta$  — угол поворота дуги меридиана,  $r_1$  — любой произвольно зафиксированный радиус (фиг. 4 а)  $\theta_1$  — угол наклона оболочки на этом радиусе.

Эти уравнения применимы в мере, в которой можно положить

$$\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta, \text{ или } \theta^2 \ll 1$$

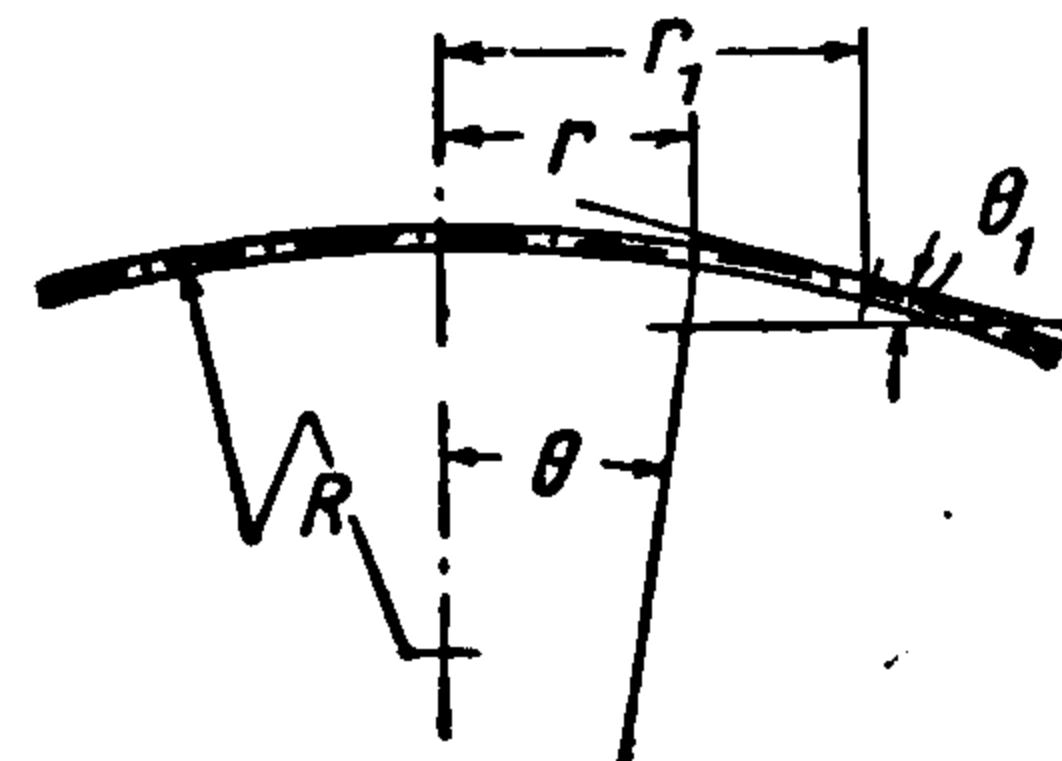
За величину  $r_1$  удобно в данном случае принять радиус сферы  $R$ . Так как  $\theta_1 = r_1 / R$ , то тогда  $\theta = 1$ .

Область применения (2.1) определяется, очевидно, соотношением

$$\rho^2 = \frac{r^2}{R^2} \ll 1$$

С тем, чтобы освободиться от параметра  $R/h$ , введем взамен  $\rho$ ,  $\vartheta$  и  $\psi$  новые переменные  $x$ ,  $\Theta$ ,  $\Psi$

$$\rho = \frac{x}{\lambda^{1/4}}, \quad \vartheta = \frac{\Theta}{\lambda^{1/4}}, \quad \psi = \frac{\nu}{\lambda} \rho + \frac{1}{\lambda^{3/4}} \Psi \quad (2.3)$$



Фиг. 4

Тогда система уравнений (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} x \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d\Psi}{dx} - \frac{\Psi}{x} &= \Theta \left( x + \frac{1}{2} \Theta \right) \\ x \frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{d\Theta}{dx} - \frac{\Theta}{x} &= -\Psi (x + \Theta) - p_0 x \Theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$p_0 = \frac{pR^2}{Eh^2} \sqrt{3(1-\mu^2)} \quad (2.5)$$

и в соответствии с (2.2) и (2.3)

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{R} \left[ \frac{R^2}{h^2} 12(1-\mu^2) \right]^{1/4}, \quad \Theta = \vartheta \left[ \frac{R^2}{h^2} 12(1-\mu^2) \right]^{1/4} \\ \Psi &= -\frac{r}{EhR} \left( T_1 + \frac{pR}{2} \right) \left[ \frac{R^2}{h^2} 12(1-\mu^2) \right]^{3/4} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, переменная  $x$  представляет собой безразмерный радиус, функция  $\Theta$  дает в определенном масштабе углы поворота дуги меридиана, а функция  $\Psi$  показывает, как сильно радиальное растягивающее усилие  $T_1$  отличается от своего значения  $1/2 pR$ , соответствующего безмоментному состоянию. Из первого выражения (2.6) вытекает, что система (2.4) применима при значениях

$$x \ll \left[ \frac{R^2}{h^2} 12(1-\mu^2) \right]^{1/4} \approx 1.8 \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (2.7)$$

Заметим, что указанное преобразование уравнений возможно и для несимметричных форм равновесия сферической и цилиндрической полужою оболочек. Поэтому вообще отпадает необходимость представлять критические нагрузки в функции параметра  $R/h$ , как это часто делается.

В центре вмятины при  $r = 0$  имеем  $\Theta = 0$  и  $\Psi = 0$ , за пределами вмятины (при условной бесконечности) должно сохраняться безмоментное состояние, т. е.  $\Theta = 0$  и  $\Psi = 0$  (так как  $T_1 = -1/2 pR$ ).

Разделим область изменения  $x$  на два участка  $0 \leq x \leq x_k$  и  $x_k \leq x < \infty$ .

За  $x_k$  берем такое достаточно большое значение  $x$ , при котором на втором участке затухающую функцию  $\Theta$  можно было бы считать пренебрежимо малой по сравнению с  $x$ . Понятно, что выбор  $x_k$  зависит от того, в пределах сколь больших перемещений предполагается решать задачу.

При  $x > x_k$  система (2.4) линеаризуется и принимает вид

$$x \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d\Psi}{dx} - \frac{\Psi}{x} = \Theta x \quad (2.8)$$

$$x \frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{d\Theta}{dx} - \frac{\Theta}{x} = -\Psi x - p_0 x \Theta \quad (2.9)$$

3. Построим сначала решение в области  $x > x_k$ .

Уравнение (2.8) удовлетворяется, если принять

$$\Theta = CH_1(\alpha x), \quad \Psi = -\frac{C}{\alpha^2} H_1(\alpha x)$$

где  $H_1(\alpha x)$  — функция Ганкеля индекса «единица»,  $\alpha$  — неопределенный параметр. Подставляя  $\Theta$  и  $\Psi$  в уравнение (2.9), получаем

$$\alpha^2 = \frac{p_0}{2} \pm \sqrt{\frac{p_0^2}{4} - 1}$$

Наименьшее  $p_0$ , при котором параметр  $\alpha$  принимает вещественное значение, будет

$$p_0 = 2$$

При этом внешнее давление  $p$ , как это следует из выражения (2.5), принимает при  $\mu = 0.3$  верхнее критическое значение

$$p_*^0 = \frac{pR^2}{2Eh} = 0.606$$

Нас интересуют формы равновесия при  $p$ , меньшем верхнего критического, т. е. при  $p_0 < 2$ ; поэтому

$$\alpha^2 = \frac{p_0}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{p_0^2}{4}}$$

Отсюда получаем

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2 + p_0} + i \frac{1}{2} \sqrt{2 - p_0} \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + p_0} - i \frac{1}{2} \sqrt{2 - p_0}$$

Соответственно имеем две сопряженные функции Ганкеля; тогда

$$\Theta = C_1 H_1^{(1)}(\alpha x) + C_2 H_1^{(1)}(\bar{\alpha} x)$$

$$\Psi = -C_1 \frac{1}{\alpha^2} H_1^{(1)}(\alpha x) - C_2 \frac{1}{\bar{\alpha}^2} H_1^{(1)}(\bar{\alpha} x) \quad (3.1)$$

Здесь взята функция Ганкеля первого рода, затухающая на бесконечности. Пусть

$$H_1^{(1)}(\alpha x) = X_1 + iY_1, \quad H_1^{(1)}(\bar{\alpha} x) = X_1 - iY_1 \quad (3.2)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(C - Di), \quad C_2 = \frac{1}{2}(C + Di) \quad (3.3)$$

Тогда

$$\Theta = CX_1 + DY_1 \quad (3.4)$$

$$\Psi = -C \left( \frac{p_0}{2} X_1 + \sqrt{1 - \frac{p_0^2}{4}} Y_1 \right) - D \left( \frac{p_0}{2} Y_1 - \sqrt{1 - \frac{p_0^2}{4}} X_1 \right) \quad (3.5)$$

В дальнейшем потребуются значения производных от функций  $\Theta$  и  $\Psi$ . Согласно правилам дифференцирования цилиндрических функций получаем из выражений (3.1)

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dx} &= C_1 \alpha H_0^{(1)}(\alpha x) + C_2 \bar{\alpha} H_0^{(1)}(\bar{\alpha} x) - \frac{1}{x} \Theta \\ \frac{d\Psi}{dx} &= -\frac{C_1}{\alpha} H_0^{(1)}(\alpha x) - \frac{C_2}{\bar{\alpha}} H_0^{(1)}(\bar{\alpha} x) - \frac{1}{x} \Psi \end{aligned}$$

Здесь  $H_0^{(1)}(\alpha x)$  — функция Ганкеля первого рода нулевого индекса. Используя обозначения (3.2) и (3.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dx} &= C \left[ \frac{\sqrt{2 + p_0}}{2} X_0 - \frac{\sqrt{2 - p_0}}{2} Y_0 - \frac{1}{x} X_1 \right] + D \left[ \frac{\sqrt{2 + p_0}}{2} Y_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2 - p_0}}{2} X_0 - \frac{1}{x} Y_1 \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dx} &= C \left[ -\frac{\sqrt{2 + p_0}}{2} X_0 - \frac{\sqrt{2 - p_0}}{2} Y_0 + \frac{1}{x} \frac{p_0}{2} X_1 + \frac{1}{x} \sqrt{1 - \frac{p_0^2}{4}} Y_1 \right] + \\ &\quad + D \left[ -\frac{\sqrt{2 + p_0}}{2} Y_0 + \frac{\sqrt{2 - p_0}}{2} X_0 + \frac{1}{x} \frac{p_0}{2} Y_1 - \frac{1}{x} \sqrt{1 - \frac{p_0^2}{4}} X_1 \right] \quad (3.7) \end{aligned}$$

где по аналогии с выражениями (3.2) обозначено

$$H_0^{(1)}(\alpha x) = X_0 + iY_0, \quad H_0^{(1)}(\bar{\alpha} x) = X_0 - iY_0 \quad (3.8)$$

Перемещение по нормали к срединной поверхности оболочки (с учетом (2.3))

$$w = \int_r^{\infty} \vartheta dr, \quad \text{или} \quad w = \frac{R}{\lambda^{1/2}} \int_x^{\infty} \Theta dx \quad (3.9)$$

Подставляя сюда  $\Theta$  согласно (3.1), получим

$$w = -\frac{R}{\lambda^{1/2}} \left[ \frac{C_1}{\alpha} H_0^{(1)}(\alpha x) + \frac{C_2}{\alpha} H_0^{(1)}(\bar{\alpha} x) \right]$$

а после перехода к вещественным функциям (3.10)

$$\frac{w}{h} \sqrt{12(1-\mu^2)} = C \left[ \frac{\sqrt{2+p_0}}{2} X_0 + \frac{\sqrt{2-p_0}}{2} Y_0 \right] + D \left[ \frac{\sqrt{2+p_0}}{2} Y_0 - \frac{\sqrt{2-p_0}}{2} X_0 \right]$$

Таким образом, решение задачи в линейной области получено в функциях  $X_1, Y_1, X_0, Y_0$ , которые представляют собой вещественную и мнимую части функций Ганкеля комплексного аргумента. Эти функции не табулированы, и необходимо найти метод их вычисления.

Будем считать, что величина  $x_k$  (а ее берем произвольно) достаточно велика не только для того, чтобы можно было пренебречь нелинейностью но и для того, чтобы при вычислениях можно было достаточно эффективно воспользоваться асимптотическими разложениями.

Функция Ганкеля первого рода индекса  $s$  в асимптотическом разложении имеет вид

$$H_s^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[ i \left( z - \frac{1}{2} \pi s - \frac{1}{4} \pi \right) \right] \sum_{m=0, 1, 2, \dots} \frac{(-1)^m (c, m)}{(2iz)^m} \\ \left( (c, m) = \frac{(4c^2 - 1^2)(4c^2 - 3^2) \dots [4c^2 - (2m - 1)^2]}{m! 2^m} \right)$$

Для вычисления функций  $X_1$  и  $Y_1$  необходимо в этих выражениях произвести разделение вещественной и мнимой частей, полагая  $s = 1$  и  $z = \alpha x$ . Для определения функций  $X_0$  и  $Y_0$  надо принять  $s = 0$ .

После преобразований получаем

$$X_1 = \frac{e^{-bx}}{\sqrt{\pi x}} \left\{ \frac{b}{\sqrt{1-a}} \left[ P_1 \cos \left( ax - \frac{3\pi}{4} \right) - Q_1 \sin \left( ax - \frac{3\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{1-a} \left[ P_1 \sin \left( ax - \frac{3\pi}{4} \right) + Q_1 \cos \left( ax - \frac{3\pi}{4} \right) \right] \right\} \\ Y_1 = \frac{e^{-bx}}{\sqrt{\pi x}} \left\{ \frac{b}{\sqrt{1-a}} \left[ Q_1 \cos \left( ax - \frac{3\pi}{4} \right) + P_1 \sin \left( ax - \frac{3\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{1-a} \left[ Q_1 \sin \left( ax - \frac{3\pi}{4} \right) - P_1 \cos \left( ax - \frac{3\pi}{4} \right) \right] \right\} \\ X_0 = \frac{e^{-bx}}{\sqrt{\pi x}} \left\{ \frac{b}{\sqrt{1-a}} \left[ P_0 \cos \left( ax - \frac{\pi}{4} \right) - Q_0 \sin \left( ax - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{1-a} \left[ P_0 \sin \left( ax - \frac{\pi}{4} \right) + Q_0 \cos \left( ax - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} \\ Y_0 = \frac{e^{-bx}}{\sqrt{\pi x}} \left\{ \frac{b}{\sqrt{1-a}} \left[ Q_0 \cos \left( ax - \frac{\pi}{4} \right) + P_0 \sin \left( ax - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{1-a} \left[ Q_0 \sin \left( ax - \frac{\pi}{4} \right) - P_0 \cos \left( ax - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} \quad (3.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2} \sqrt{2+p_0}, & b &= \frac{1}{2} \sqrt{2-p_0} \\
 P_1 &= 1 + \frac{3\sqrt{2-p_0}}{8x} + \frac{15p_0}{64x^2} - \frac{105(1+p_0)\sqrt{2-p_0}}{256x^3} + \frac{4725(1-\frac{1}{2}p_0^2)}{2048x^4} + \\
 &+ \frac{72765(-1+p_0+p_0^2)\sqrt{2-p_0}}{16384x^5} - \frac{2837835 p_0(3-p_0^2)}{1024 \cdot 128x^6} + \dots \\
 Q_1 &= \frac{3\sqrt{2+p_0}}{8x} - \frac{15\sqrt{4-p_0^2}}{64x^2} + \frac{105(1-p_0)\sqrt{2+p_0}}{256x^3} + \frac{4725p_0\sqrt{4-p_0^2}}{4096x^4} - \\
 &- \frac{72765(1+p_0-p_0^2)\sqrt{2+p_0}}{16384x^5} + \frac{2837835(1-p_0^2)\sqrt{4-p_0^2}}{1024 \cdot 128x^6} + \dots \\
 P_0 &= 1 - \frac{\sqrt{2-p_0}}{8x} - \frac{9p_0}{64x^2} + \frac{75(1+p_0)\sqrt{2-p_0}}{256x^3} - \frac{3675(1-\frac{1}{2}p_0^2)}{2048x^4} - \\
 &- \frac{59535(-1+p_0+p_0^2)\sqrt{2-p_0}}{16384x^5} + \frac{2401245 p_0(3-p_0^2)}{1024 \cdot 128x^6} + \dots \\
 Q_0 &= -\frac{\sqrt{2+p_0}}{8x} + \frac{9\sqrt{4-p_0^2}}{64x^2} - \frac{75(1-p_0)\sqrt{2+p_0}}{256x^3} - \frac{3675p_0\sqrt{4-p_0^2}}{4096x^4} + \\
 &+ \frac{59535(1+p_0-p_0^2)\sqrt{2+p_0}}{16384x^5} - \frac{2401245(1-p_0^2)\sqrt{4-p_0^2}}{1024 \cdot 128x^6} + \dots \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

4. Обратимся теперь к «нелинейному» участку  $0 \leq x \leq x_k$ . Область изменения  $x$  справа ограничена. Кроме того в уравнениях (2.4) после преобразований остался только один параметр  $p_0$ , поэтому представляется возможным провести численное интегрирование системы и найденные решения состыковать на общей границе  $x = x_k$ . Вводя обозначения

$$\frac{d\Theta}{dx} = u, \quad \frac{d\Psi}{dx} = v \quad (4.1)$$

перепишем систему (2.4) в конечных разностях

$$\begin{aligned}
 \Delta v &= \left[ \Theta + \frac{\Theta^2}{2x} - \frac{v}{x} + \frac{\Psi}{x^2} \right] \Delta x \\
 \Delta u &= \left[ -\Psi - \frac{\Psi\Theta}{x} - p_0\Theta - \frac{u}{x} + \frac{\Theta}{x^2} \right] \Delta x \\
 \Delta\Theta &= u\Delta x, \quad \Delta\Psi = v\Delta x
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

При  $x = 0$  функции  $\Psi$  и  $\Theta$  должны быть равными нулю. Что же касается функций  $u$  и  $v$ , то при  $x = 0$  они остаются неопределенными. Задавая рядом значений  $u_0$  и  $v_0$  и производя численное интегрирование от  $x = 0$  до  $x = x_k$ , подбираем  $u_0$  и  $v_0$  так, чтобы обеспечить непрерывность функций на границе стыка двух областей.

Очевидно, при  $x = x_k$  необходимо выдержать четыре условия

$$\Theta_k = \Theta_k, \quad \frac{d\Theta}{dx} \Big|_k = \frac{d\Theta}{dx} \Big|_k \quad (4.3)$$

$$\Psi_k = \Psi_k, \quad \frac{d\Psi}{dx} \Big|_k = \frac{d\Psi}{dx} \Big|_k \quad (4.4)$$

где, с одной стороны, указаны функции, найденные численным интегрированием нелинейной системы, а с другой, — те же функции, которые определяются выражениями (3.4) — (3.7), составленными для линейной системы.

Условия (4.3) определяют равенство углов и моментов на границе перехода, а условия (4.4) — равенство меридианальных сил и смещений в срединной поверхности.

Обращаясь к выражениям (3.4) — (3.10) и (4.1), получим условия непрерывности в следующем виде:

$$\Theta_k = CX_{1k} + DY_{1k}$$

$$\begin{aligned} \Psi_k &= -C \left[ \frac{p_0}{2} X_{1k} + \sqrt{1 - \frac{p_0^2}{4}} Y_{1k} \right] - D \left[ \frac{p_0}{2} Y_{1k} - \sqrt{1 - \frac{p_0^2}{4}} X_{1k} \right] \\ u_k &= C \left[ \frac{\sqrt{2+p_0}}{2} X_{0k} - \frac{\sqrt{2-p_0}}{2} Y_{0k} - \frac{1}{x_k} X_{1k} \right] + \\ &\quad + D \left[ \frac{\sqrt{2+p_0}}{2} Y_{0k} + \frac{\sqrt{2-p_0}}{2} X_{0k} - \frac{1}{x_k} Y_{1k} \right] \\ v_k &= C \left[ -\frac{\sqrt{2+p_0}}{2} X_{0k} - \frac{\sqrt{2-p_0}}{2} Y_{0k} + \frac{1}{x_k} \frac{p_0}{2} X_{1k} + \frac{1}{x_k} \sqrt{1 - \frac{p_0^2}{4}} Y_{1k} \right] + \\ &\quad + D \left[ -\frac{\sqrt{2+p_0}}{2} Y_{0k} + \frac{\sqrt{2-p_0}}{2} X_{0k} + \frac{1}{x_k} \frac{p_0}{2} Y_{1k} - \frac{1}{x_k} \sqrt{1 - \frac{p_0^2}{4}} X_{1k} \right] \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений определяем постоянные  $C$  и  $D$  и подставляем их в два других. В итоге получаем два следующих уравнения:

$$K_1 \Theta_k + K_2 \Psi_k - u_k = 0, \quad -K_2 \Theta_k + K_3 \Psi_k - v_k = 0 \quad (4.5)$$

где

$$K_1 = \frac{(X_{0k} Y_{1k} - X_{1k} Y_{0k}) (1 - p_0) \sqrt{2+p_0} + (Y_{1k} Y_{0k} + X_{1k} X_{0k}) (1 + p_0) \sqrt{2-p_0}}{(X_{1k}^2 + Y_{1k}^2) \sqrt{4-p_0^2}} - \frac{1}{x_k}$$

$$K_2 = \frac{-(X_{0k} Y_{1k} - X_{1k} Y_{0k}) \sqrt{2+p_0} + (Y_{1k} Y_{0k} + X_{1k} X_{0k}) \sqrt{2-p_0}}{(X_{1k}^2 + Y_{1k}^2) \sqrt{4-p_0}}$$

$$K_3 = \frac{(X_{0k} Y_{1k} - X_{1k} Y_{0k}) \sqrt{2+p_0} + (X_{0k} X_{1k} + Y_{0k} Y_{1k}) \sqrt{2-p_0}}{(X_{1k}^2 + Y_{1k}^2) \sqrt{4-p_0^2}} - \frac{1}{x_k}$$

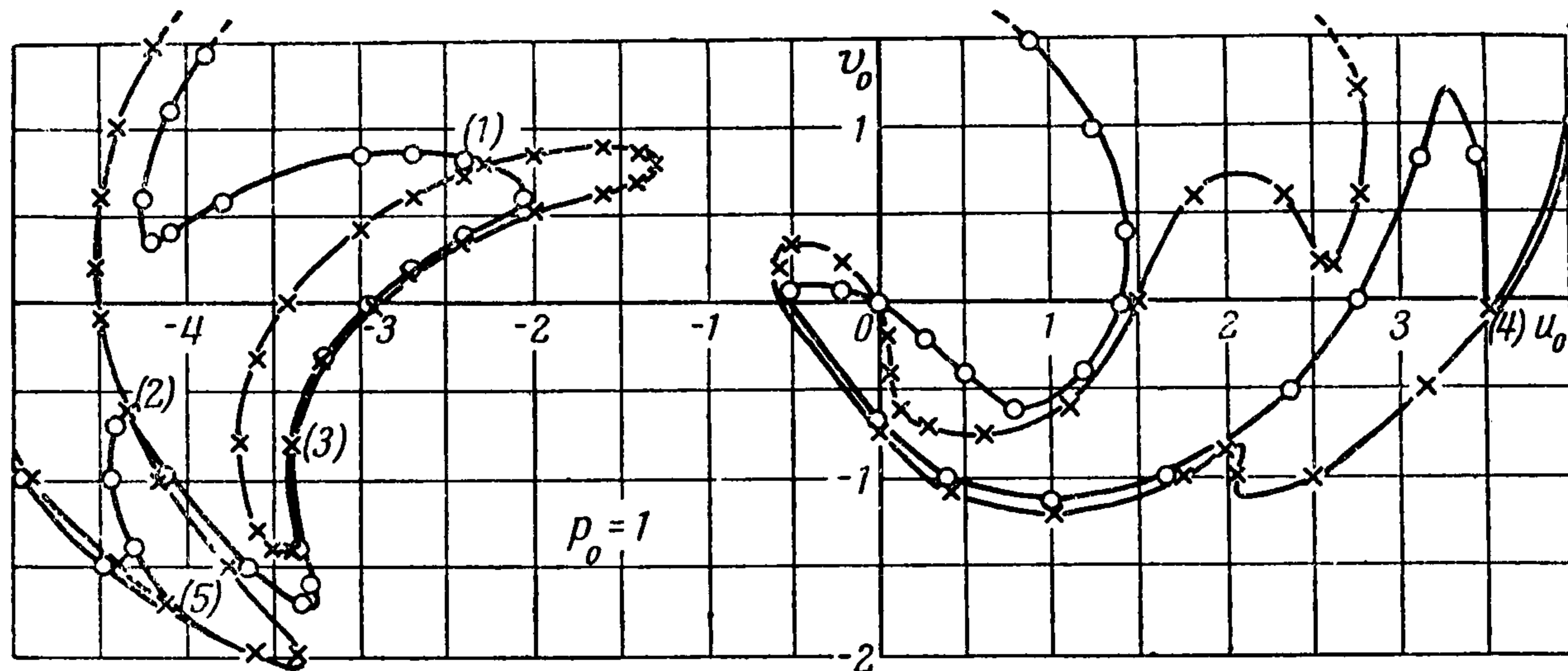
Используя асимптотические разложения (3.11) и (3.12), можно преобразовать последние выражения к виду

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2-p_0}} \left[ -(1-p_0) - \frac{3}{2x_k^2} + \frac{63}{8x_k^4} + \frac{27\sqrt{2-p_0}}{x_k^5} + \frac{1899(1-p_0)}{16x_k^6} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{\sqrt{2-p_0}} \left[ 1 - \frac{3}{2x_k^2} + \frac{3\sqrt{2-p_0}}{x_k^3} - \frac{63(1-p_0)}{8x_k^4} - \frac{27p_0\sqrt{2-p_0}}{x_k^5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1899(1+p_0-p_0^2)}{16x_k^6} \dots \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{1}{\sqrt{1-p_0}} \left[ -1 - \frac{3(1-p_0)}{2x_k^2} - \frac{3p_0\sqrt{2-p_0}}{x_k^3} + \frac{63(1+p_0-p_0^2)}{8x_k^4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{27(1-p_0^2)\sqrt{2-p_0}}{x_k^5} + \frac{1899(1-2p_0-p_0^2+p_0^3)}{16x_k^6} + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

5. Последовательность расчетов выглядит теперь следующим образом. Задаемся заранее величиной  $p_0$ , т. е. тем давлением, при котором необходимо найти возможные формы равновесия сферы с упругой вмятиной. Так как нас интересуют давления, меньшие верхнего критического, то  $p_0 \leq 2$ .



Фиг. 5

Задаемся далее фиксированным значением  $x_k$ . Эта величина, с одной стороны, должна быть достаточно большой, чтобы в интервале  $0 \leq x \leq x_k$  была «уложена» вся нелинейность задачи; она также должна быть достаточно большой и из условий применимости асимптотических разложений. С другой стороны, ее желательно выбрать меньшей с тем, чтобы не увеличивать излишне объем вычислительной работы.

В расчетах было принято  $x_k = 10$ .

В некоторых случаях выбор больших значений  $x_k$  может привести к противоречиям с основным предположением о применимости уравнений пологих оболочек. Из выражения (2.7) легко просматриваются границы изменения допустимого значения  $x$  в зависимости от отношения  $R/h$ .

Для принятых  $p_0$  и  $x_k$  по формулам (4.6) вычисляем коэффициенты  $K_1, K_2$  и  $K_3$ . Так, например, для  $p_0 = 1$  и  $x_k = 10$  имеем

$$K_1 = -0.01445, \quad K_2 = 0.9878, \\ K_3 = -1.0022$$

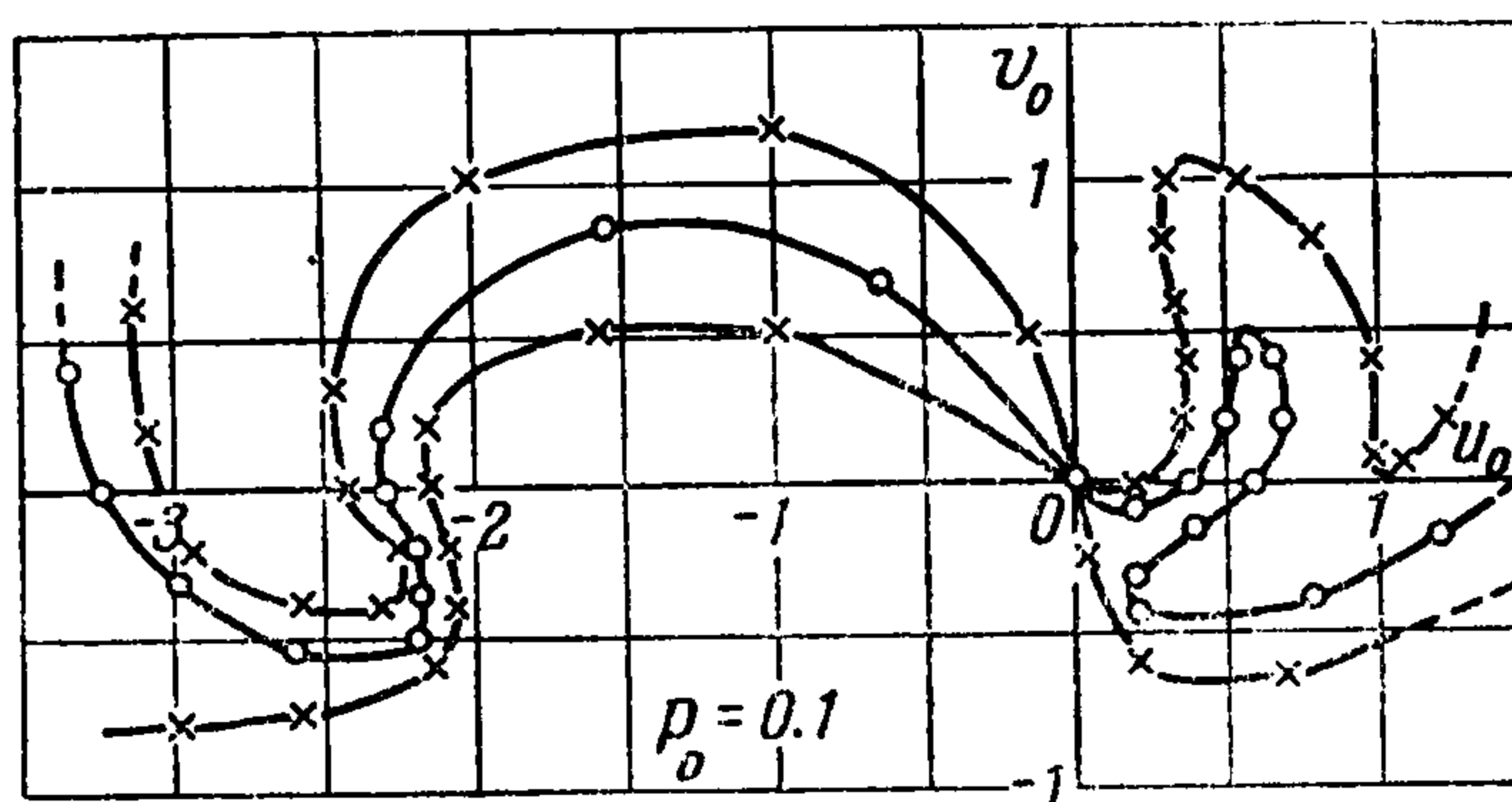
Далее, задаваясь рядом значений

$$\frac{d\Theta}{dx} = u_0, \quad \frac{d\Psi}{dx} = v_0 \quad \text{при } x = 0$$

проводим численное интегрирование по схеме (4.2) от  $x = 0$  до  $x = x_k$ . В результате интегрирования находим величины  $u_k, v_k, \Theta_k$  и  $\Psi_k$ , которые подставляются затем в уравнения (4.5). Для того чтобы найти затухающее решение, нужно подобрать такие  $u_0$  и  $v_0$ , чтобы были удовлетворены одновременно два уравнения (4.5).

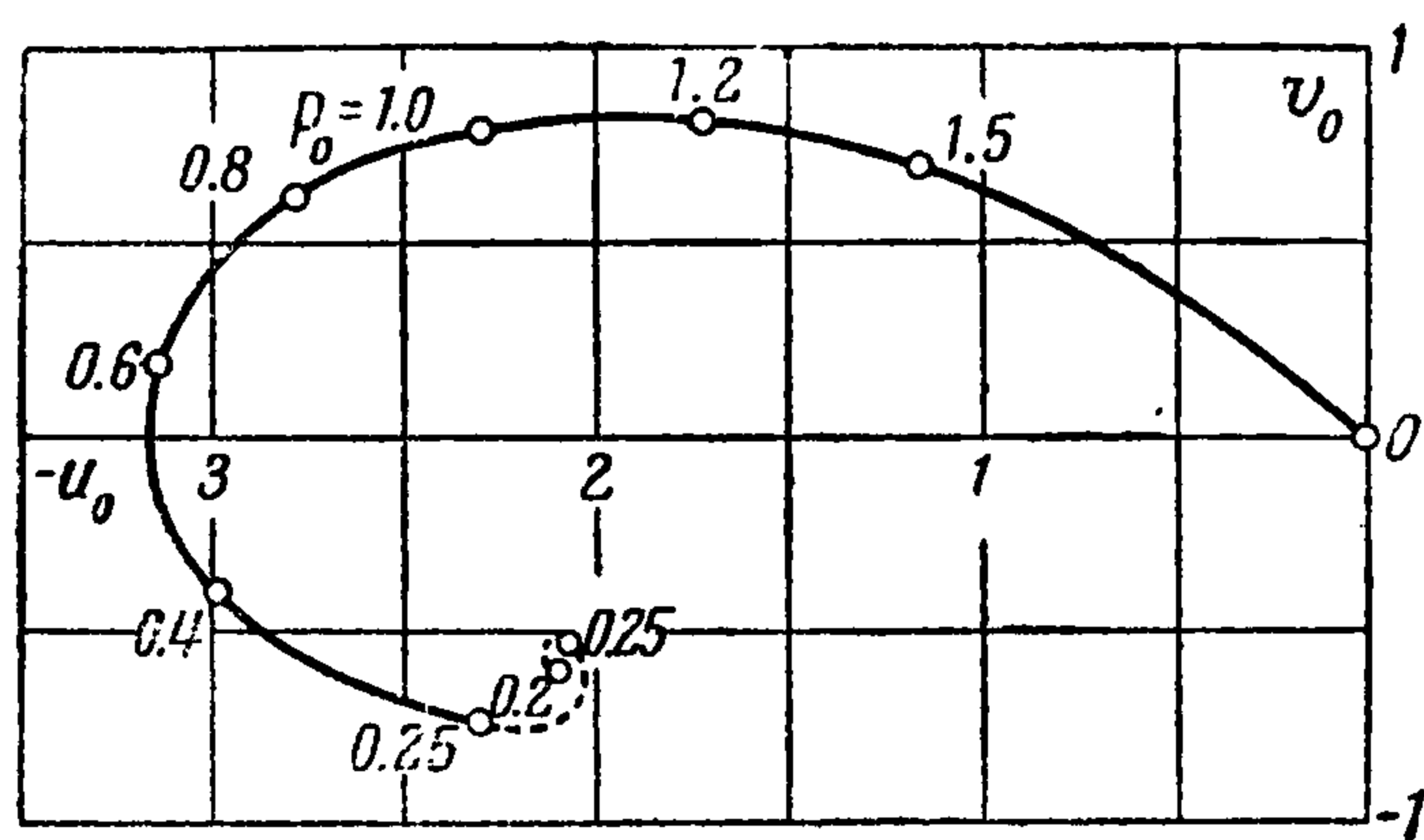
Эта работа выполнялась на электронной цифровой машине.

Сначала производились ориентировочные поиски. Они заключались в том, что для фиксированных значений  $p_0$  производилось многократное

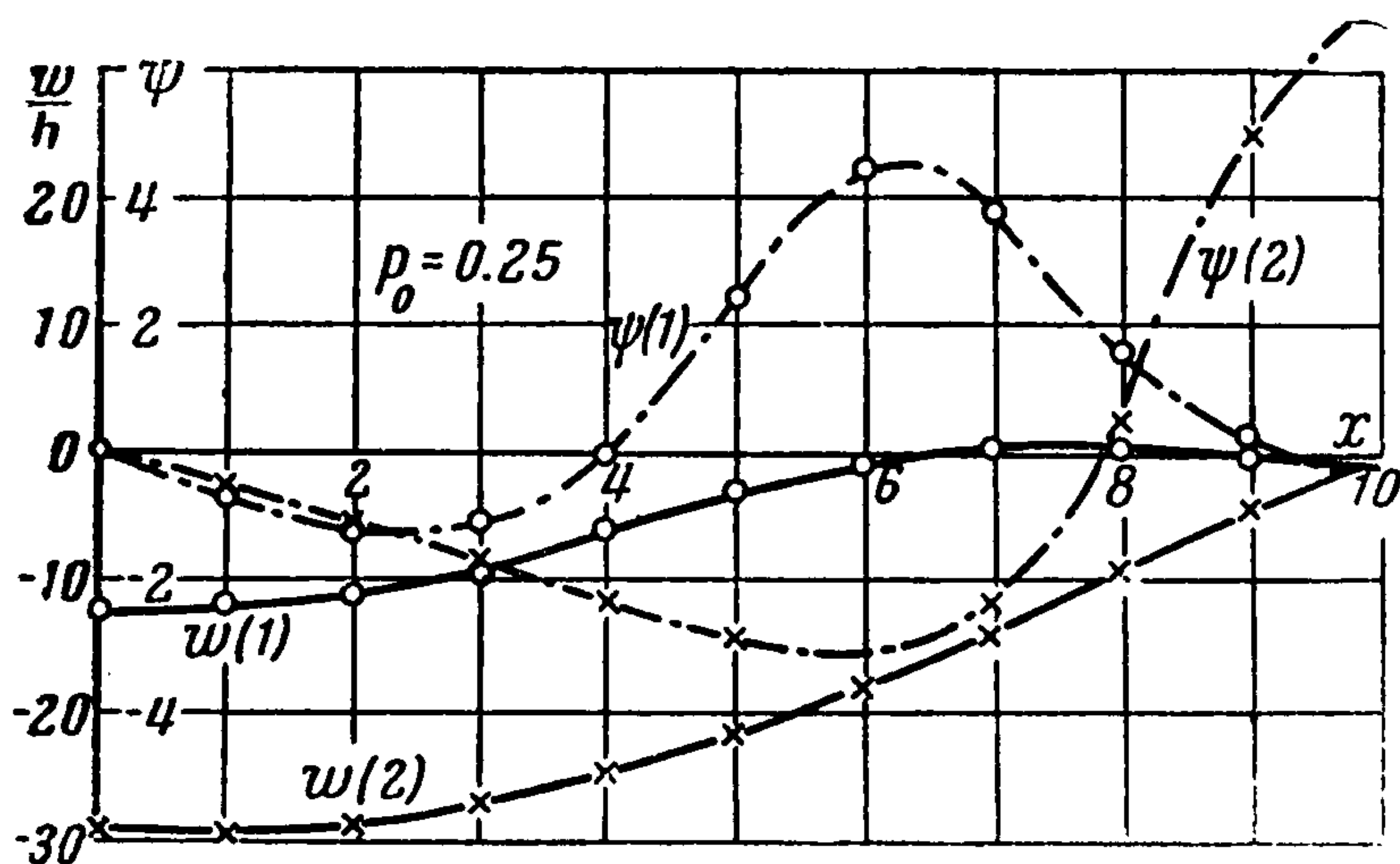


Фиг. 6

интегрирование уравнений (4.2) при различных значениях  $u_0$  (от  $-7$  до  $+7$ ) и  $v_0$  (от  $-3$  до  $+2$ ) с интервалом изменения  $\Delta u_0 = \Delta v_0 = 0.2$ .



Фиг. 7

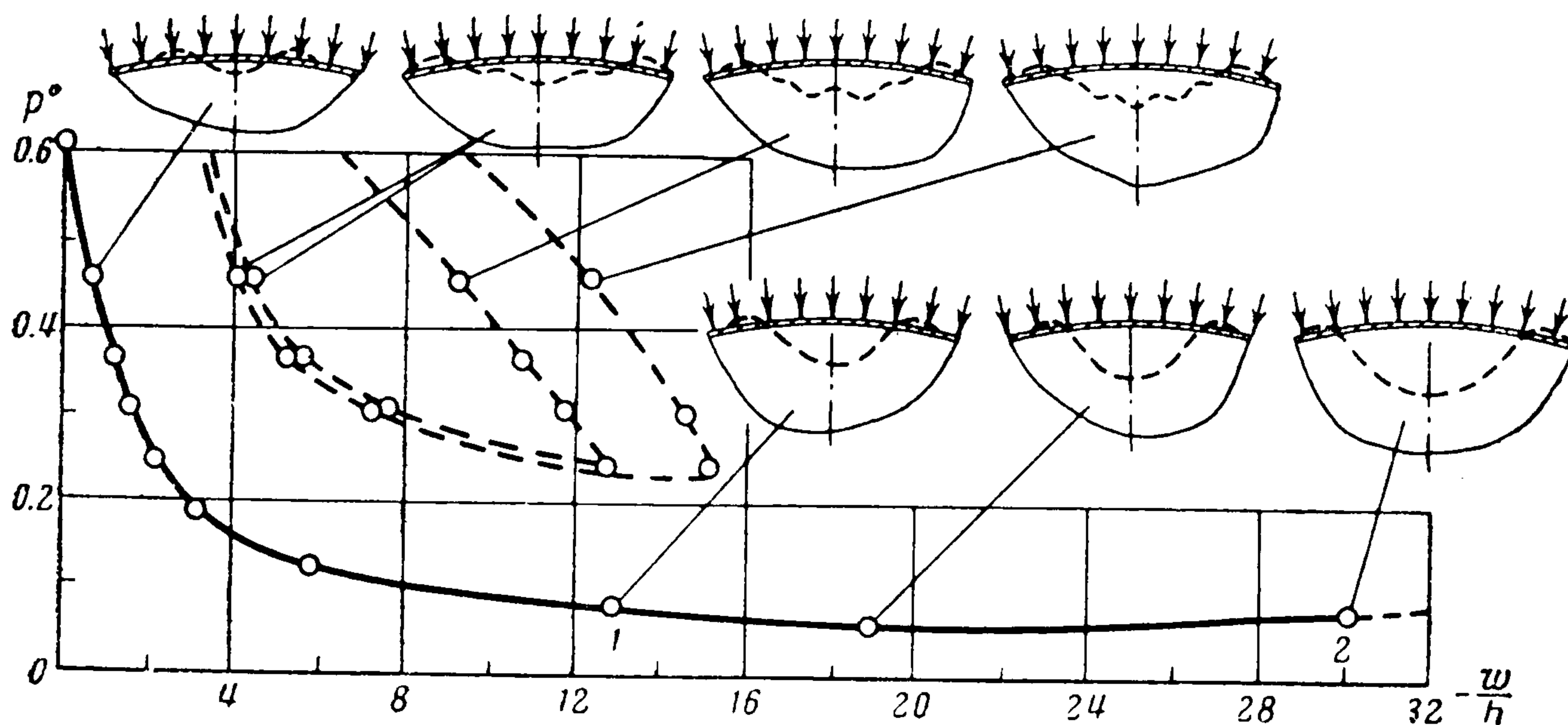


Фиг. 8

Интегрирование велось с шагом  $\Delta x = 0.1$ .

В результате предварительного поиска определялись  $u_0$  и  $v_0$ , при которых обращалась в нуль левая часть первого и левая часть второго уравнения (4.5). По точкам, отмеченным кружками и крестиками (фиг. 5), строилось два семейства кривых. Их пересечение определяло искомые корни  $u_0$  и  $v_0$ . На фиг. 5 показаны эти кривые для  $p_0 = 1$  ( $p^\circ = 0.303$ ) и цифрами в скобках отмечены корни. Для значения  $p_0 = 0.1$  ( $p^\circ = 0.0303$ ) соответствующие кривые даны на фиг. 6. Точек пересечения кривых (за исключением нулевой точки) не обнаружено.

После того, как определялась область расположения корня, интервал изменения  $u_0$  и  $v_0$  сужался и координаты точки пересечения последовательно уточнялись. При малых



Фиг. 9

значениях  $p_0$  вычисление корней необходимо было проводить до четвертой-пятой значащей цифры. Расположение основной группы корней на плоскости показано на фиг. 7.

Для уточненных значений  $u_0$  и  $v_0$  проводилось окончательное интегрирование уравнений (4.2) с выводом полученных функций на печать. Интегрируя функцию  $\Theta$ , получаем согласно (3.9) форму упругой поверхности и величину максимального прогиба.

На фиг. 8 показаны в качестве примера функции  $\Psi$  и  $w/h$  для двух корней при  $p_0 = 0.25$  ( $p^\circ = 0.071$ ).

Полученное решение подвергалось ряду контрольных проверок.

Так, в частности, численное интегрирование продолжалось за пределы  $x_k$ . Полученные функции совпадали здесь с функциями, найденными из линейной системы.

Проводился расчет при значениях  $x_k > 10$ . От величины  $x_k$  решение оказалось не зависящим. Это свидетельствовало о том, что при сделанном выборе  $x_k = 10$  вся нелинейность укладывается в интервале  $0 < x < x_k$ .

Для уточнения решения, наконец, шаг интегрирования уменьшался с  $\Delta x = 0.1$ , до 0.01, что привело к изменениям искомых функций лишь в третьей значащей цифре. Поэтому в дальнейшем уточнении необходимости не возникает.

Сводка полученных результатов представлена на фиг. 9. Сплошной линией проведена кривая, соответствующая основным формам равновесия. Цифрами 1 и 2 отмечены точки, для которых были построены функции  $\psi$  и  $w/h$  на фиг. 8. Нижнее критическое давление оказалось равным

$$p_{\min}^\circ = 0.06$$

при этом относительный прогиб

$$\frac{w}{h} = 22 \div 23$$

Пунктиром на фиг. 9 проведены кривые, соответствующие высшим формам равновесия.

Полученное значение  $p_{\min}^\circ$  будет точным в той мере, в какой применимы к решаемой задаче уравнения пологих оболочек. Не исключено, что эта величина может заметно измениться, если основываться на анализе более точной системы уравнений.

Поступила 13 VII 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K a r m a n T. and T s i e n H. S. The Buckling of Spherical Shells by External Pressure, Journal of the Aeronautical Sciences. 1939, Dec, vol. 7, No 2, pp. 43—50.
2. F r i e d r i c h s K. O. On the Minimum Buckling Load for Spherical Shells, von Karman Anniversary Volume, pp. 258—272. California Institute of Technology, Pasadena, 1941.
3. М у ш т а р и Х. М., С у р к и н Р. Г. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 6.
4. Ф е о д о с ь е в В. И. Об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерно распределенного давления. ПММ. 1954, т. XVIII, вып. I.
5. М у ш т а р и Х. М. К теории устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления (в связи со статьей В. И. Феодосьева), ПММ, 1955, т. XIX, вып. 2.
6. K e l l e r H. B. and R e i s s E. L. Spherical Cap Snapping, Journal of the Aero/Space Sciences, Oct. 1959, vol. 26, No 10, pp. 643—652.
7. M u r r e y F. I. and F r a n k W. W r i g h t. The Buckling of Thin Spherical Shells, Journal of the Aero/Space Sciences, 1961, vol. 28, No 3, pp. 223—236.
8. Ф е о д о с ь е в В. И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой. ПММ, 1945, т. IX, вып. 5.